



Расстояние между точками: основа координатной геометрии

Урок о длине кратчайшего отрезка между точками: на прямой, в плоскости и в пространстве.



Зачем в 10 классе изучают расстояние между точками

Координатный метод превращает геометрию в расчёты: отрезки, диагонали, радиусы и проверки равенства. Он лежит в основе аналитической геометрии, уравнения окружности, середины отрезка и симметрии — и подготавливает к дальнейшим темам о прямых и фигурах.



Если точки на прямой имеют координаты -3 и 5 , расстояние между ними равно модулю разности координат, то есть 8 .

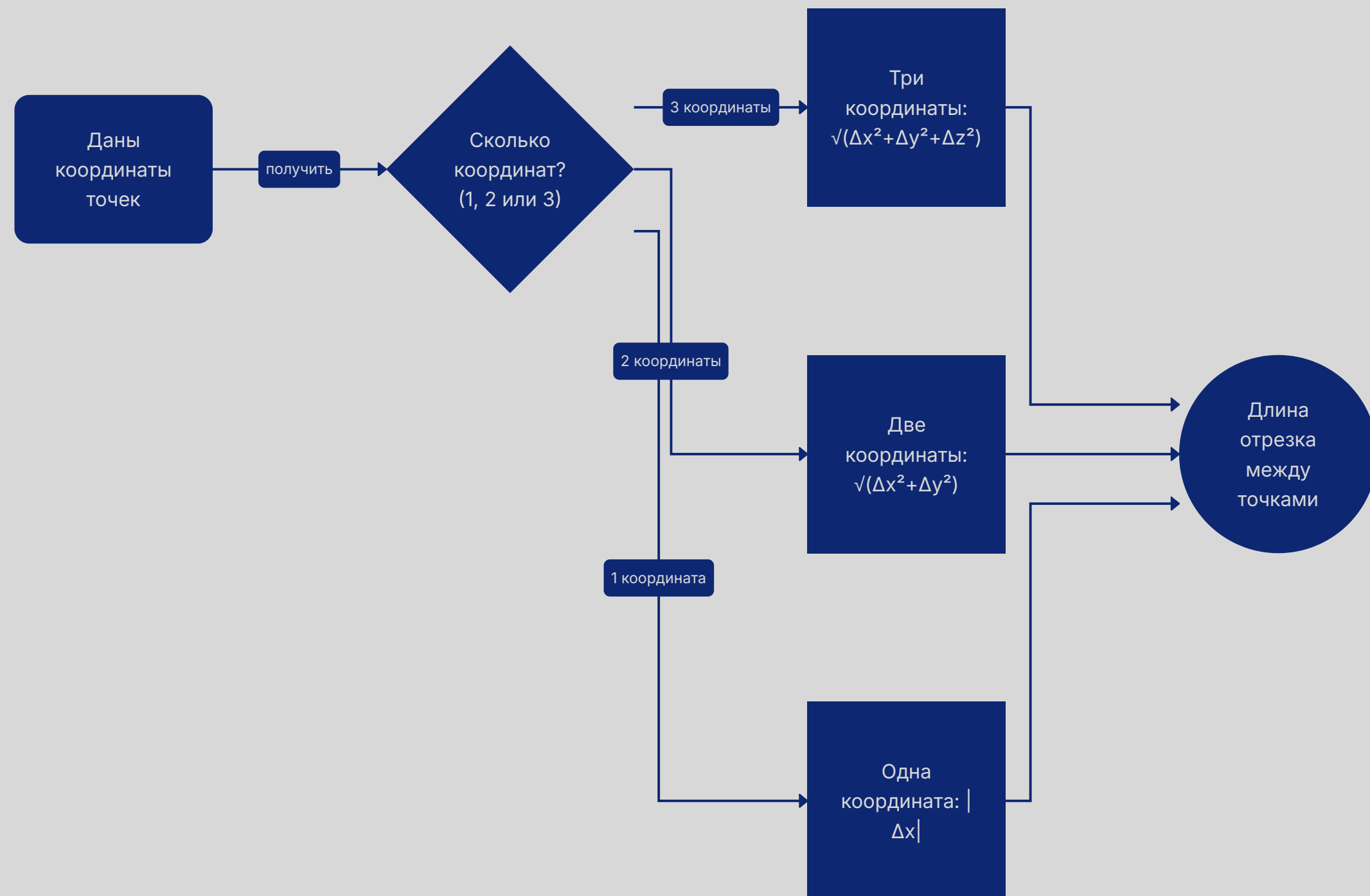
8

Модуль разности координат гарантирует корректную длину отрезка даже при знаках

Учебное задание/пример из условия (точки -3 и 5)

Как находить расстояние между точками

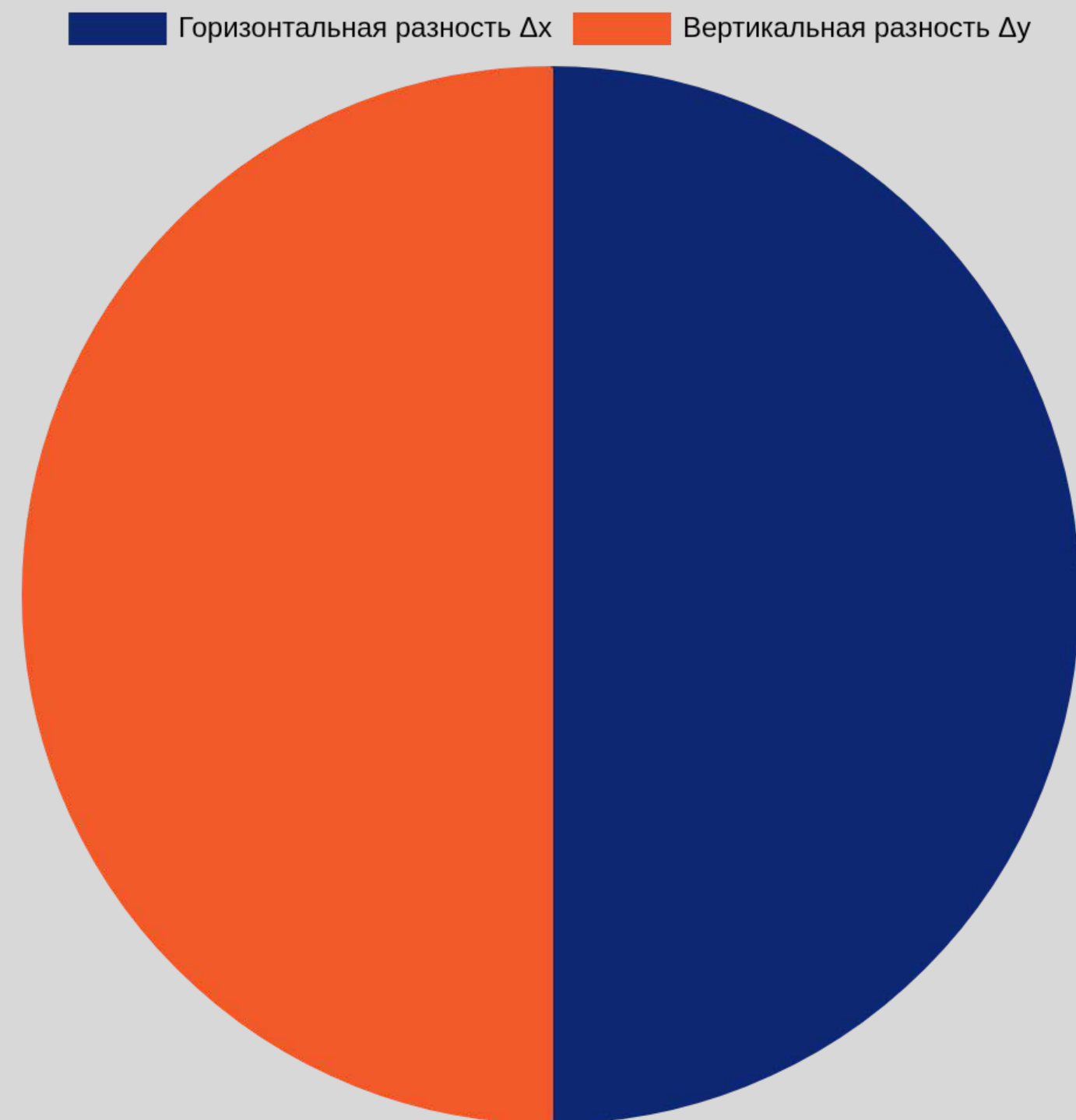
Алгоритм зависит от того, сколько координат используется в задании: 1, 2 или 3.



Из чего складывается расстояние на плоскости

Разности Δx и Δy играют роль катетов прямоугольного треугольника, а расстояние — его гипотенузы.

Диагональ определяется совместным «накоплением» горизонтального и вертикального сдвигов:
увеличилась одна разность — выросло и расстояние.



Смысловая схема по формуле для расстояния в плоскости (без численных данных измерений)

Формула расстояния на плоскости

1

Для точек $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ расстояние вычисляется как $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Основа — теорема Пифагора для прямоугольного треугольника.

2

Квадраты разностей устраняют влияние знаков координат: при любом расположении точек подкоренное выражение остаётся неотрицательным. Корень возвращает длину в исходных единицах.

3

Эту формулу используют при задачах на длины отрезков и диагоналей, а также при нахождении координат вершин фигур, когда требуется проверить геометрические условия по числам.

Примеры вычисления расстояния на плоскости

В таблице показано, как сначала находят разности Δx и Δy , затем подставляют их в формулу расстояния.

Расстояние получается одинаковым по смыслу независимо от знаков координат и от того, совпадает ли одна из разностей.

Координаты точек	Δx	Δy	AB
A(1,2), B(4,6)	3	4	5
A(-2,1), B(3,1)	5	0	5
A(0,0), B(-6,8)	6	8	10

Геометрический смысл формулы через прямоугольный треугольник



Катеты из координатных разностей

На координатной плоскости отмечают две точки и мысленно восстанавливают прямоугольный треугольник. Его катеты получаются как модули разностей по x и по y . Тогда отрезок между точками становится гипотенузой, а формула — прямым следствием теоремы Пифагора.



Почему именно диагональ

Построенный треугольник показывает, что кратчайший путь между точками соответствует гипотенузе. Длина диагонали не равна ни одному катету и всегда больше каждого из них, потому что она «объединяет» и горизонтальный, и вертикальный сдвиг.

Расстояние в пространстве

1

Для точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ расстояние вычисляется по формуле $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

2

Эта формула продолжает идею теоремы Пифагора: в 3D добавляется ещё одна «координатная разность», которая увеличивает общий вклад в диагональ.

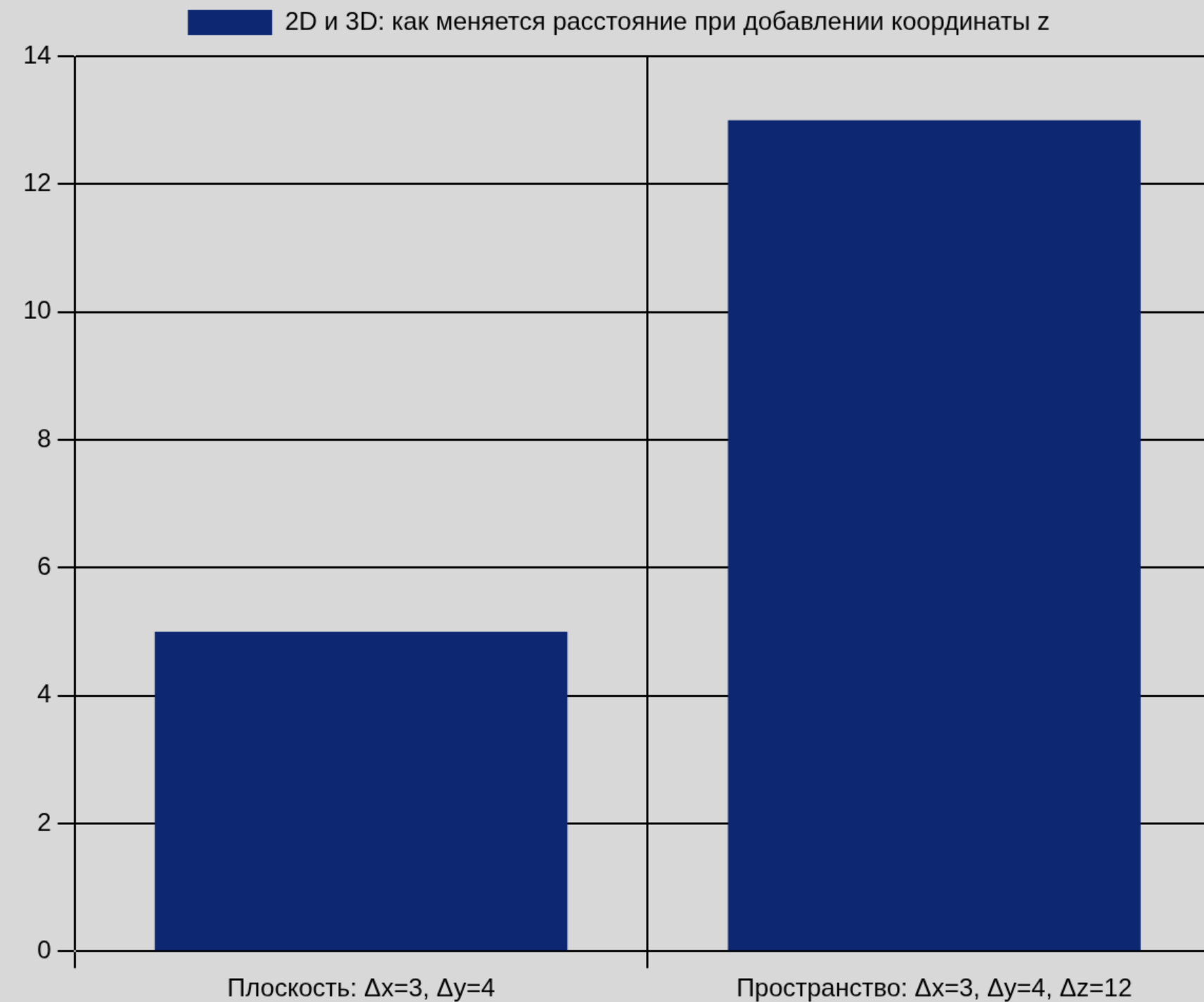
3

Расстояние применяют в стереометрии, когда нужно находить длины в кубах и параллелепипедах по координатам, а также анализировать положение объектов в пространстве.

Сравнение расстояний в 2D и 3D

Одинаковые Δx и Δy в плоскости дают расстояние 5, но добавление z -изменения в пространстве увеличивает длину до 13.

Третья координата включается в вычисления под корнем, поэтому расстояние неизбежно становится больше, чем в 2D при тех же горизонтально-вертикальных разностях.



Учебный пример: $(3,4) \rightarrow 5$ и $(3,4,12) \rightarrow 13$

Частные случаи, которые удобно проверять



Горизонтальные точки ($y_1 = y_2$)

Если y_1 равно y_2 , то точки лежат на одной горизонтали, а кратчайший путь — по прямой вдоль оси x . Тогда расстояние равно модулю разности x -координат.



Вертикальные точки ($x_1 = x_2$)

Если x_1 равно x_2 , то точки лежат на одной вертикали, и отрезок соединяет их по оси y . В этом случае расстояние равно модулю разности y -координат.



Совпадение точек и симметрия

Если совпадают обе координаты, расстояние равно нулю: кратчайший отрезок вырождается. Также всегда верно $AB = BA$, поэтому порядок точек не должен влиять на результат вычислений.

Типичные ошибки при вычислении расстояния

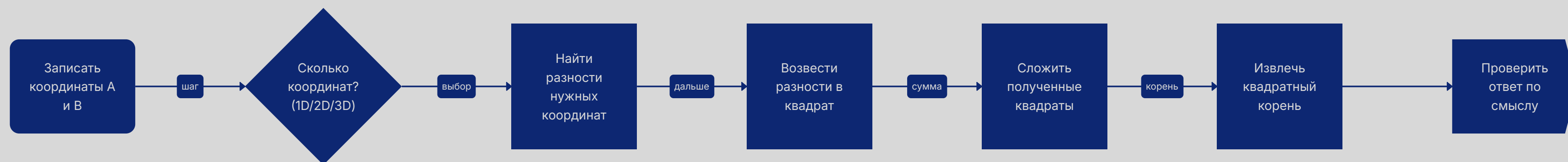
Ошибка	Пример	Правильный результат
Забыть модуль	$A(-3), B(5) \rightarrow -8$	$AB = 8$
Перепутать координаты	$(x_2 - y_1)$ вместо $(x_2 - x_1)$	Считают Δx и Δy правильно
Не возвести в квадрат	$(\Delta x + \Delta y)$ вместо $\Delta x^2 + \Delta y^2$	Суммируют квадраты разностей
Забыть корень	$\sqrt{}$ убран: AB^2 вместо AB	Извлекают квадратный корень

Небольшие сбои в порядке действий или в учёте знаков координат легко приводят к неверному числу. Ниже — самые частые ошибки и то, как они проявляются в расчётах расстояния.

Если при проверке ответ выходит отрицательным или «слишком маленьким», почти наверняка нарушены шаги: модуль на прямой, квадраты разностей, затем корень.

Алгоритм решения задач на расстояние

Порядок вычислений один и тот же; меняется лишь число разностей в зависимости от размерности.



Расстояние между точками в реальной жизни



Маршрут «по прямой» на карте

На карте мы отмечаем две точки координатами и оцениваем кратчайший отрезок как «геометрическое расстояние». В реальности дороги могут идти иначе, поэтому маршрут по навигатору часто длиннее. Но сравнивать близость мест это помогает быстро.

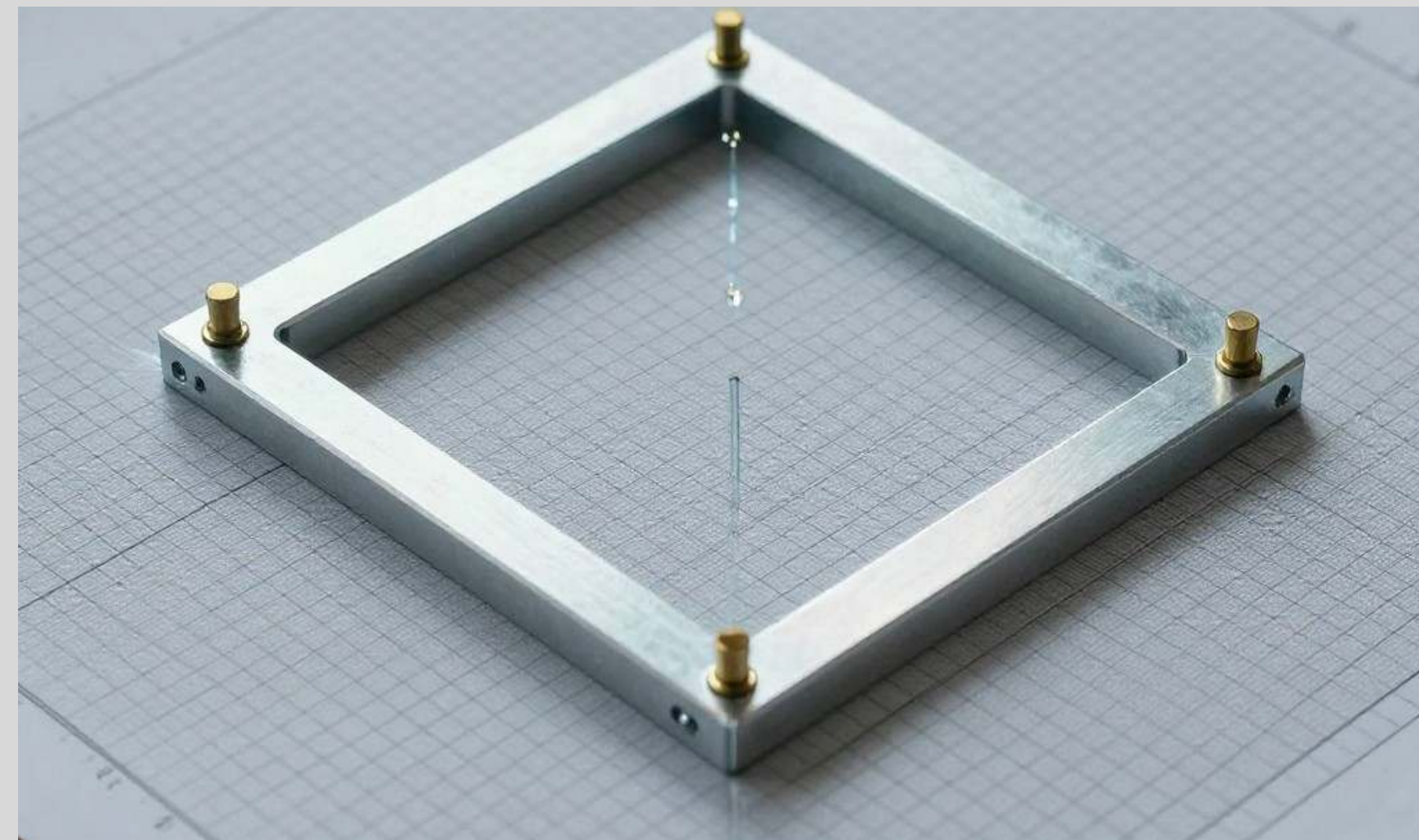


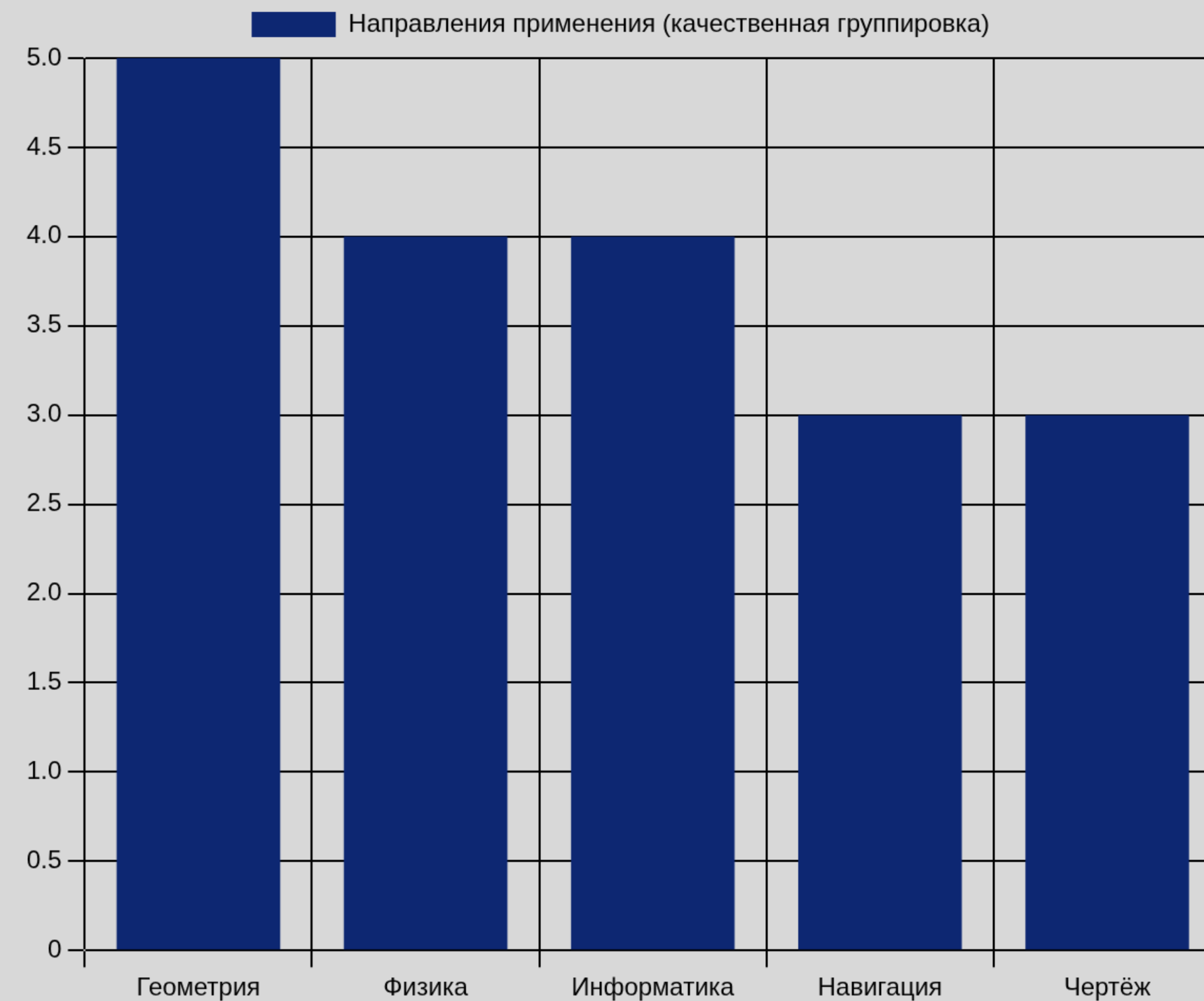
Рисунок и расчёт в проектировании

В черчении и строительстве координатная сетка связывает рисунок с измерениями. По известным координатам вершин можно вычислить длины деталей и диагонали элементов без линейки. Это полезно и при подготовке эскизов, и при проверке размеров в модели.

Где применяется расстояние между точками

В каждом направлении расстояние служит критерием «сколько» между объектами на координатной плоскости или в пространстве.

Чаще всего формула используется для измерения и анализа взаимного расположения: длины, диагонали, отклонения и траектории. Чем больше размерность, тем сильнее влияет добавление новой координаты.



Качественная группировка тем школьного курса и смежных дисциплин, без статистических данных.

В уравнении окружности присутствует R^2 , потому что при выводе используют формулу расстояния: длина до центра равна радиусу, а знак устраняется возведением в квадрат.

R^2

Поэтому уравнение окружности записывают через сумму квадратов разностей координат и радиус.

Мини-практикум: вычисления по формуле

Найдите расстояние между точками на плоскости по формуле $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ и сверяйтесь с ответами. Во всех примерах важны квадраты разностей и извлечение корня.

Во всех случаях результат одинаков при любых знаках координат, потому что в формуле стоят квадраты разностей; модуль фактически «встроен» в вычисление.

Точки	$\Delta x, \Delta y$	AB
A(2,-1), B(-1,3)	$\Delta x = -3; \Delta y = 4$	5
C(0,0), D(6,8)	$\Delta x = 6; \Delta y = 8$	10
E(-4,5), F(-4,-2)	$\Delta x = 0; \Delta y = -7$	7
G(1,1), H(4,5)	$\Delta x = 3; \Delta y = 4$	5

Что важно запомнить о расстоянии между точками

1 Расстояние не зависит от порядка точек: $AB = BA$. Это означает, что при подстановке координат не нужно «угадывать», кто из точек A , а кто B — разности будут однозначно учтены в формуле.

2 На числовой прямой работает модуль разности координат: он превращает возможное отрицательное значение в длину отрезка. Поэтому результат всегда неотрицателен и совпадает с геометрическим смыслом.

3 На плоскости и в пространстве применяется формула, основанная на теореме Пифагора: складываются квадраты разностей по осям и извлекается квадратный корень. Отрицательные координаты автоматически «исчезают» после возведения в квадрат.

4 Главная идея темы — координаты позволяют вычислять длину кратчайшего отрезка без измерения линейкой. Освоив логику разностей и корня, вы уверенно решаете задачи на диагонали, радиусы и координаты вершин.

Единицы измерения и масштаб координатной сетки

Расстояние выражается в тех же единицах, что и координаты. Если координаты заданы в сантиметрах или метрах, то и найденная длина будет в этих единицах. Это связывает абстрактную запись и реальные измерения.



При изменении масштаба меняются численные значения координат, но сама геометрическая длина связи между точками сохраняется. Поэтому при решении важно понимать, что именно обозначает сетка: условные единицы или реальные меры.

Итоги темы: универсальная формула для координатной геометрии

Расстояние между точками — базовая величина в геометрии 10 класса. Для одной координаты нужен модуль, для двух и трёх — формула с теоремой Пифагора, объединяющая алгебру и практические измерения.