

Периодические и непериодичес кие бесконечные десятичные дроби



Разбираемся, как устроены
бесконечные записи чисел.



Почему бесконечные дроби важны в алгебре



Десятичная запись помогает считать, измерять и сравнивать числа. Одни дроби дают повтор, другие — нет. По этому признаку удобно различать рациональные и иррациональные числа.

Что такое бесконечная десятичная дробь



○ Нет последней цифры

Бесконечная десятичная дробь продолжается без конца, поэтому у неё не бывает последней цифры после запятой. Запись читают до многоточия, которое показывает незавершённость числа.

○ Может быть повтор

У некоторых дробей после запятой возникает одинаковый блок цифр, который повторяется снова и снова. Такой повтор делает запись периодической и легко узнаваемой.

○ Может быть без повтора

В других случаях цифры после запятой не образуют повторяющегося участка. Тогда запись остаётся бесконечной, но не становится периодической.

○ Связь с примерами

Примеры бесконечных записей: 0,333... 2,4545... 3,141592... Они помогают увидеть разницу между повторяющимися и неповторяющимися дробями.

○ Знак многоточия

Многоточие в конце записи означает, что число продолжается дальше. Его нельзя считать обычным знаком сокращения: оно показывает именно бесконечность десятичной дроби.



Сравнение периодических и непериодических дробей



Обобщение правил десятичной записи чисел из курса алгебры 8 класса.



Таблица показывает главный признак каждой записи и помогает сразу увидеть разницу между двумя видами бесконечных десятичных дробей.

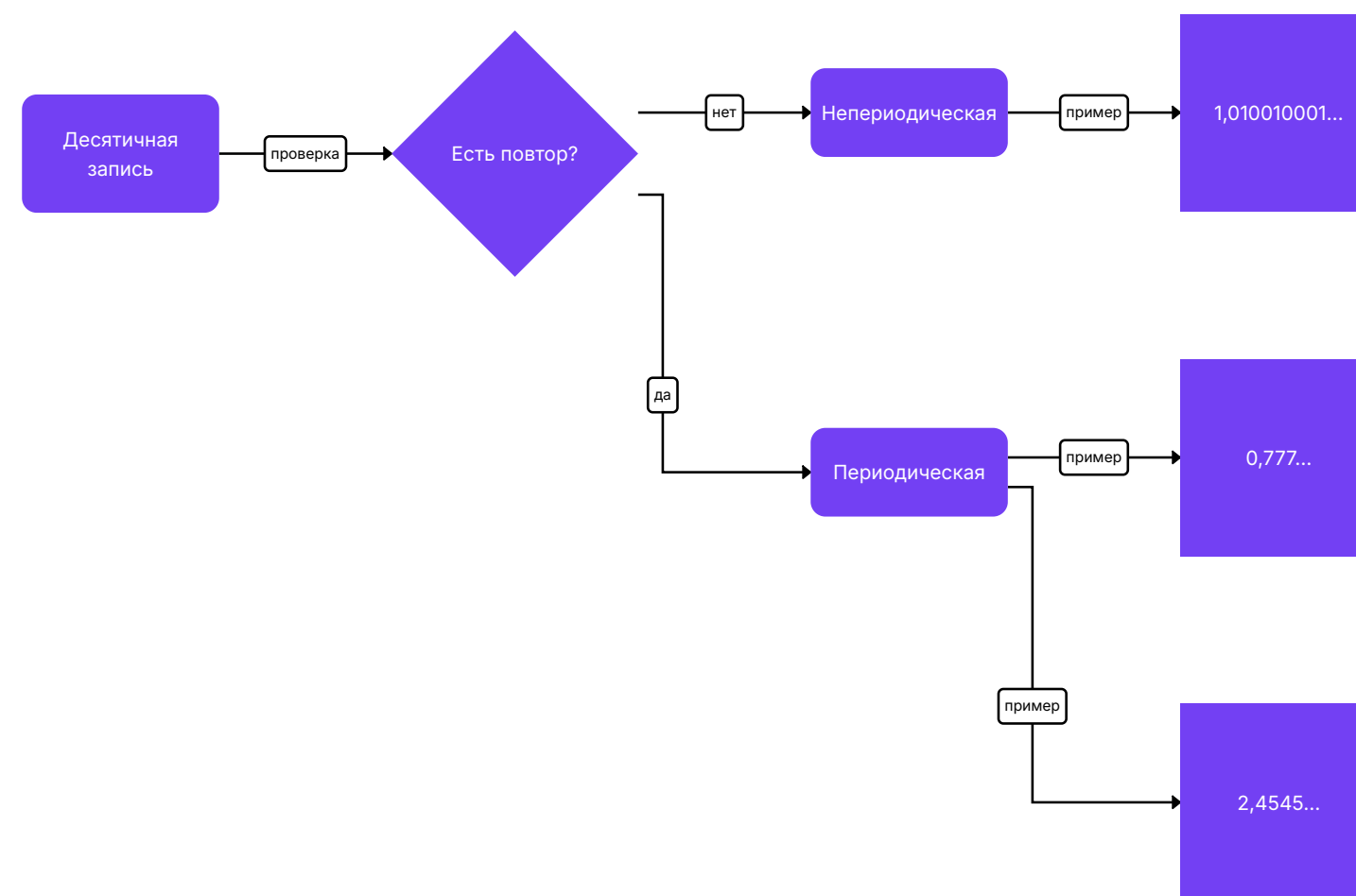
Признак	Периодическая	Непериодическая
Повтор	есть	нет
Примеры	0,1212...	3,14159...
Связь	рациональные	иррациональные

Если в записи есть повторяющийся блок, дробь периодическая; если повтора нет, запись непериодическая и обычно относится к иррациональным числам.



Как определить вид бесконечной десятичной дроби

Схема проверки по наличию повторяющегося блока цифр в записи числа.

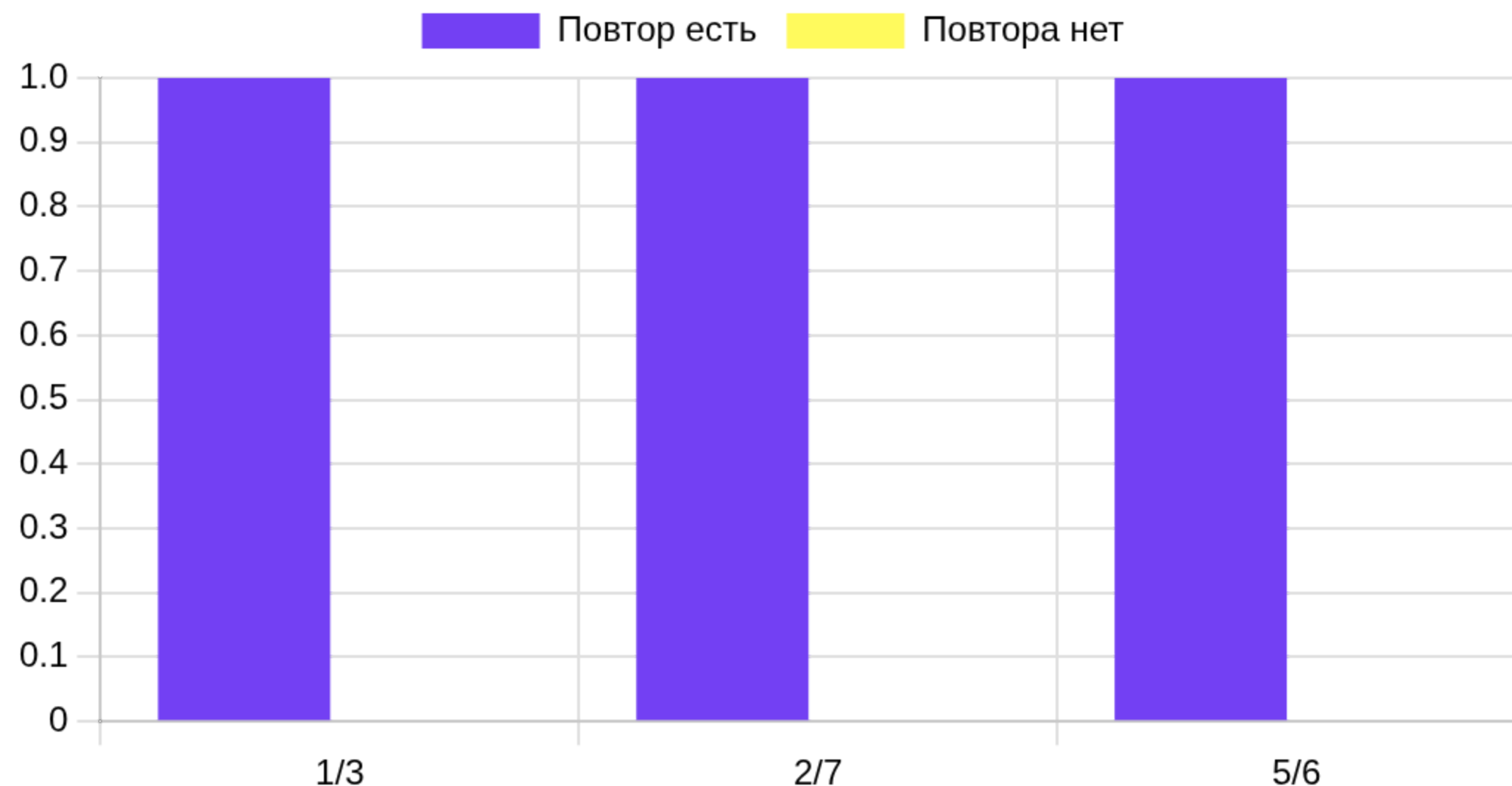


Примеры дробей с повтором и без повтора



У рациональных дробей повтор может быть очень коротким или длинным, а у иррациональных чисел он не появляется вовсе.

Школьные примеры: $1/3$, $2/7$, $5/6$, π , $\sqrt{2}$, e .



Наличие повторяющегося блока отличает рациональные записи от иррациональных; именно это видно на сравнении двух групп чисел.

Период и запись периодической дроби

01

Что такое период

Период — это часть десятичной записи, которая бесконечно повторяется. Он может состоять из одной цифры или из нескольких цифр подряд, если именно такой фрагмент возвращается снова.

02

Как его выделяют

Чтобы запись было удобнее читать, период обычно берут в скобки. Например, $0,41(6)$ означает, что после 41 бесконечно повторяется цифра 6, а $2,(13)$ — что повторяется блок 13.

03

Почему это важно

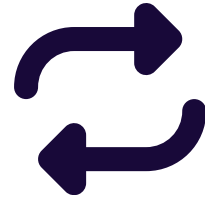
Запись в скобках помогает не перепутать повторяющийся участок с обычными цифрами числа. По ней сразу видно, какая часть продолжается бесконечно и где начинается повтор.

Рациональные числа и периодическая запись



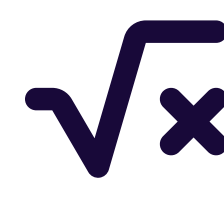
Любая дробь

Любую обыкновенную дробь можно записать в виде конечной или периодической десятичной дроби. Это удобный способ представления рациональных чисел в вычислениях.



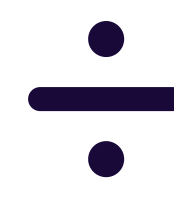
Повтор как признак

Если десятичная запись содержит повторяющийся блок, число можно выразить отношением двух целых чисел. Поэтому такие записи относят к рациональным.



Конечная запись тоже рациональна

Даже если дробь имеет конечную десятичную запись, она всё равно рациональна. Её можно представить через знаменатель 10, 100, 1000 и так далее.



Примеры записей

Например, $7/8 = 0,875$; $1/6 = 0,1(6)$; $5/11 = 0,(45)$. Эти записи показывают, что рациональные числа могут быть как конечными, так и периодическими.

Обыкновенные дроби и их десятичная запись

Примеры деления обыкновенных дробей на десятичные в курсе алгебры 8 класса.

Дробь	Запись	Вид
$\frac{1}{2}$	0,5	конечная
$\frac{1}{3}$	0, (3)	периодическая
$\frac{7}{12}$	0,58(3)	периодическая
$\frac{5}{8}$	0,625	конечная
$\frac{1}{7}$	0, (142857)	периодическая

В таблице видно, что результат деления определяет, будет ли запись конечной или периодической.

Одна и та же дробь при делении даёт определённый тип записи: либо конечную, либо периодическую. Это помогает заранее предсказать вид результата.

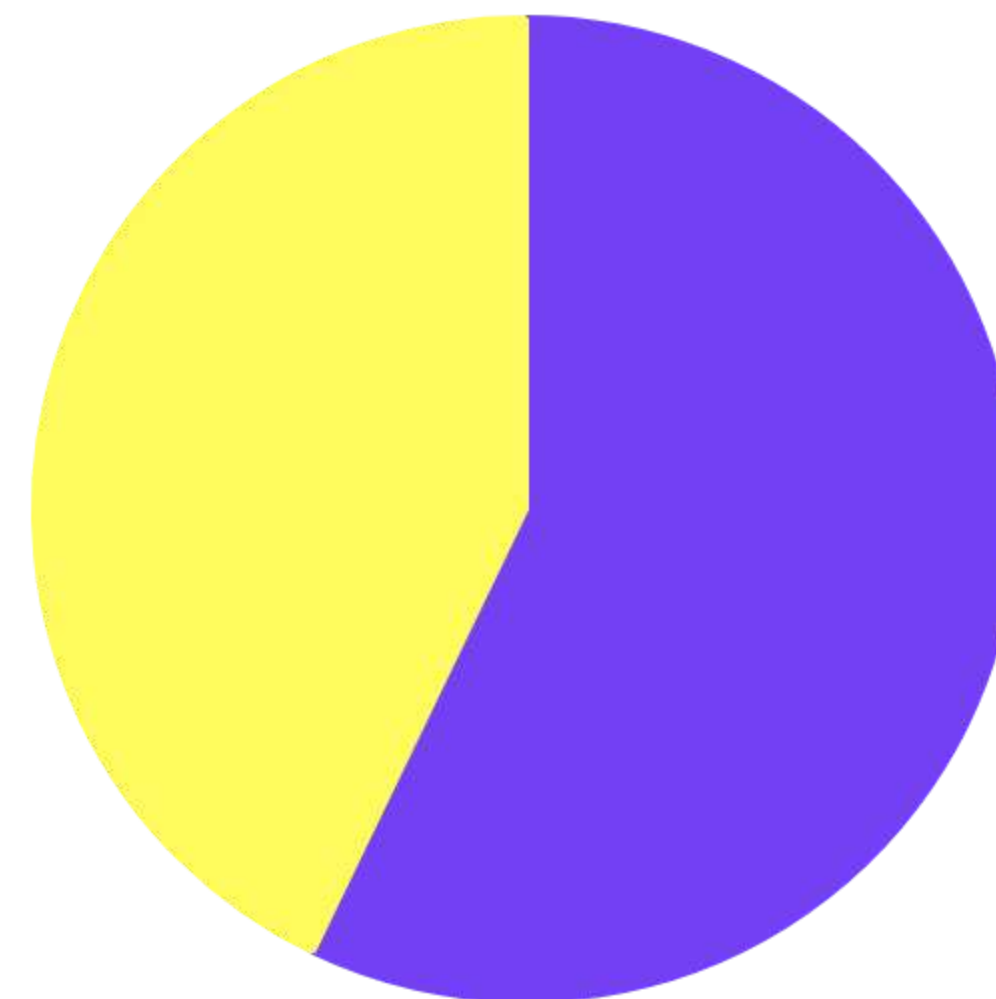
Рациональные и иррациональные числа в десятичной записи



Рациональные числа можно записать точно или с повтором, а иррациональные — только бесконечной непериодической записью.

Обобщение примеров: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{3}{8}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, π .

Рациональные Иррациональные



Период в десятичной записи указывает на рациональность числа; отсутствие периода — важный признак иррациональных чисел.

Непериодические дроби и иррациональные числа



□ Нет повторяющегося блока

Непериодическая десятичная дробь продолжается бесконечно, но в ней не возникает одинакового фрагмента, который повторялся бы снова и снова. Поэтому запись не можно завершить или свести к периоду.

□ Связь с иррациональными числами

Такие дроби соответствуют иррациональным числам. Их нельзя представить в виде отношения двух целых чисел, поэтому десятичная запись у них никогда не становится конечной и не переходит в повтор.

□ Известные примеры

К этой группе относятся π , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и e . В задачах они появляются как точные математические числа, но их десятичные записи всегда только приближённые, потому что полного повтора в них нет.

□ Как их узнать

Если в записи нельзя выделить период и число выглядит как бесконечная последовательность без шаблона, это признак непериодической дроби. В школьных задачах такие числа обычно задают с многоточием.



Где встречаются непериодические числа



Окружность и число π

Когда считают длину окружности или площадь круга, появляется число π . Оно связано с любыми круговыми объектами — от колеса до часов. На рисунке удобно показать окружность как главный источник этого числа.



Квадрат и корень из двух

Число $\sqrt{2}$ возникает, если найти диагональ квадрата со стороной 1. Это пример из геометрии, где наглядно видно, как простая фигура приводит к непериодической записи. Иллюстрация квадрата помогает связать формулу с чертежом.

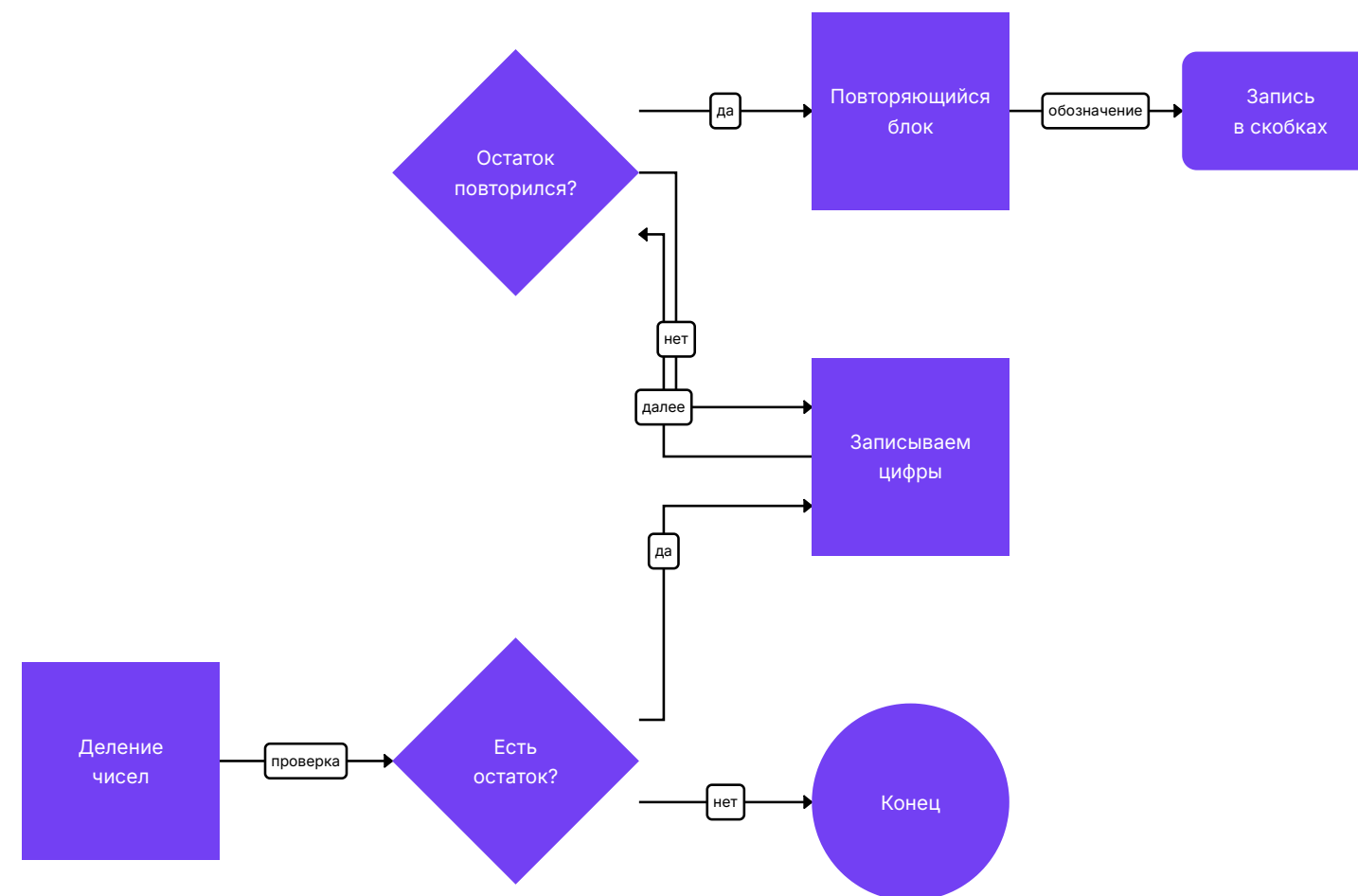


Рост и число e

Число e используют в задачах о росте, процентах и изменении величин. Оно часто встречается там, где процесс идёт непрерывно. На схеме можно добавить график роста, чтобы показать его прикладной смысл.

Как записывают периодическую дробь

Схема показывает, как при делении натуральных чисел появляется повторяющийся блок цифр



Какой вид десятичной записи получается при делении



Школьные примеры деления обыкновенных дробей на натуральные числа



Таблица показывает, как результат деления связан с видом десятичной записи и позволяет увидеть разницу между конечной и периодической формой.

Дробь	Десятичная запись	Вид
1/8	0,125	конечная
2/3	0, (6)	периодическая
4/11	0, (36)	периодическая
5/7	0, (714285)	периодическая
3/20	0,15	конечная

Вид записи зависит от знаменателя и от того, заканчивается ли деление без остатка или даёт повторяющийся цикл.



Почему у одних дробей есть период, а у других нет



После сокращения

Сначала дробь нужно сократить. Только тогда видно, какие простые множители входят в знаменатель и можно ли получить конечную десятичную запись.

Только 2 и 5

Если знаменатель состоит лишь из множителей 2 и 5, запись заканчивается. Так работают, например, $1/8$ и $3/20$.

Есть другие множители

Если в знаменателе остаются 3, 7, 11 и другие простые числа, возникает период. Поэтому $1/3$, $1/6$ и $5/11$ записываются как периодические дроби.



Длина периода у разных дробей



Длины периодов у дробей могут сильно различаться, даже если сами дроби кажутся простыми и одинаково «удобными» для вычислений.

Примеры периодов для обыкновенных дробей из школьного курса



Короткий или длинный период не зависит от внешней сложности дроби; важен только повтор в записи после деления.

Типичные ошибки при чтении бесконечных дробей



○ Считать 0,999... меньше 1

Запись 0,999... не означает число чуть меньше единицы: она равна 1,0. Это важно помнить, когда сравнивают бесконечные десятичные дроби на числовой прямой.

○ Обрезать запись раньше времени

Если бесконечную дробь остановить слишком рано, получится только приближённое значение. Для точного ответа нужно учитывать всю запись, особенно когда в ней есть период или многоточие.

○ Путать период и случайный повтор

Не каждый повтор цифр означает периодическую дробь. Настоящий период должен бесконечно повторяться по одному и тому же правилу, а не встречаться случайно несколько раз подряд.



Определяем вид записи по примеру

Примеры для распознавания вида десятичной записи

Запись	Признак	Вид
4,27	запись заканчивается	конечная
0,444...	1 цифра повторяется	периодическая
2,1010010001...	повтора нет	непериодическая
5, (18)	повторяется блок 18	периодическая
$\sqrt{7}$	бесконечная запись	непериодическая

Таблица помогает быстро определить вид числа по его записи: заканчивается ли она, имеет ли период или продолжается без повторяющегося блока.

Главный признак — наличие или отсутствие повторяющегося блока после запятой; по нему легко отличить периодическую запись от непериодической.

Зачем нужна эта тема в алгебре

Перевод дробей

Периодические дроби помогают переводить обыкновенные дроби в десятичную запись и обратно. Это удобно при вычислениях и проверке ответов, когда нужно перейти от одной формы числа к другой.

Понимание чисел

Непериодические дроби показывают, что не каждое число можно точно записать в виде обыкновенной дроби. Так легче различать рациональные и иррациональные числа в школьных задачах.

Работа с приближениями

В геометрии, физике и измерениях часто используют приближённые значения. Знание видов десятичных дробей помогает понимать, где ответ точный, а где он записан только приблизительно.

Проверка решений

Если ученик умеет распознавать период и отсутствие повтора, ему проще проверить вычисления и заметить ошибку в записи числа, формуле или результате деления.



Что важно запомнить

Периодическая десятичная дробь имеет повторяющийся блок и связана с рациональными числами, а непериодическая не имеет повтора и относится к иррациональным. Это основа темы в 8 классе.

