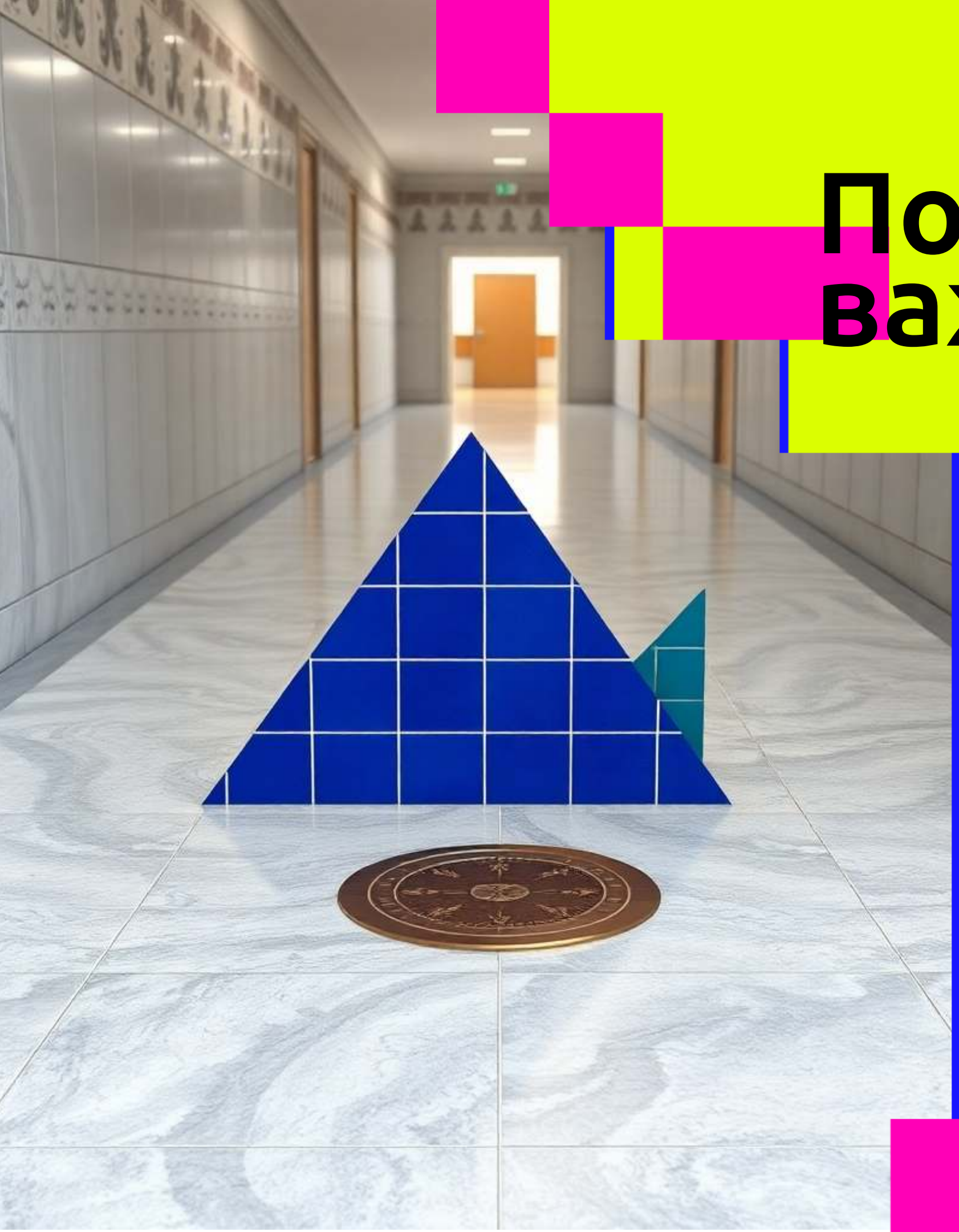


Гомотетия плоскости и масштаб: связь геометрии и алгебры

Фигура меняет размер, но сохраняет форму.



Почему гомотетия важна в 8 классе



Эта тема объединяет пропорции, координаты, подобные треугольники и масштаб. Она показывает, как из формул и чисел на плоскости получается наглядное преобразование фигур и расстояний.

Определение гомотетии

■ Центр преобразования

Точка O называется центром гомотетии. Именно относительно неё задаётся положение каждой точки образа, поэтому все построения начинаются с поиска и отметки этого центра.

■ Положение образа

Точка A переходит в точку A' , лежащую на прямой OA . Это означает, что образ не уходит в произвольное место, а связан с исходной точкой одним направлением.

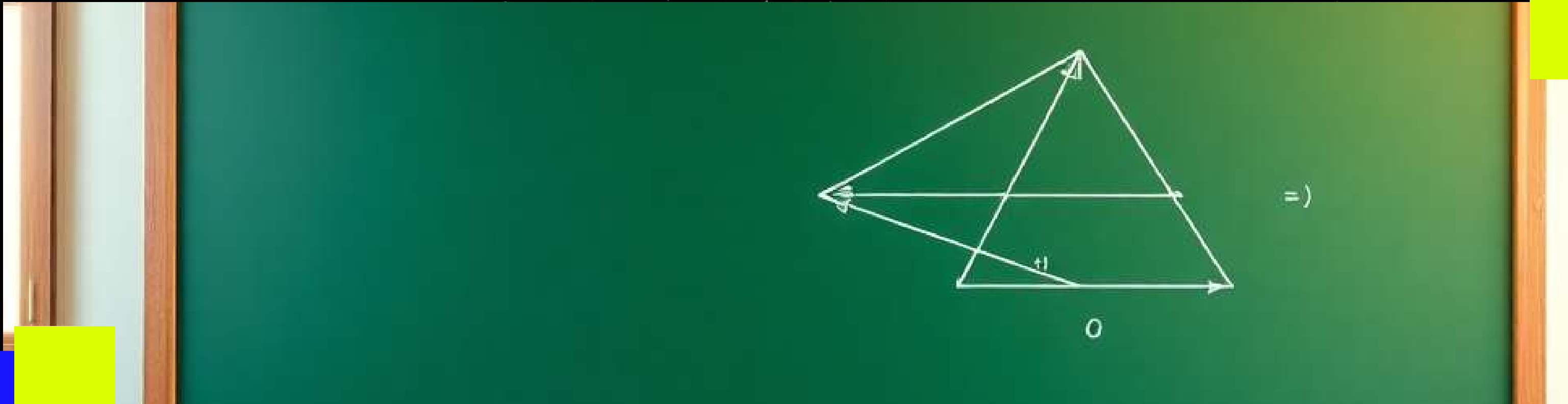
■ Длина и коэффициент

Расстояние OA' равно $|k| \cdot OA$, где k — коэффициент гомотетии. Модуль определяет, во сколько раз меняется размер, а знак задаёт направление переноса относительно центра.

■ Знак коэффициента

При $k > 0$ точка образа находится на том же луче, что и исходная. При $k < 0$ она оказывается по другую сторону от центра, как бы отражаясь через него.

Как выглядит гомотетия на рисунке



Найти центр

Сначала отмечают центр O и исходную фигуру. Затем рассматривают каждую вершину отдельно, чтобы понять, куда она перейдёт после преобразования и как изменится весь контур.

1

Провести лучи

Через центр и каждую вершину проводят прямые. Так становится видно, что соответствующие точки исходной фигуры и её образа всегда лежат на одной линии с центром.

2

Выбрать коэффициент

При $k=2$ все расстояния от центра удваиваются, при $k=1$ фигура остаётся без изменений, а при $k=\frac{1}{2}$ расстояния уменьшаются вдвое.

3

Сравнить фигуры

На рисунке удобно сопоставлять исходную и полученную фигуру по размерам и расположению. Это помогает быстро увидеть, как один и тот же контур можно увеличить или уменьшить.

4

Что сохраняется и что изменяется при гомотетии

Сравнение показывает, какие свойства фигуры остаются прежними, а какие зависят от коэффициента преобразования.

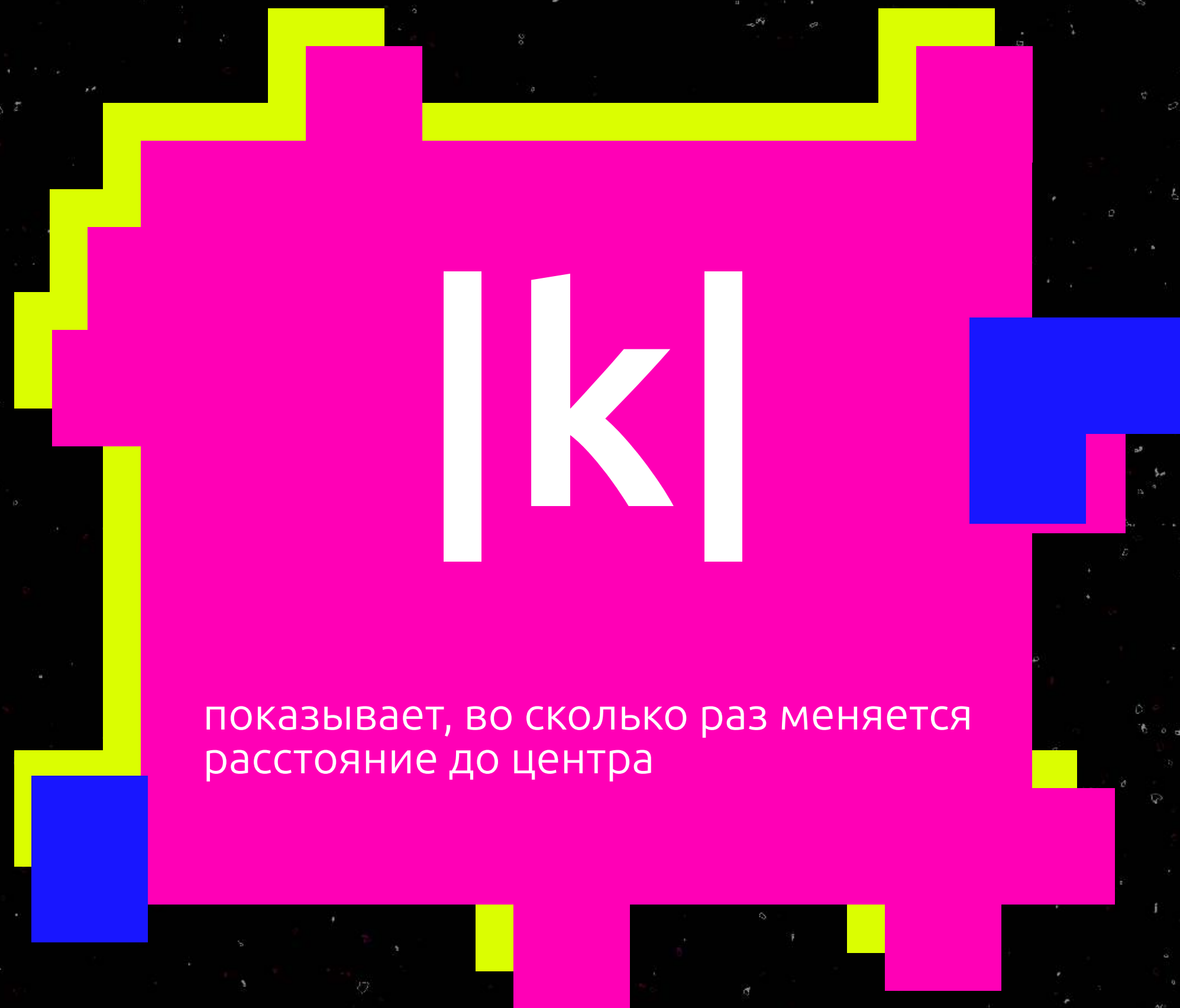
Гомотетия сохраняет форму, но меняет размеры. Линейные величины зависят от $|k|$, а площадь — от квадрата коэффициента, поэтому она изменяется заметно быстрее.

Свойство	Результат	Пример
Углы	сохраняются	равные углы
Длины	изменяются	умножаются на $ k $
Площадь	изменяется	умножается на k^2

Свойства гомотетии плоскости из школьного курса геометрии

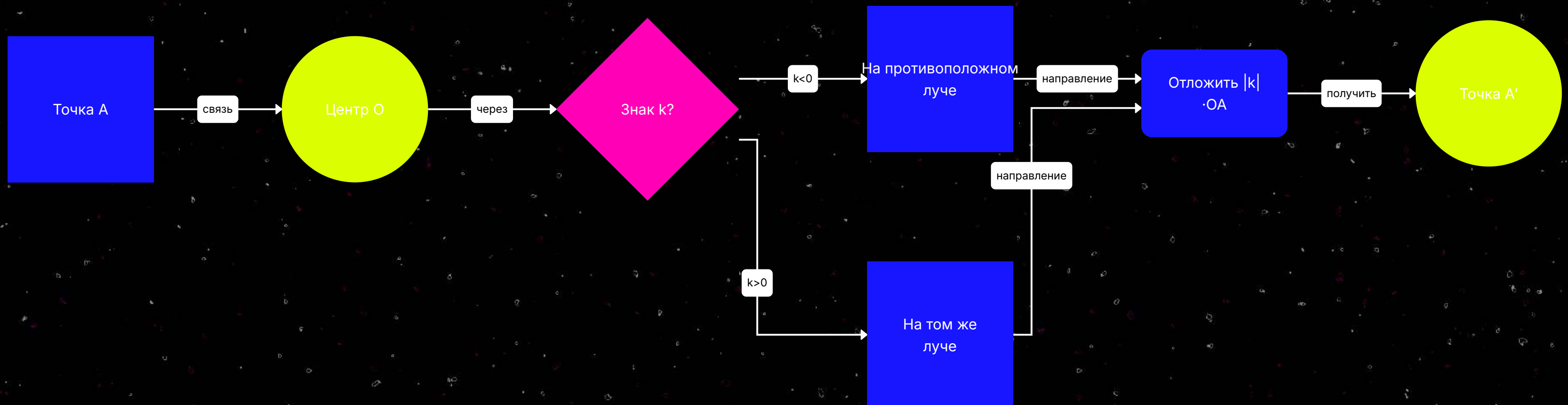
Модуль коэффициента определяет масштаб изменения фигуры: он отвечает за увеличение или уменьшение расстояний, а знак — за сторону, на которой окажется образ.

Определение коэффициента гомотетии в школьной геометрии

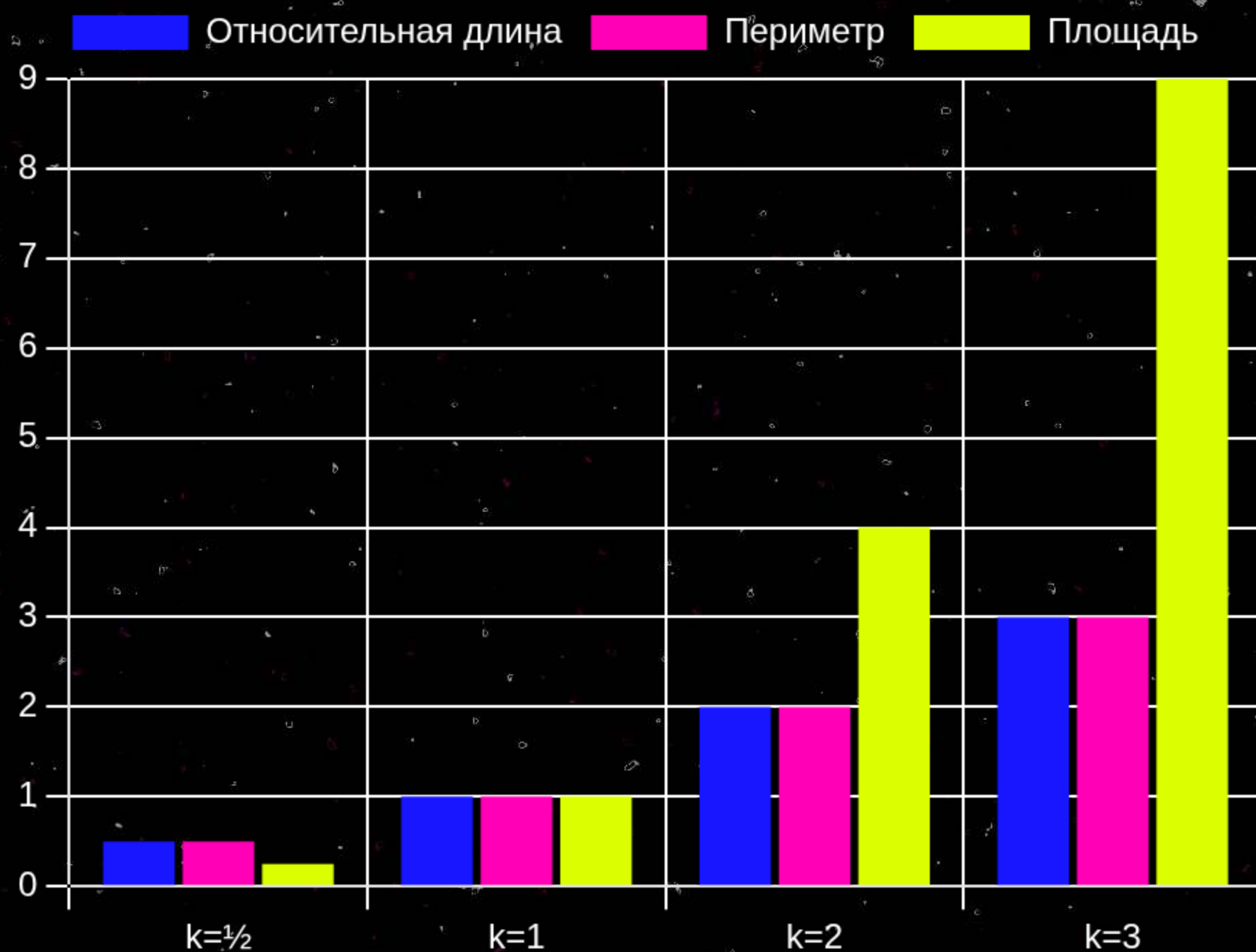


Построение образа точки при гомотетии

Алгоритм построения точки-образа по центру O и коэффициенту k



Как меняются размеры при разных коэффициентах



Линейные величины ведут себя одинаково, а площадь реагирует сильнее, потому что зависит сразу от двух измерений фигуры.

Чем больше коэффициент, тем быстрее растёт площадь по сравнению с длиной и периметром.

Правила изменения линейных величин и площади при гомотетии

Гомотетия и подобие фигур

Одинаковая форма

После гомотетии фигура становится подобной исходной. Это означает, что её общий вид сохраняется, хотя размеры могут заметно увеличиться или уменьшиться.

Равные углы и пропорции

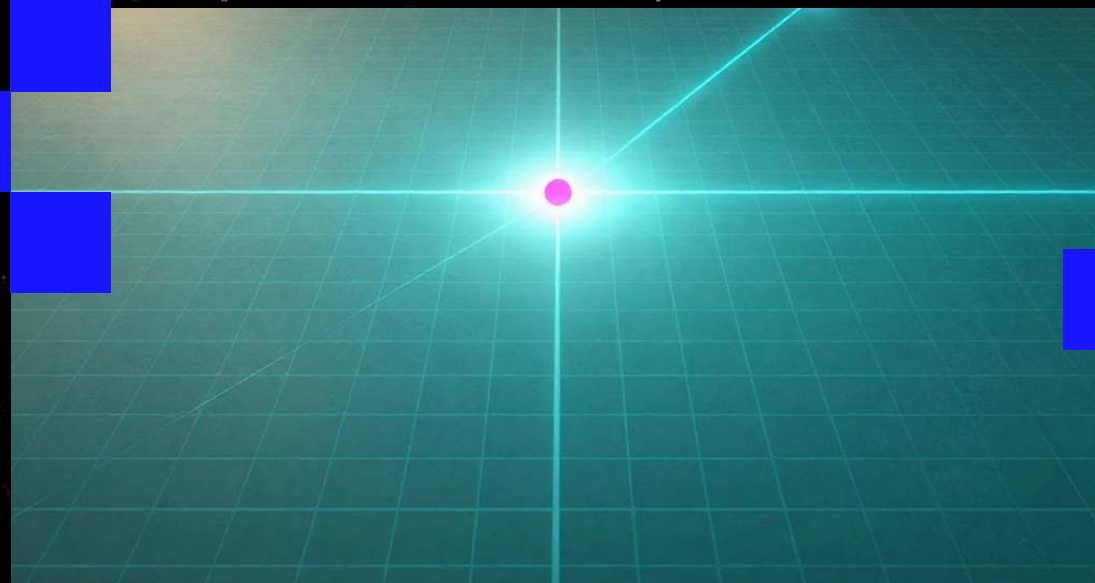
Соответствующие углы у подобных фигур равны, а стороны пропорциональны. Поэтому можно сравнивать не только сам рисунок, но и отношения длин его элементов.

Обратная связь

Если две фигуры подобны, одну из них можно получить из другой с помощью гомотетии. Это особенно удобно при работе с треугольниками и многоугольниками.

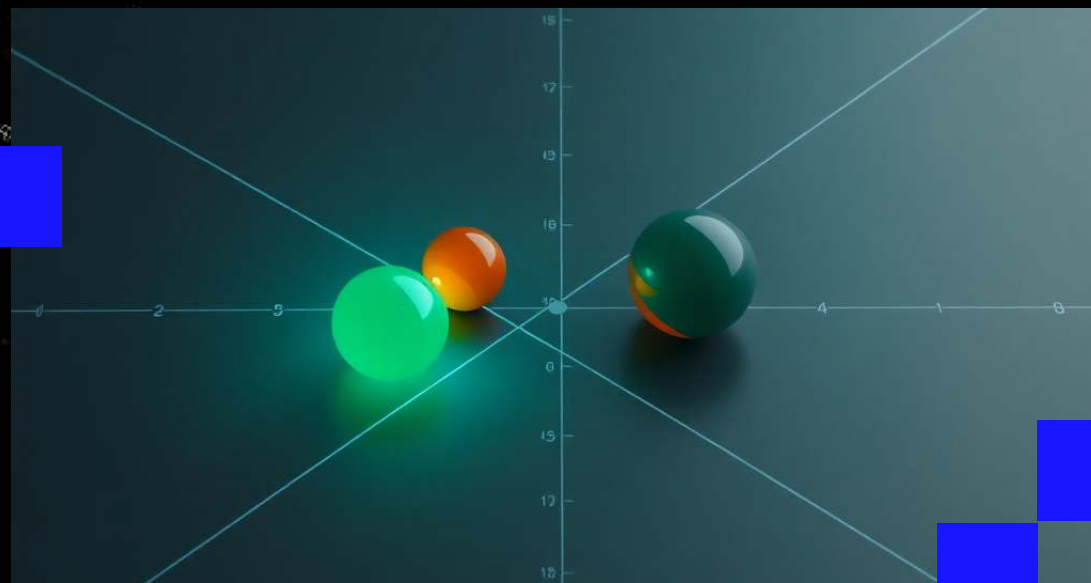


Гомотетия в координатной плоскости



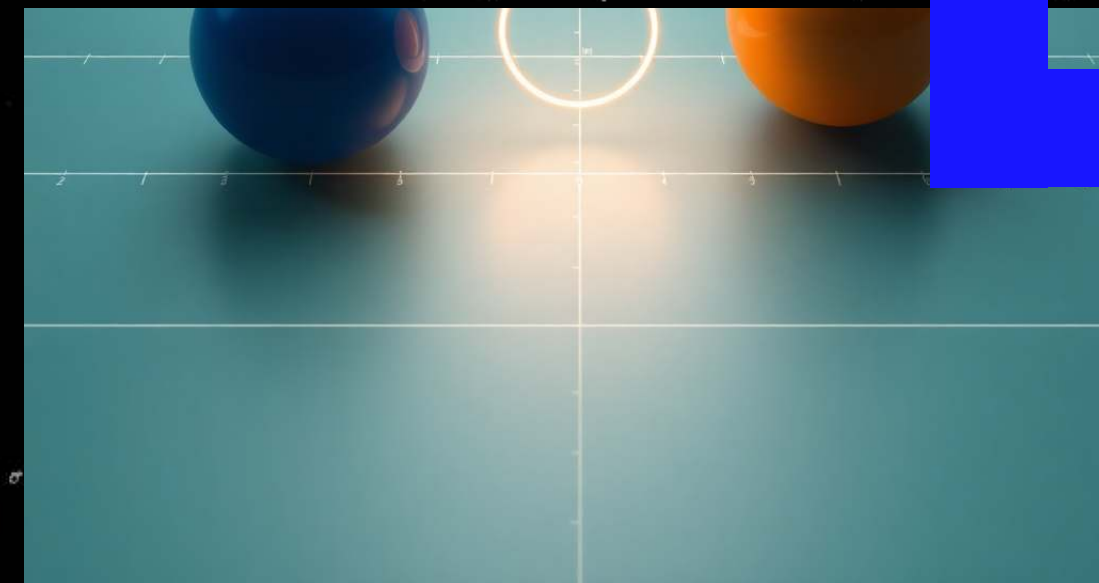
Когда центр совпадает с началом координат

Если центр гомотетии находится в начале координат, каждая координата точки умножается на коэффициент. Правило выглядит очень просто: $(x, y) \rightarrow (kx, ky)$. На координатной сетке сразу видно, как точка удаляется от начала или приближается к нему, сохраняя направление луча.



Увеличение и уменьшение на примере

Точка $A(2; 1)$ при $k=2$ переходит в $A'(4; 2)$, потому что обе координаты удваиваются. Если взять $k=\frac{1}{2}$, получится $A'(1; 0,5)$: точка окажется ближе к началу координат, но останется на той же прямой.



Отрицательный коэффициент на плоскости

При $k=-1$ точка переходит в противоположную относительно начала координат: меняются знаки обеих координат. Это удобно видеть на нескольких точках сразу, потому что рисунок на плоскости как бы разворачивается через центр и сохраняет пропорции.

Примеры координатных образов точек

Точка	$k=2$	$k=-1$
$A(1; 2)$	$A'(2; 4)$	$A'(-1; -2)$
$B(-3; 1)$	$B'(-6; 2)$	$B'(3; -1)$
$C(4; -2)$	$C'(8; -4)$	$C'(-4; 2)$

Для центра в начале координат координаты точек меняются по правилу умножения на коэффициент гомотетии. В таблице показаны случаи $k=2$ и $k=-1$.

При $k=2$ все координаты удваиваются, а при $k=-1$ меняются знаки обеих координат. Отрицательный коэффициент одновременно меняет размер и направление образа.

По правилу гомотетии с центром в начале координат: $(x, y) \rightarrow (kx, ky)$.

Гомотетия с отрицательным коэффициентом



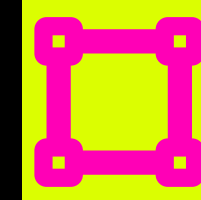
Образ по другую сторону

При отрицательном коэффициенте точка-образ оказывается на той же прямой, но по другую сторону от центра. Расстояние при этом умножается на модуль k .



Поворот без поворота

Фигура не вращается в обычном смысле, но визуально «переворачивается» относительно центра. Сохраняются углы и пропорции, меняется только расположение.

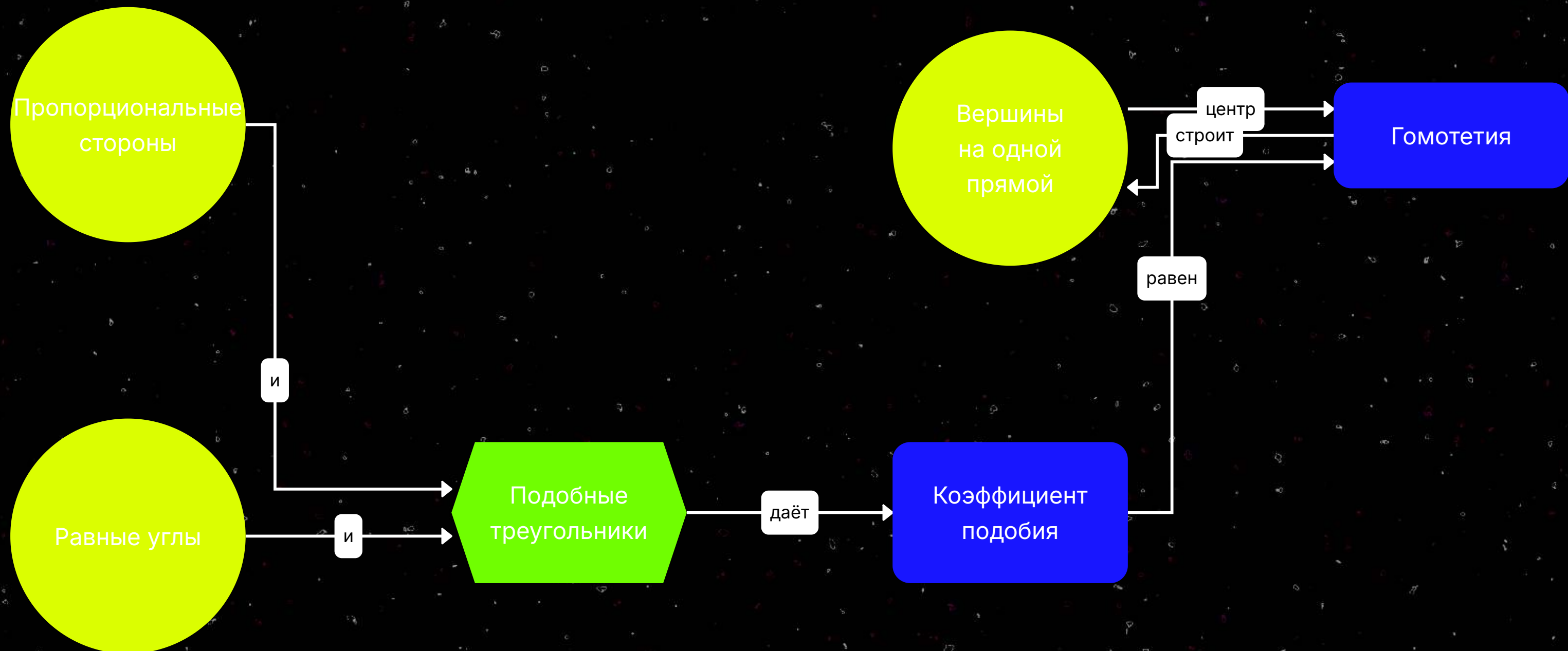


Координатный признак

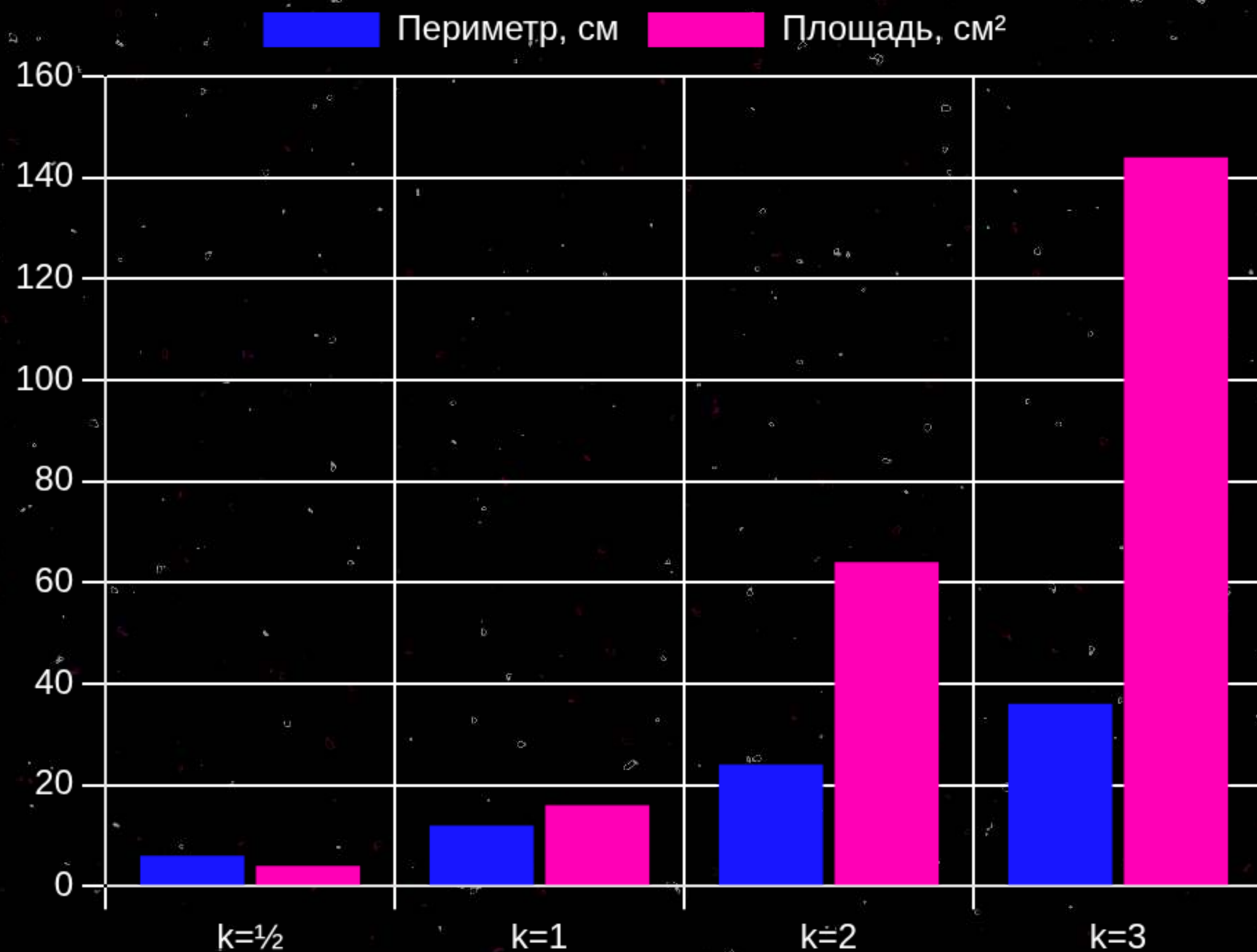
В координатах случай $k=-1$ особенно заметен: каждая координата меняет знак. При других отрицательных значениях сохраняется тот же принцип, но длина меняется по модулю коэффициента.

От подобия треугольников к гомотетии

Схема показывает, как равенство углов и пропорциональность сторон приводят к гомотетии.



Изменение периметра и площади при разных k



На графике сравниваются линейный и квадратичный законы изменения. Даже при небольшом увеличении коэффициента площадь растёт заметно быстрее периметра.

Периметр зависит от $|k|$, а площадь — от k^2 . Поэтому при увеличении фигуры разница между этими величинами быстро возрастает.

Учебное правило гомотетии: периметр меняется в $|k|$ раз, площадь — в k^2 раз.

Где встречается гомотетия в жизни

■ Карты и планы

На картах одна и та же территория изображается в уменьшенном виде. Масштаб показывает, во сколько раз расстояния на чертеже отличаются от реальных, как при гомотетии.

■ Архитектурные макеты

Макеты зданий помогают заранее увидеть форму и пропорции будущего объекта. Если изменить масштаб, сохраняется общий вид, но все размеры становятся меньше или больше.

■ Чертежи и схемы

В технических чертежах детали изображают с точными пропорциями. Это удобно, когда нужно показать объект крупнее или компактнее, не нарушая его формы и соотношений.

■ Фото и экран

При печати фотографий и увеличении изображения на экране форма сохраняется, а размер меняется. Именно поэтому одинаковый снимок можно увидеть в разных форматах.



Алгоритм решения задач на гомотетию

Найти центр и k

Сначала определите центр гомотетии и коэффициент преобразования. От них зависит, где окажется образ точки и насколько изменится расстояние до центра.

Выбрать направление

Затем выясните знак коэффициента. При $k > 0$ образ лежит на том же луче, а при $k < 0$ — на противоположной стороне от центра.

Проверить соотношения

После построения сравните соответствующие отрезки, углы и параллельные стороны. Это помогает убедиться, что фигура действительно получена гомотетией.

Использовать координаты

Если центр совпадает с началом координат, применяйте формулу $(x, y) \rightarrow (kx, ky)$. Так задача решается быстро и без лишних построений.

1

2

3

4

Сравнение исходной фигуры и её образа

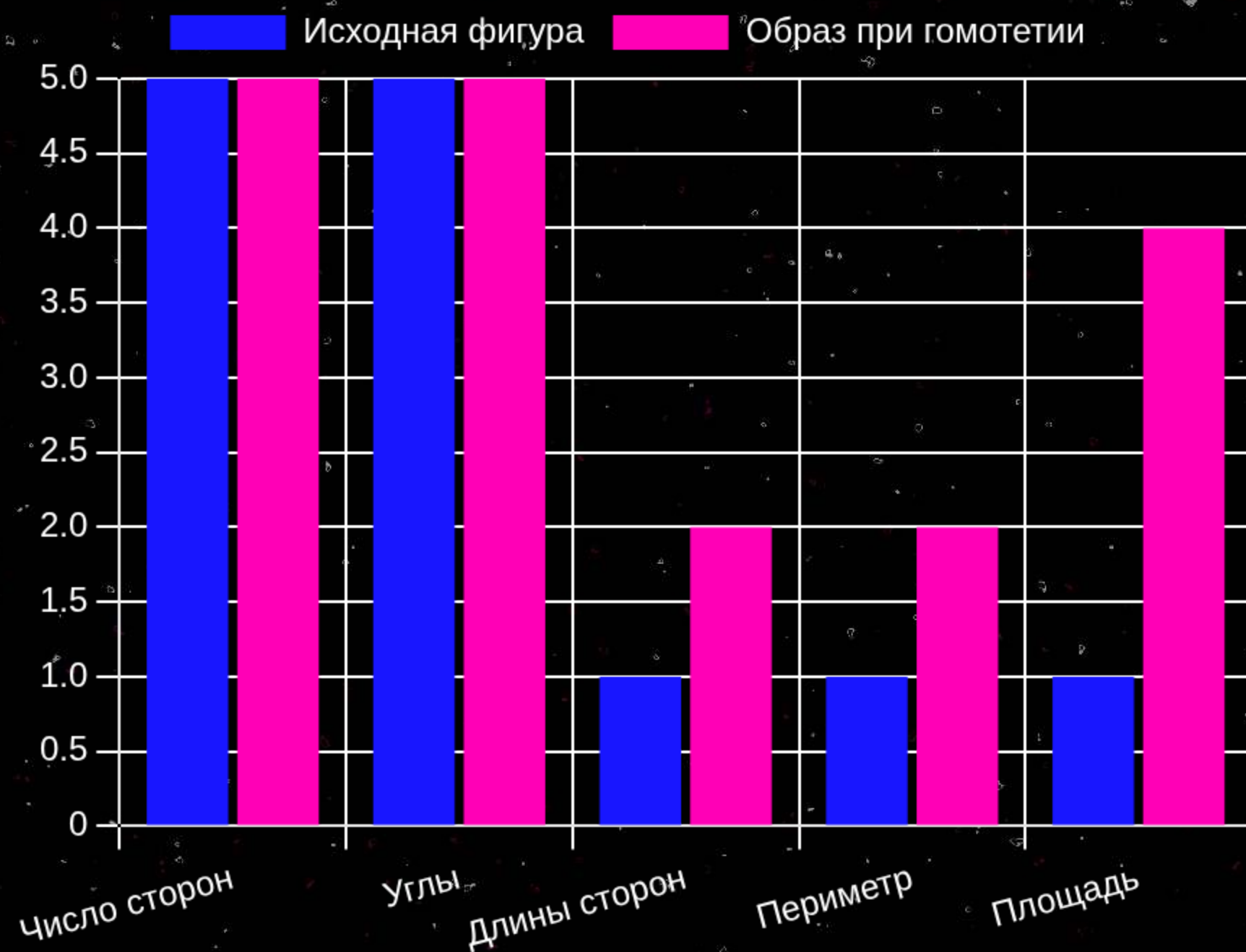


Диаграмма показывает не сами размеры, а характер их изменения. Для образа условно взят коэффициент $k=2$, чтобы хорошо увидеть разницу между линейными и квадратными изменениями.

Структура фигуры сохраняется, а изменяются только размеры. Углы и число сторон остаются прежними, тогда как длины, периметр и площадь растут по разным законам.

Свойства гомотетии: сохранение формы, масштабирование длин и площадей.

Типичные ошибки при изучении темы

Путают k и длину

Коэффициент гомотетии — это не сама длина отрезка, а число, показывающее, во сколько раз меняются расстояния от центра до точек фигуры.

Забывают знак

При отрицательном k образ не просто увеличивается или уменьшается, а переходит на другую сторону от центра. Из-за этого легко ошибиться в построении.

Неверно считают площадь

Площадь не меняется в k раз. Правильное правило — k^2 , поэтому при увеличении фигуры площадь растёт намного быстрее, чем длины сторон.

Путают с переносом

Гомотетия отличается от обычного переноса тем, что положение всех точек связано с центром. Именно он задаёт направление и расстояние до образа.

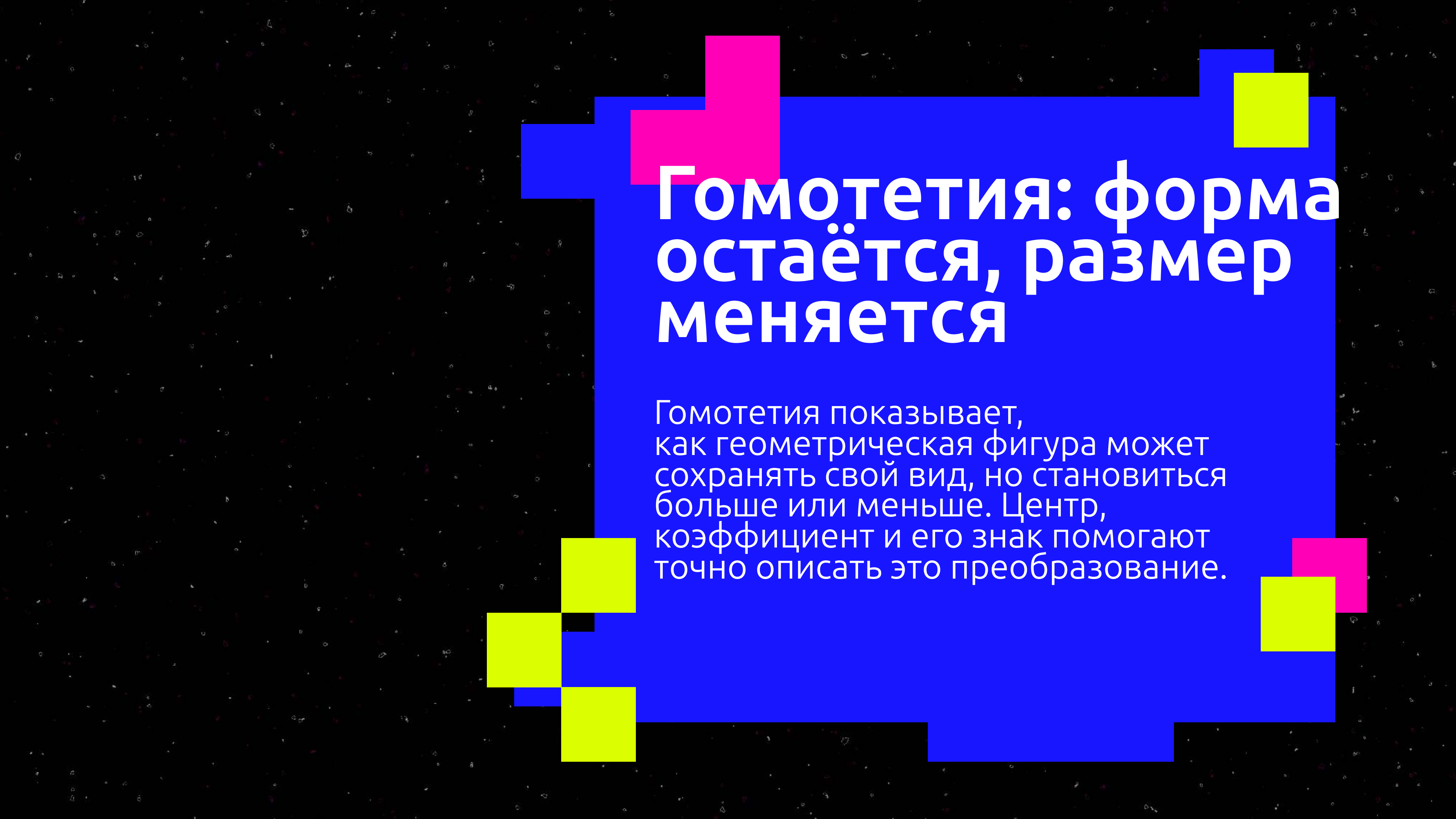
Краткая памятка по свойствам гомотетии

Соберите основные признаки преобразования в одной таблице: центр, коэффициент, направление, сохранение углов и формулы для длин, периметра и площади.

Главное правило: форма сохраняется, а размеры меняются по коэффициенту. Для квадрата со стороной 2 см при $k=3$ получаем сторону 6 см, периметр 24 см, площадь 36 см^2 .

Свойство	Правило	Пример
Центр	O	задан
Коэффициент	k	$k=3$
Площадь	k^2	36 см^2

Свойства гомотетии и пример: квадрат 2 см при $k=3$.



Гомотетия: форма остаётся, размер меняется

Гомотетия показывает, как геометрическая фигура может сохранять свой вид, но становиться больше или меньше. Центр, коэффициент и его знак помогают точно описать это преобразование.