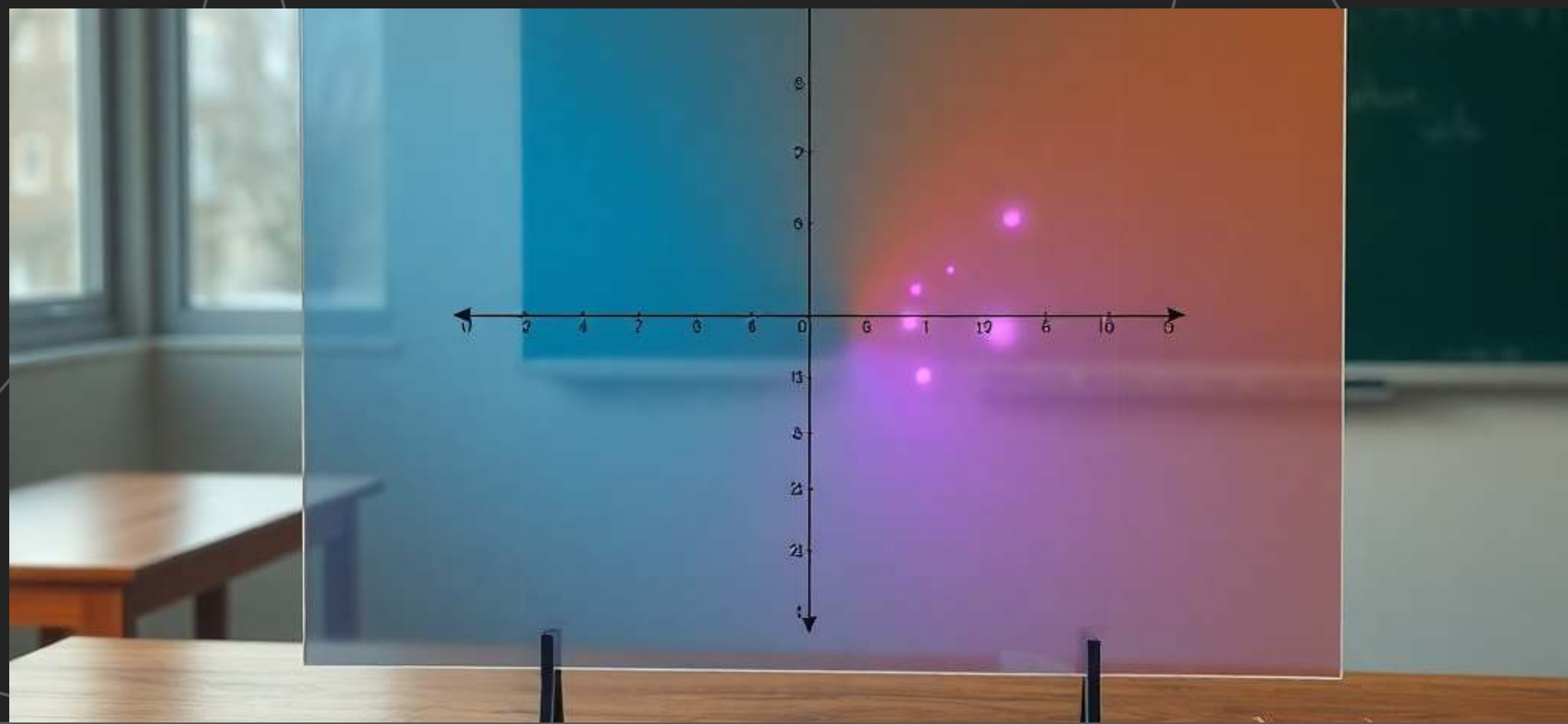


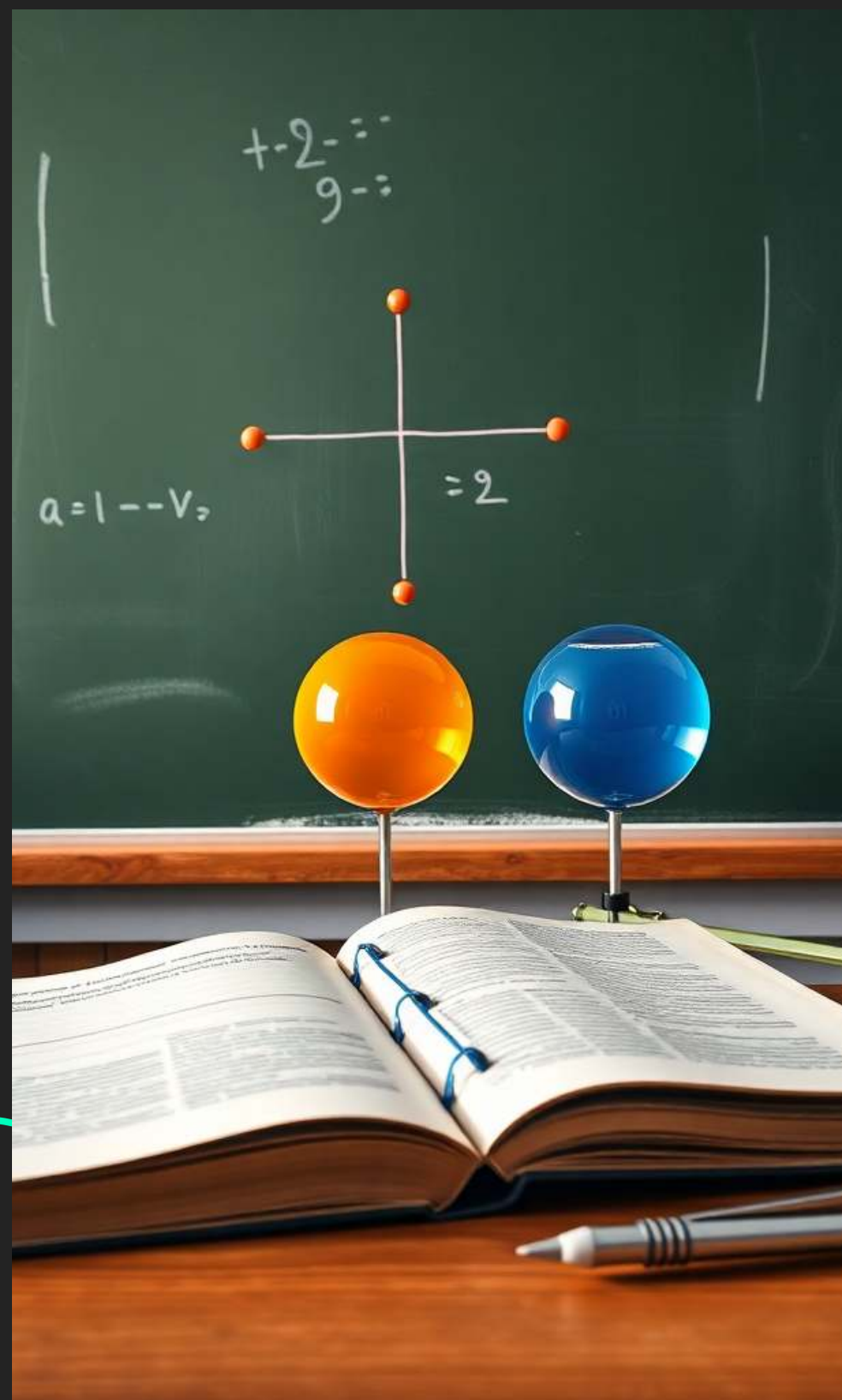


От формул к графикам: учимся
видеть решения на плоскости.



Уравнения и неравенства с двумя переменными

Почему эта тема важна в 11 классе



Эта тема связывает алгебру с графиками: нужно не только находить пару чисел как решение, но и понимать её геометрический смысл, опираясь на функции, системы и свойства координатной плоскости.

Определение уравнения с двумя переменными

01. **Две неизвестные**

Уравнение с двумя переменными содержит, как правило, x и y и знак равенства. Оно описывает не одно число, а связь между двумя величинами, которую нужно проверить подстановкой.

02. **Что считается решением**

Решением называют упорядоченную пару чисел $(x; y)$, при которой после подстановки в уравнение получается верное равенство. Одна и та же формула может иметь много таких пар.

03. **Множество решений**

Все решения одного уравнения образуют множество, которое на плоскости часто выглядит как прямая, кривая или отдельная фигура. Поэтому алгебраическая запись сразу получает геометрическую интерпретацию.

Координатная плоскость как язык решений

Точка по паре чисел

Каждая пара $(x; y)$ однозначно задаёт точку на координатной плоскости. Благодаря этому любое решение можно не только записать, но и увидеть в виде конкретного положения точки.

График уравнения

Графиком уравнения называют все точки, координаты которых удовлетворяют условию. Если точка принадлежит графику, её координаты делают равенство истинным; если нет, она не входит в множество решений.

Разные формы графиков

Для линейного уравнения график будет прямой, для $y=x^2$ — параболой, а для $x^2+y^2=R^2$ — окружностью. Вид графика помогает понять структуру решений ещё до вычислений.



Основные виды графиков и их свойства



Схема показывает, что разные уравнения задают графики различной формы и сложности; особенно выделяется гипербола, состоящая из двух ветвей.

Форма уравнения определяет не только рисунок графика, но и характер множества решений: от одной линии до нескольких ветвей.

Схематическое обобщение по теме алгебры 11 класса

Проверка пары чисел на принадлежность решению



Сравнение частей

После подстановки отдельно вычисляют левую и правую части и сравнивают их. Если получается верное равенство, пара принадлежит множеству решений; если нет, точка не подходит.



Подстановка

Чтобы проверить пару $(x; y)$, значения подставляют в уравнение вместо переменных. Это самый прямой способ установить, удовлетворяет ли точка данному условию, без построения полного графика.

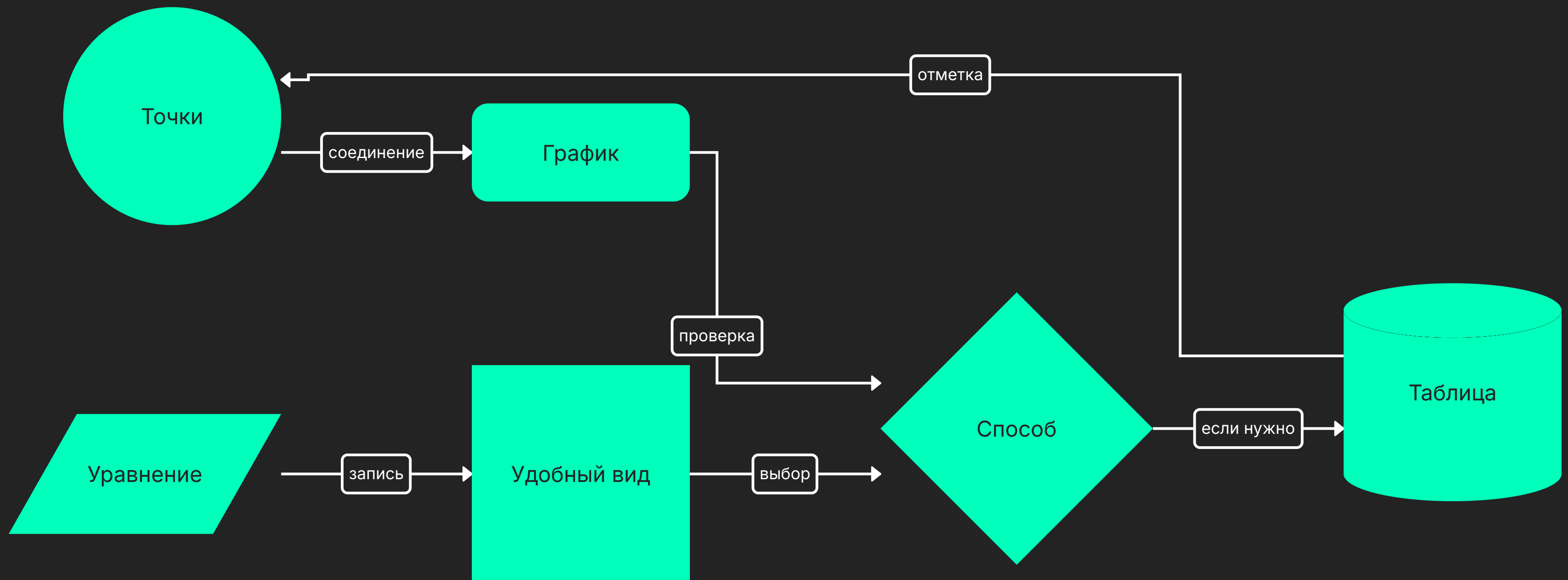


Проверка точек на плоскости

Метод особенно полезен для контрольных точек, найденных по таблице значений, по графику или в задачах с координатами. Он позволяет быстро уточнить, верно ли отмечена точка.

Алгоритм построения графика уравнения

Последовательность действий при переходе от формулы к координатному образу



Линейное уравнение с двумя переменными

Общий вид

Линейное уравнение с двумя переменными записывают в форме $ax+by=c$, где a и b не обращаются в ноль одновременно. Такая запись описывает прямолинейную зависимость между величинами.

График уравнения

Каждому линейному уравнению соответствует прямая на координатной плоскости. Это означает, что его решения образуют бесконечное множество точек, расположенных на одной линии.

03

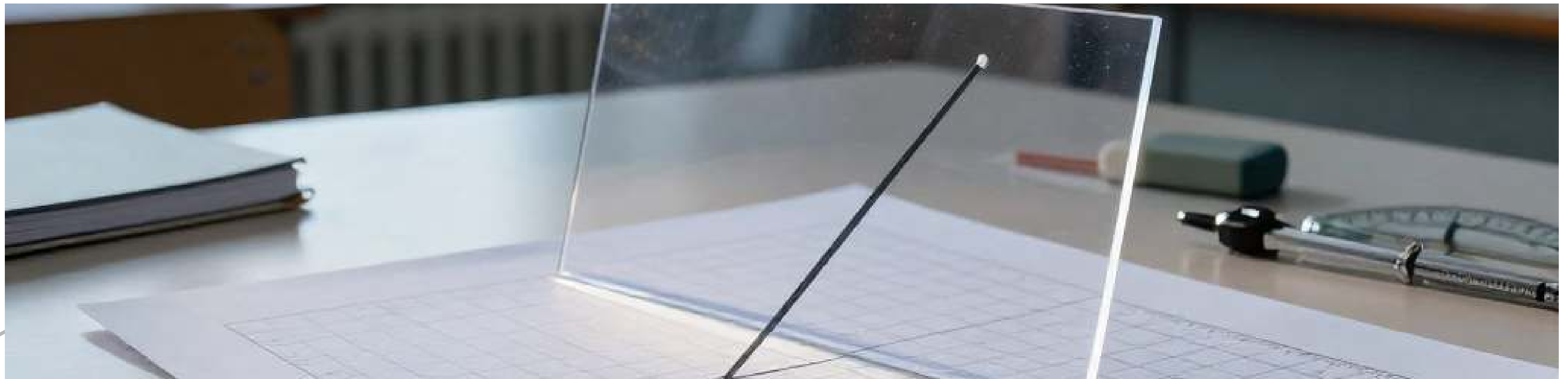
Переход к виду y

Если $b \neq 0$, можно выразить y через x : $y=-(a/b)x+c/b$. Тогда становится виден угловой коэффициент, определяющий наклон прямой, и точка пересечения с осью Oy .

04

Практический смысл

Такие уравнения удобно применять там, где величины изменяются равномерно: в задачах на движение, стоимость, пропорциональность и другие прямолинейные зависимости.



Сравнение основных видов уравнений с двумя переменными

Вид уравнения	Геометрический образ	Решений	Пример
Линейное	Прямая	Бесконечно много	$ax+by=c$
Квадратное	Кривая	Разное	$y=ax^2+bx+c$
$x^2+y^2=R^2$	Окружность	Бесконечно много	$x^2+y^2=R^2$
$xy=c$	Гипербола	Бесконечно много	$xy=c$

Таблица показывает, как вид записи связан с геометрическим образом и количеством решений.

Алгебраическая форма заранее подсказывает тип графика и помогает понять, как выглядит множество решений.

Область решений неравенства с двумя переменными

Не линия, а область

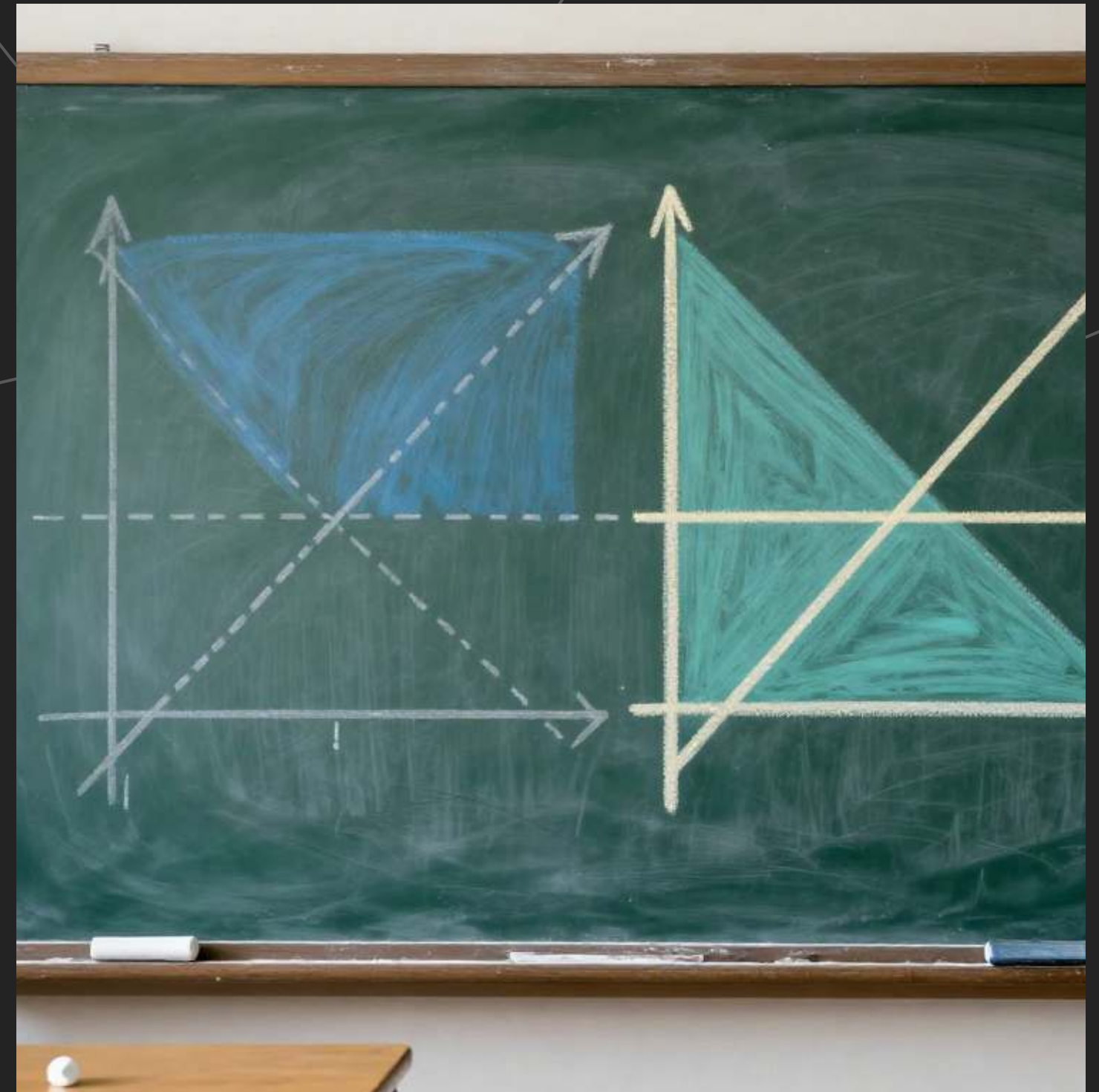
Неравенство с двумя переменными задаёт не отдельную кривую, а целую область точек на плоскости. Например, $y > x$ означает все точки, лежащие выше прямой $y = x$.

Граница решения

При строгих знаках $<$ и $>$ сама граница в ответ не входит, поэтому линия или кривая рисуется пунктиром. При $\leq$ и $\geq$ граница включается и изображается сплошной линией.

Геометрический смысл

Для линейного неравенства обычно получается полуплоскость, а для $x^2 + y^2 \leq R^2$ — круг с внутренней областью. Так неравенство описывает сразу множество допустимых точек, а не одну точку.



Геометрический смысл строгих и нестрогих неравенств

01. Строгие условия

Неравенства $<$ и $>$ задают только те точки, для которых числовое сравнение выполняется без равенства. Граница при этом не входит в решение, поэтому на чертеже её показывают пунктиром.

02. Нестрогие условия

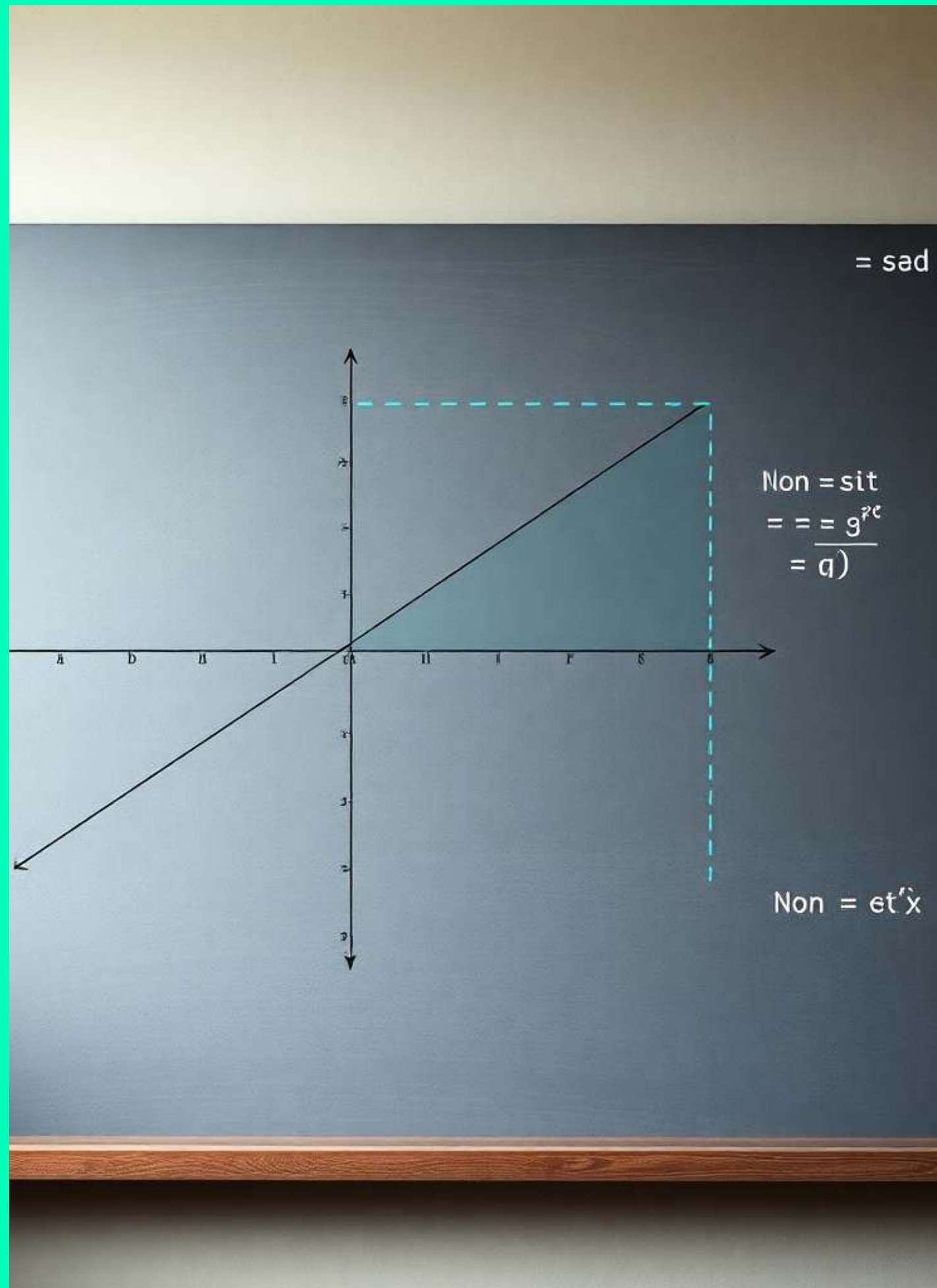
Знаки $\leq$ и $\geq$ расширяют множество решений: в него входят точки самой границы. Это важно при построении, потому что линия или кривая изображается сплошной, а ответ включает край.

03. Полуплоскости

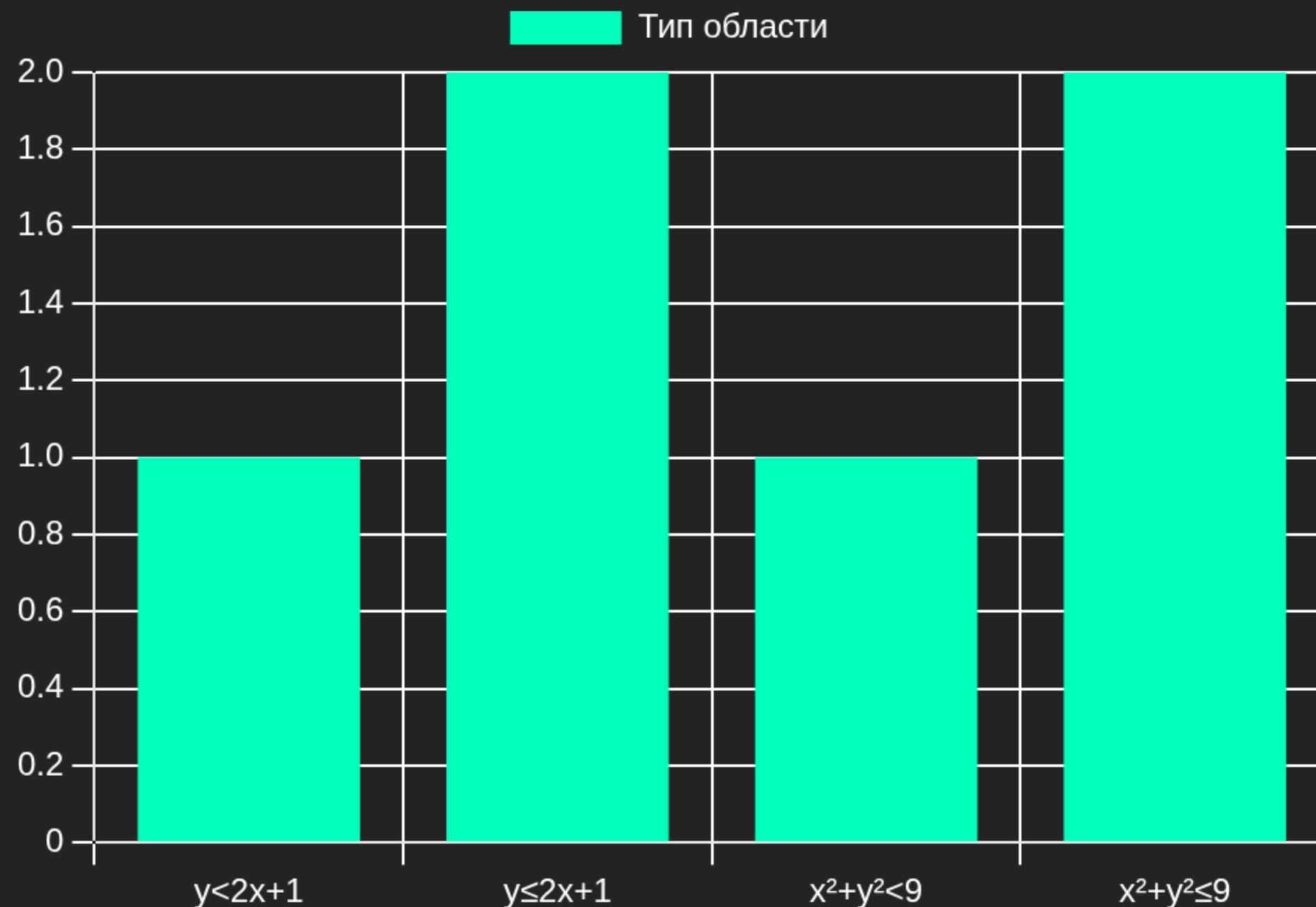
Для линейных неравенств область решений обычно занимает одну из двух полуплоскостей, разделённых прямой. Какая именно сторона подходит, определяют проверкой контрольной точки, не лежащей на границе.

04. Область внутри кривой

Неравенства вида $x^2 + y^2 \leq R^2$ описывают круг с центром в начале координат: все точки внутри и на окружности удовлетворяют условию. При строгом знаке остаётся только внутренняя область без линии.



Сравнение областей решений для разных знаков



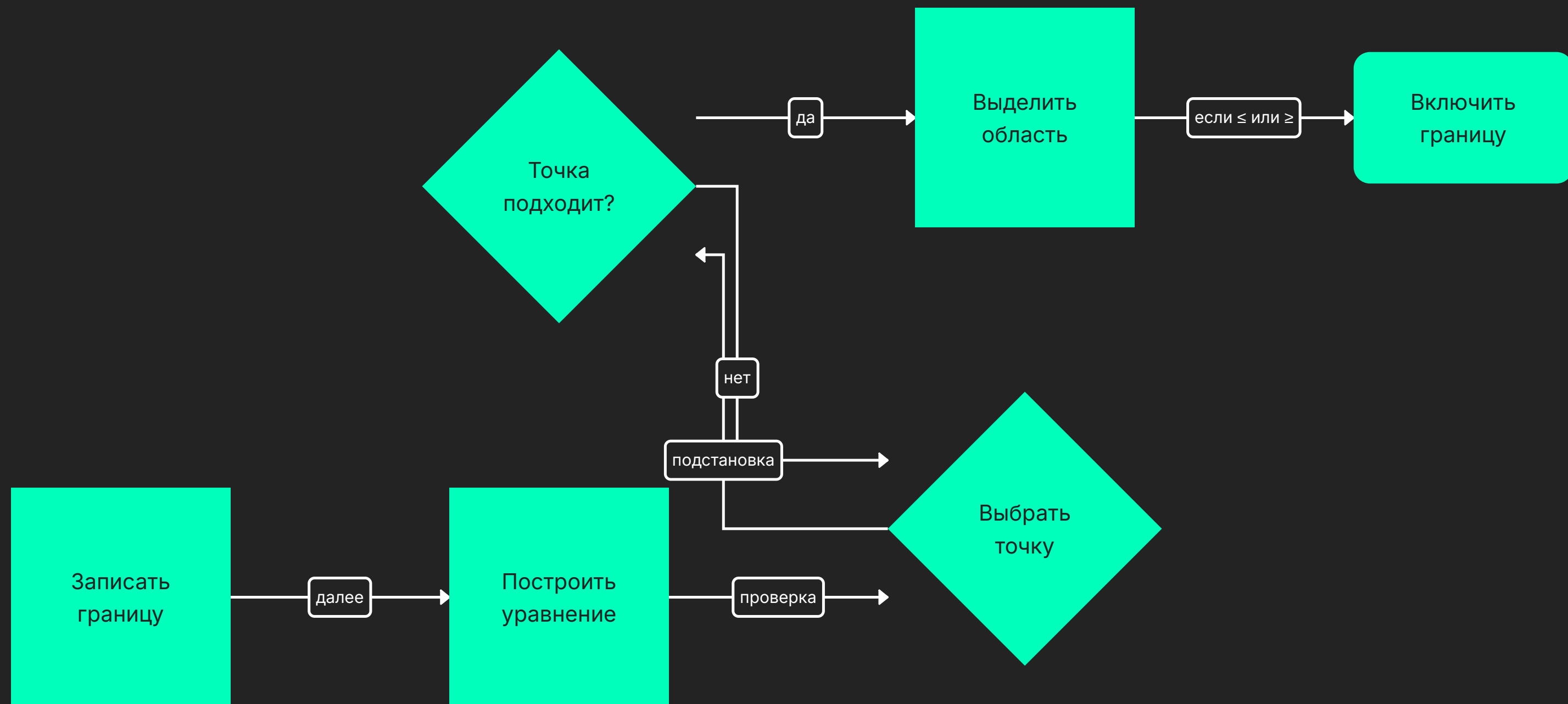
Строгие и нестрогие знаки меняют не саму фигуру границы, а способ её включения в ответ. Это особенно заметно на прямой и окружности.

Во всех примерах нестрогие неравенства расширяют ответ за счёт границы, тогда как строгие оставляют только внутреннюю или внешнюю часть области.

Составлено по правилам графического решения неравенств с двумя переменными.

Как решать неравенство графически

Последовательность построения области решений по данному неравенству.



Системы уравнений с двумя переменными

01

Общее условие

Система объединяет несколько уравнений, которые должны выполняться одновременно. Поэтому решением становится не любая подходящая пара чисел, а только та, что удовлетворяет каждому условию сразу.

02

Геометрический смысл

Каждое уравнение задаёт свой график на координатной плоскости. Решения системы — это точки пересечения графиков, а если совпадения нет, система не имеет общего решения.

03

Возможные случаи

Пересечение может состоять из одной точки, нескольких точек или быть пустым. Именно число общих точек показывает, сколько решений имеет система в конкретной задаче.

04

Практическая роль

Системы позволяют описывать ситуации, где нужно учесть сразу два ограничения, например соотношение величин в геометрии, движении или экономических моделях. Их удобно анализировать графически.

Способы решения систем уравнений

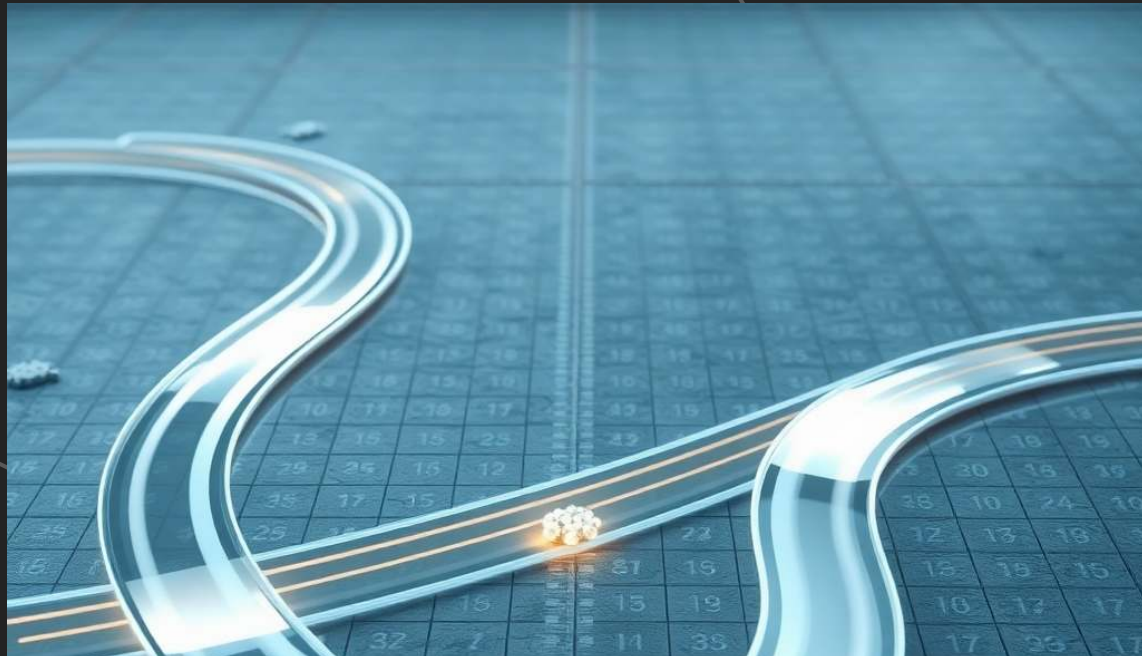


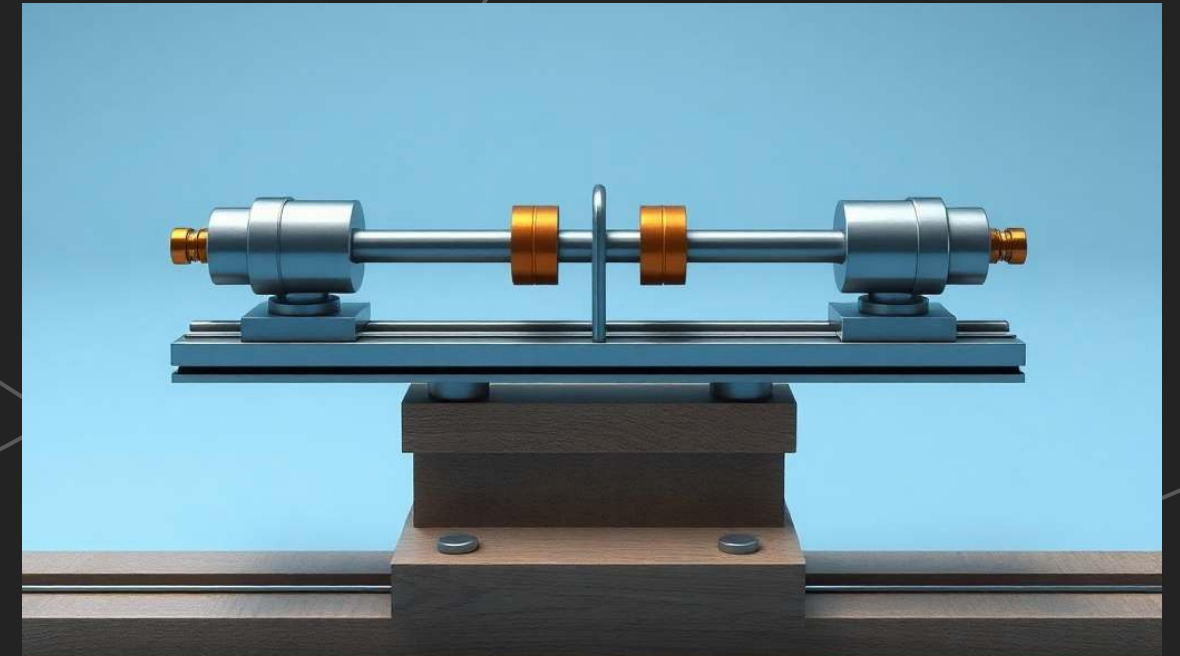
График как карта пересечения

Графический метод похож на поиск перекрёстка двух дорог: нужно построить оба графика и увидеть, где они встречаются. Он особенно полезен, когда важно быстро понять, есть ли решение и сколько их. Однако точность зависит от аккуратности построения и масштаба координатной сетки.



Подстановка как точная замена

Метод подстановки удобен, если одну переменную легко выразить через другую. Тогда исходная система превращается в одно уравнение с одной неизвестной, что делает ответ точным и проверяемым. Этот способ требует внимательности при раскрытии скобок и работе с дробями.



Сложение для линейных систем

Метод сложения особенно эффективен, когда коэффициенты можно быстро привести к противоположным значениям. После этого одна переменная исчезает, и система упрощается. Такой подход часто экономит время, но требует предварительных преобразований и аккуратной записи каждого шага.

Сравнение способов решения систем

Таблица показывает, чем отличаются основные методы решения систем и в каких ситуациях каждый из них наиболее удобен.

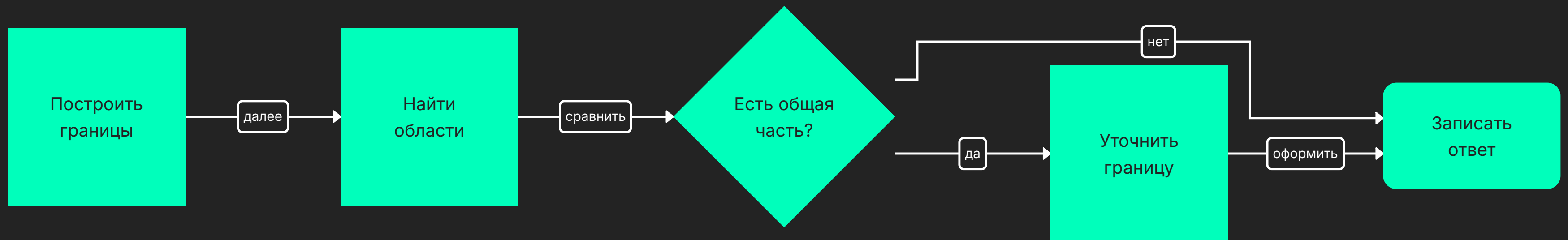
Способ	Достоинства	Ограничения	Когда применять
Графический	Наглядность	Неточность	Для анализа
Подстановка	Точность	Много преобразований	Если переменная выражается
Сложение	Быстро для линейных	Нужны преобразования	Линейные системы

Графический метод помогает понять структуру решения, а подстановка и сложение дают более точный результат. Выбор зависит от вида системы и удобства преобразований.

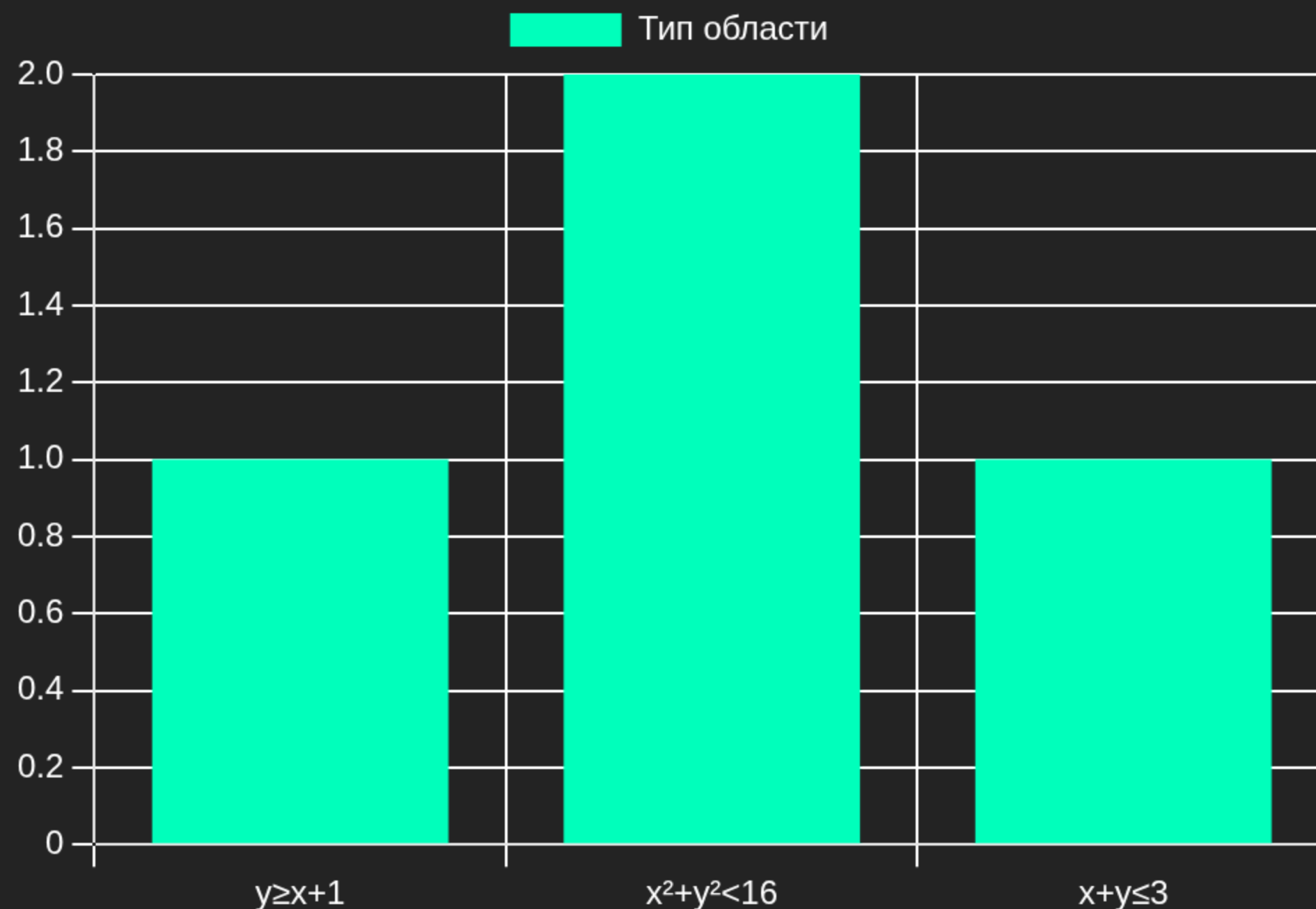
Сравнение составлено по стандартным способам решения систем уравнений.

Решение системы неравенств

Алгоритм нахождения общей области, удовлетворяющей всем неравенствам системы.



Примеры областей решений на координатной плоскости



На плоскости неравенство задаёт не одну линию, а целую совокупность точек. Форма области зависит от вида границы и знака сравнения.

Линейные неравенства дают полуплоскости, а квадратные — внутренность круга. Граница включается только при нестрогом знаке.

Составлено по типовым примерам графического изображения неравенств.

Типичные ошибки и проверка ответа

Путают знак и границу

Частая ошибка — решить неравенство как уравнение и забыть, что нужна целая область точек. Полезно сразу определить, должна ли граница входить в ответ.

Выбирают неверную сторону

Иногда выделяют не ту полуплоскость, потому что не проверяют контрольную точку. Подстановка простой точки быстро показывает, какая часть плоскости действительно подходит.

Не учитывают нестрогий знак

При $\leq$ и $\geq$ границу необходимо включать, иначе ответ оказывается неполным. На рисунке это означает сплошную линию, а не пунктирную, и точную запись множества решений.

Не проверяют систему

В системах важно найти не отдельные области, а их пересечение. Если проверить несколько характерных точек, сразу видно, существует ли общая часть и нет ли ошибки в построении.

От формулы к геометрии и обратно

Эта тема показывает, как алгебраическая запись превращается в видимую картину на плоскости. Умение читать графики, области решений и системы условий станет опорой для дальнейшего изучения функций и моделей.