

Элементы теории делимости



Делимость помогает быстро понимать числа, дроби и расчёты без остатка.



Зачем нужна делимость



Делимость делает вычисления понятнее: помогает сокращать дроби, находить общие знаменатели и проверять ответы. В жизни она нужна при делении предметов поровну, составлении расписаний и работе с повторяющимися циклами.

Что означает делимость числа



01

Определение

Число a делится на b , если можно найти натуральное c так, что $a = b \cdot c$. Тогда деление выполняется без остатка, а остаток равен нулю.

02

Кратное и делитель

Если a делится на b , то a называют кратным числа b , а b — делителем числа a . Эти названия описывают одну и ту же связь с разных сторон.

03

Как это проверить

Чтобы убедиться в делимости, достаточно выполнить деление и посмотреть, остаётся ли после него ноль. Если остаток есть, число не делится нацело.

04

Пример

Число 24 делится на 6, потому что $24 = 6 \cdot 4$. А число 35 не делится на 6 без остатка, поскольку целого результата не получается.



Делители и кратные числа 18



○ Все делители

У числа 18 ровно шесть положительных делителей: 1, 2, 3, 6, 9 и 18. Они показывают, на какие равные части можно разделить это число.

○ Первые кратные

Кратные числа 18 образуют бесконечный ряд: 18, 36, 54, 72, 90 и дальше. Каждое следующее получается прибавлением ещё одного числа 18.

○ Что показывает схема

На числовой прямой кратные удобно отмечать равными шагами. Такая схема помогает увидеть регулярность: расстояние между соседними кратными всегда одинаковое.

○ Практический смысл

Делители отвечают на вопрос, можно ли разделить 18 поровну, а кратные — можно ли собрать число из одинаковых повторов. Это разные задачи одной темы.



Основные свойства делимости



Свойства делимости натуральных чисел, школьный курс математики



Таблица показывает три важные закономерности, которые позволяют заменять длинные вычисления более короткими и быстро проверять делимость.

Свойство	Смысл
$a : b$ и $b : c$	$a : c$
a и $b : c$	$a + b$ и $a - b : c$
$a : b$	$a \cdot k : b$

Свойства помогают переносить делимость с одних чисел на другие, а также быстро проверять суммы, разности и произведения без полного вычисления.



Признаки делимости на 2, 5 и 10



□ На 2

Число делится на 2, если его последняя цифра чётная: 0, 2, 4, 6 или 8. Это самый быстрый признак для проверки больших чисел.

□ На 5

Число делится на 5, если оно оканчивается на 0 или 5. Такой признак особенно удобен в устных вычислениях и при проверке ответов.

□ На 10

Число делится на 10 только тогда, когда его последняя цифра равна 0. Поэтому его легко распознать даже без деления столбиком.

□ Примеры

Числа 148, 375 и 860 сразу показывают работу признаков: первое делится на 2, второе — на 5, третье — на 10. Достаточно посмотреть на последнюю цифру.



Для проверки на 3 и 9 удобно складывать цифры числа: у 312 сумма равна 6, поэтому оно делится на 3.

6

— сумма цифр числа 312, по которой видно его делимость на 3.

Школьный признак делимости на 3 и 9

Для проверки
складывать
сумма равна
на 3.

[illegible]

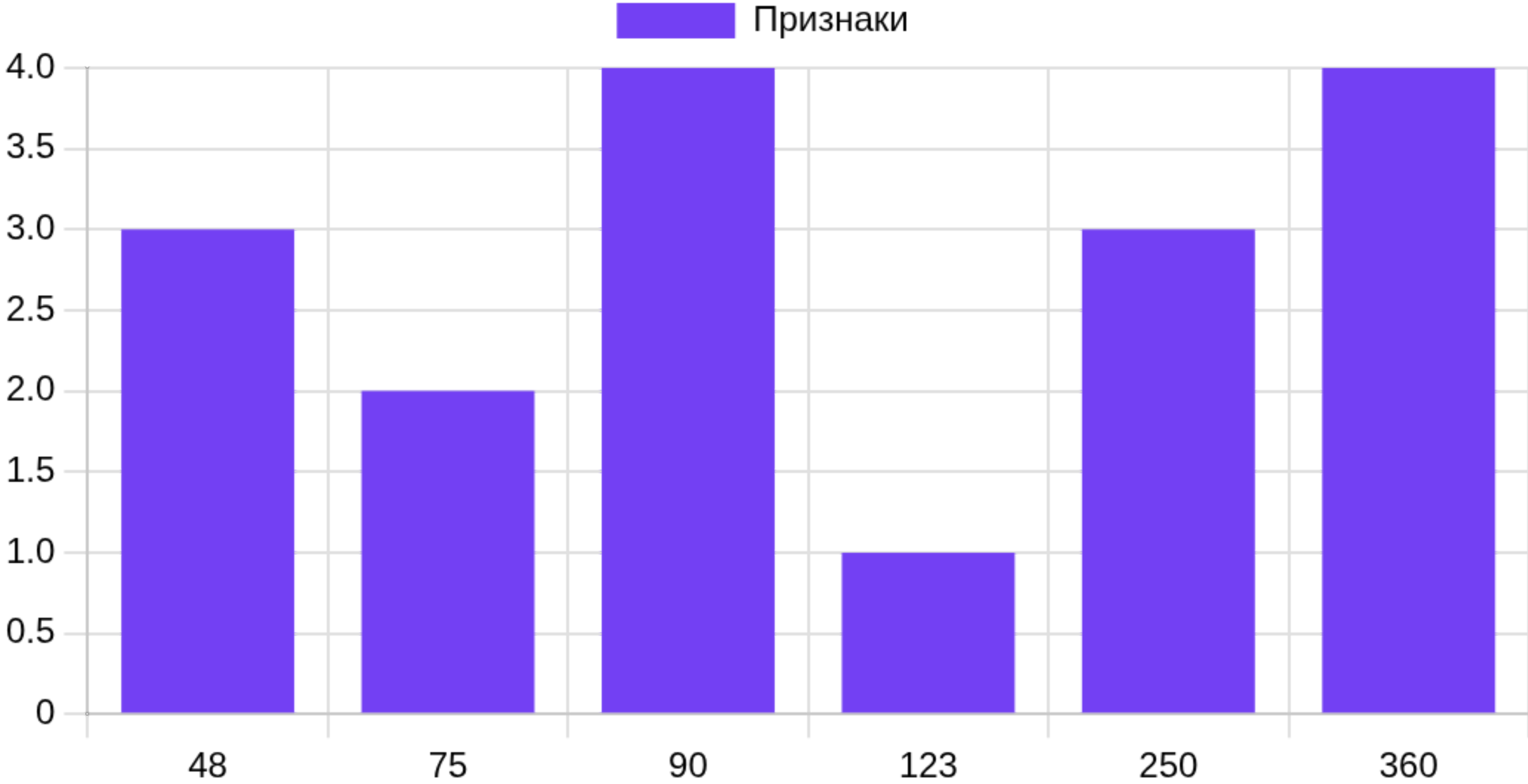
Сравнение признаков делимости на примерах чисел





Диаграмма показывает, что у чисел с нулём или чётной последней цифрой обычно находится больше простых признаков делимости.

Примеры составлены по школьным признакам делимости для чисел 48, 75, 90, 123, 250 и 360



Быстрее всего проверяются признаки по последней цифре; числа 90 и 360 имеют больше всего подходящих правил.

Признаки делимости на 4, 8 и 11



○ На 4

Число делится на 4, если его последние две цифры образуют число, делящееся на 4. Поэтому 312 подходит, а проверка остаётся быстрой и простой.

○ На 8

Число делится на 8, если делится на 8 число, составленное из его последних трёх цифр. У 7 248 это условие выполняется.

○ На 11

Для проверки на 11 складывают цифры на нечётных и чётных местах и находят их разность. Если она делится на 11 или равна нулю, число подходит.

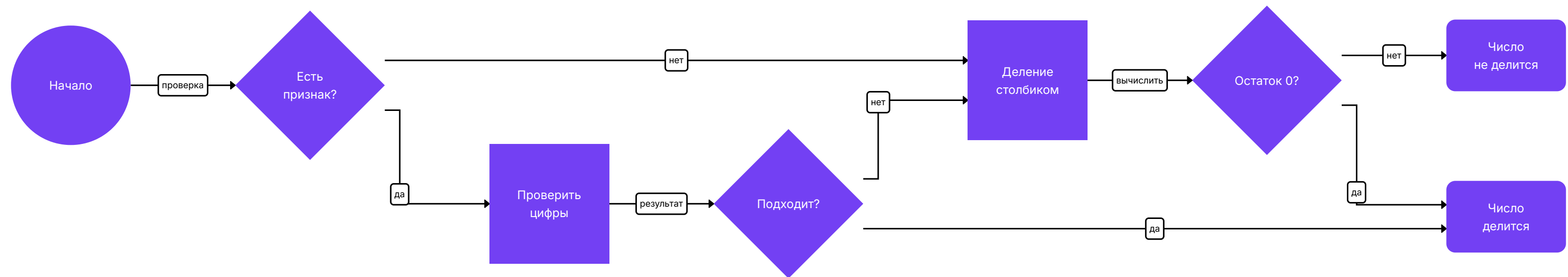
○ Когда это полезно

Эти признаки помогают работать с большими числами без полного деления. Они особенно удобны, когда нужно быстро проверить результат или подобрать подходящий способ вычисления.

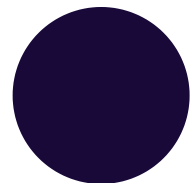


Проверяем делимость по шагам

Последовательность действий для быстрой проверки натурального числа



Простые и составные числа



Простое число

Простое число делится только на 1 и само себя. У него ровно два делителя, поэтому оно не раскладывается на меньшие натуральные множители, кроме единицы и самого числа.



Составное число

Составное число имеет больше двух делителей. Его можно представить как произведение нескольких натуральных чисел, а значит, оно удобно для разложения на простые множители и дальнейших вычислений.



Особые случаи

Число 2 — наименьшее простое число и единственное чётное простое. Число 1 не относится ни к простым, ни к составным, потому что у него только один делитель.

Примеры простых и составных чисел

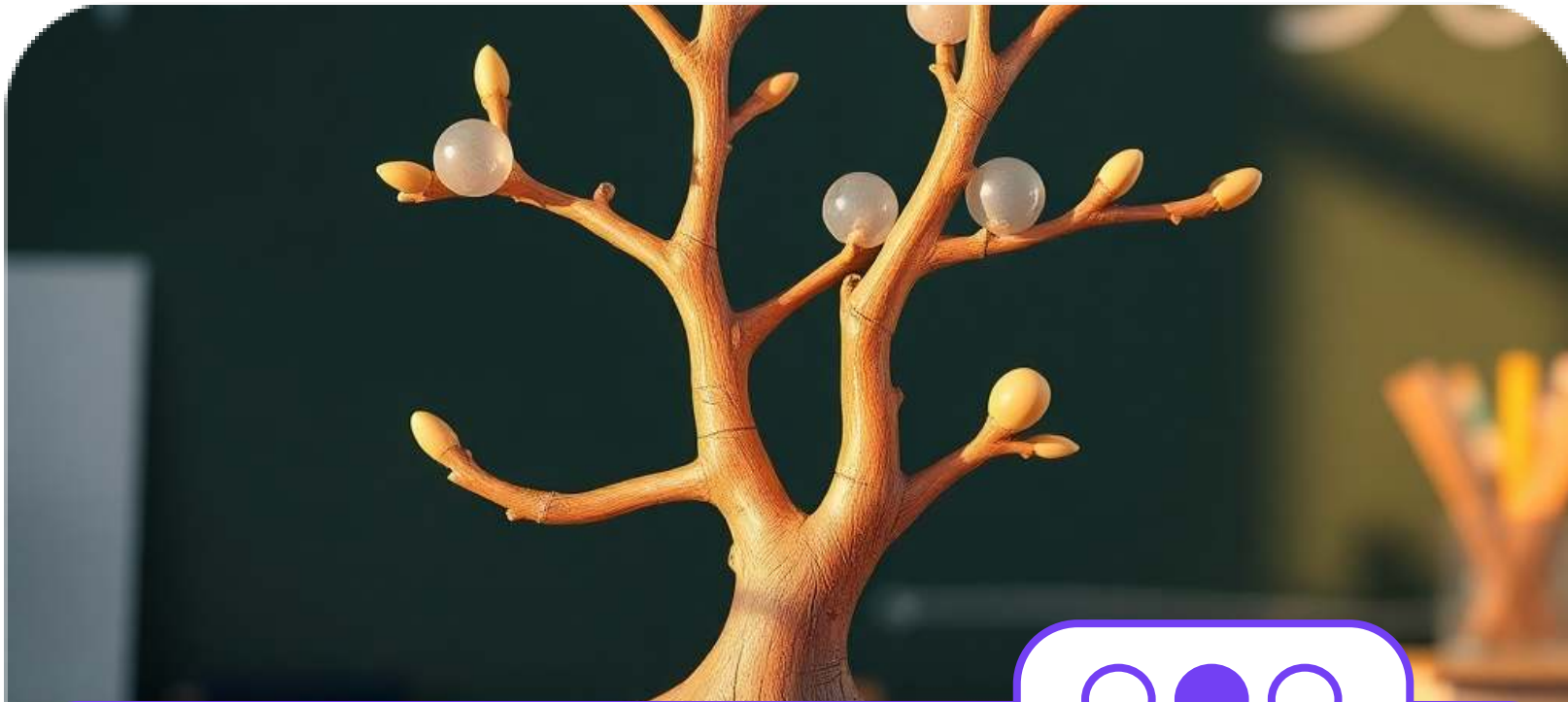
Школьная классификация натуральных чисел по числу делителей.

Простые	Составные
2, 3, 5	4, 6, 8
7, 11, 13	9, 10, 12

Таблица показывает две группы чисел и помогает быстро различать простые и составные числа по количеству делителей.

Простые числа служат базовыми «кирпичиками» для разложения, а составные числа удобно расписывать через простые множители при поиске НОД и НОК.

Разложение числа на простые множители



Число 36: дерево разложения

Сначала число 36 делят на 2, затем снова на 2, после чего остаются множители 3 и 3. В записи получается $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, или $2^2 \cdot 3^2$. Дерево разложения наглядно показывает каждый шаг.



Число 84: последовательное деление

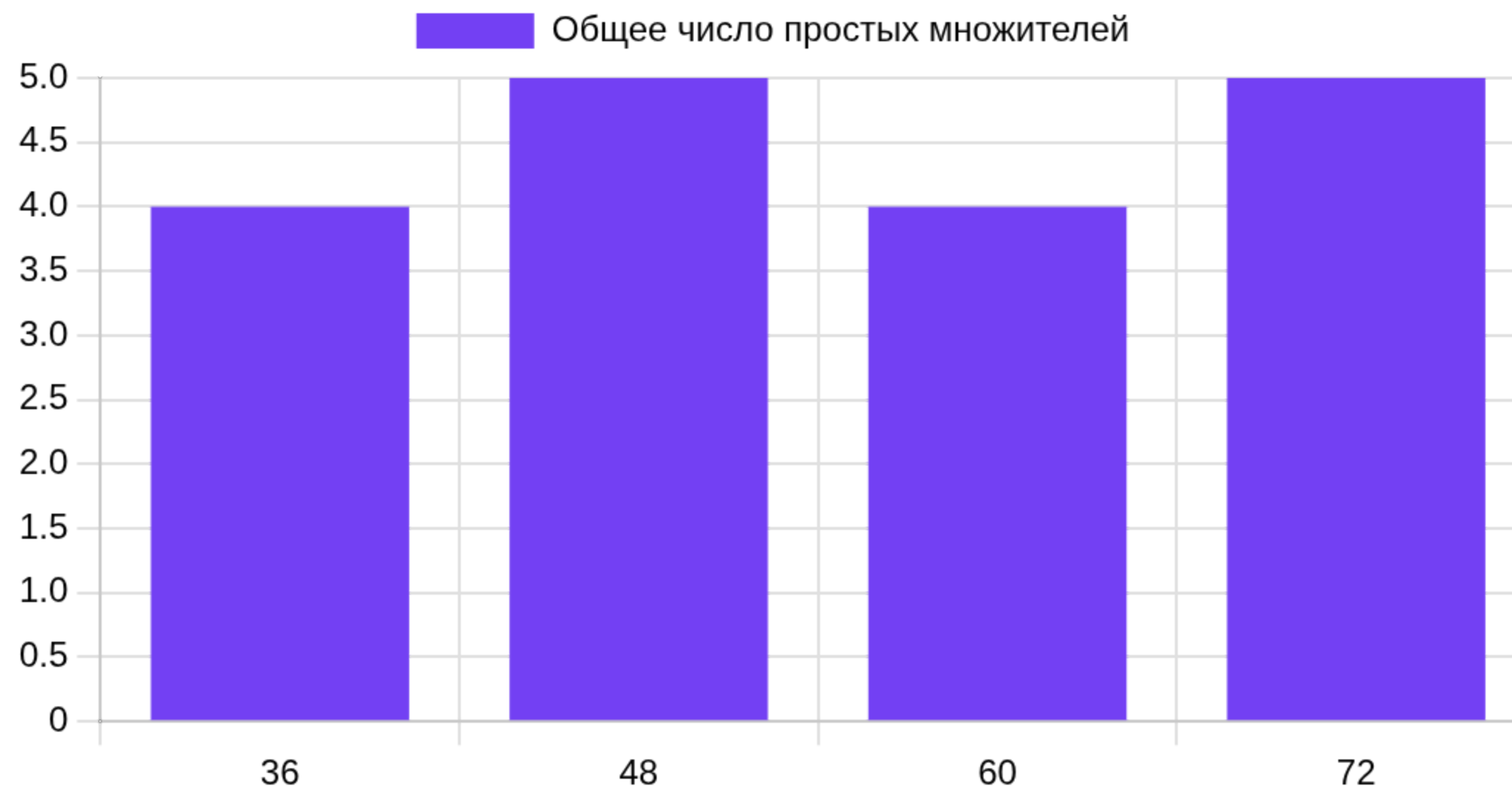
Число 84 можно разложить иначе: $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$, то есть $2^2 \cdot 3 \cdot 7$. На схеме видно, как исходное число постепенно распадается на простые множители, пока не останутся только простые числа.

Состав простых множителей у чисел 36, 48, 60 и 72

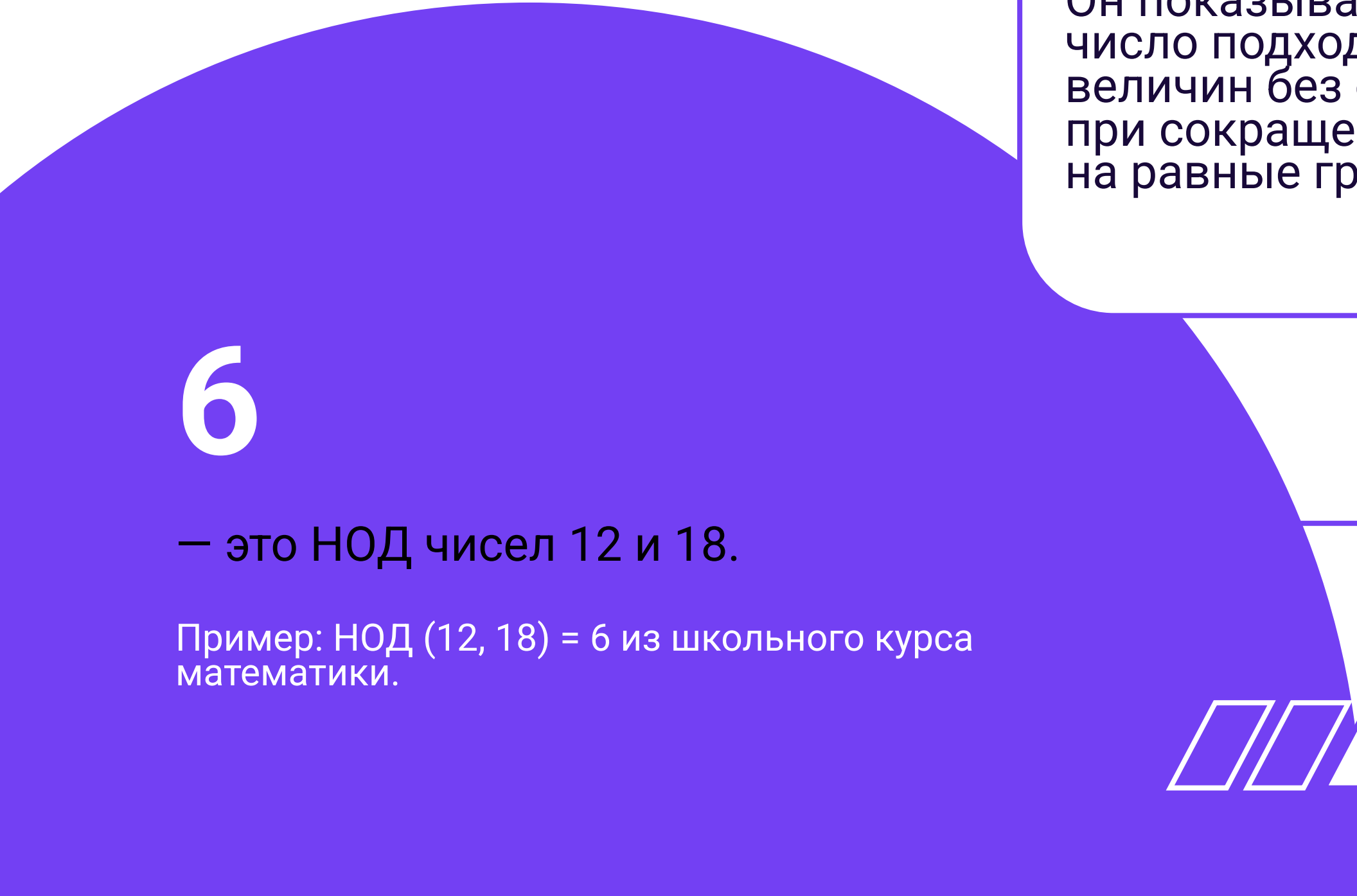


Диаграмма показывает не сами множители, а их количество с учётом степеней. Это помогает сравнить, насколько «составным» является каждое число.

Разложения: $36 = 2^2 \cdot 3^2$; $48 = 2^4 \cdot 3$; $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$; $72 = 2^3 \cdot 3^2$.



У всех чисел повторяются простые множители 2 и 3, а у 60 появляется ещё и 5. Степени показывают, сколько раз множитель входит в разложение.



6

— это НОД чисел 12 и 18.

Пример: НОД (12, 18) = 6 из школьного курса математики.

Он показывает, какое наибольшее число подходит сразу для обеих величин без остатка. Это удобно при сокращении дробей и делении на равные группы.

Как найти НОК

Разложить числа

Сначала каждое число представляют в виде произведения простых множителей. Такой способ делает видимыми общие и разные части разложения и помогает избежать лишних проб при поиске ответа.

1

Взять нужные множители

Для НОК берут все простые множители, которые встречаются хотя бы в одном разложении, и выбирают наибольшие степени. Так сохраняются все необходимые множители для общего кратного.

2

Перемножить и проверить

После выбора множителей их перемножают и получают наименьшее число, делящееся на все заданные числа без остатка. При необходимости результат можно быстро проверить делением.

3



Сравнение НОД и НОК для нескольких пар чисел



Вычисления по определениям НОД и НОК, школьные примеры.



Таблица помогает увидеть, как связаны общая часть чисел и их первое общее кратное на разных примерах.

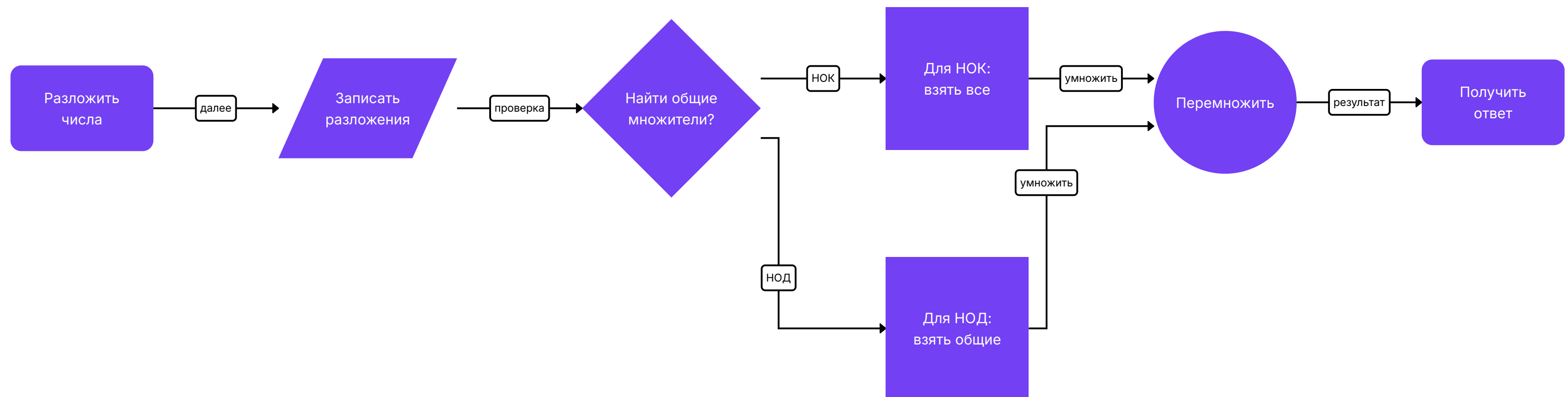
Пара	НОД	НОК
8 и 12	4	24
9 и 15	3	45
6 и 10	2	30
14 и 21	7	42

НОД показывает общий делитель, а НОК — первое число, подходящее всем сразу. Чем больше общих множителей, тем заметнее связь между ними.



Как находят НОД и НОК через разложение на множители

Последовательность действий при работе с простыми множителями



Практические задачи на делимость



Равные группы

Если нужно раздать предметы поровну, делимость помогает понять, получится ли одинаковое число в каждой группе без остатка и сколько предметов останется.



Упаковка и наборы

При фасовке товаров важно выбрать такое количество в пачке или коробке, чтобы всё делилось без остатка. Это делает упаковку удобной и одинаковой.



Расписания и циклы

В повторяющихся событиях делимость помогает определить момент, когда два цикла совпадут снова. Так решают задачи о расписаниях, дежурствах и повторяющихся действиях.



Проверка вычислений

Признаки делимости позволяют быстро проверить ответ в примере, не выполняя полное деление. Это экономит время и помогает замечать ошибки в вычислениях.





Что важно запомнить о делимости

Делимость связывает делители, кратные, простые числа, разложение на множители, НОД и НОК. Эти идеи делают вычисления быстрее, а решения задач — понятнее и точнее.

