



Вычисления в геометрии: площади, длины, углы и объёмы

От отрезков и углов к площадям и объёмам:
формулы, чертёж и точный расчёт.

Зачем в старшей школе изучают геометрические вычисления



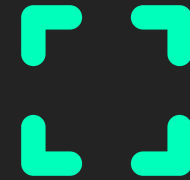
В 10 классе геометрия становится инструментом вычислений: появляются тригонометрия, работа с координатами и векторами. Ключевой навык — превращать условие в рисунок и уверенно выбирать формулу, опираясь на тип треугольника или симметрию.

Основные величины и единицы измерения



Углы

Углы измеряются в градусах. При использовании тригонометрических соотношений нужно точно определить, какой угол участвует в формуле и что именно считается высотой или расстоянием.



Площади

Площадь измеряется в квадратных единицах. При переходе между метрами и сантиметрами учитывается, что «квадрат» единицы меняется, например, в тысячу раз больше по линейной шкале.



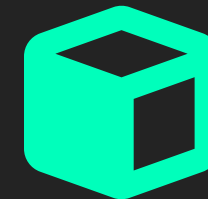
Длины

Длина задаётся в миллиметрах, сантиметрах, метрах и километрах. В задачах важно одинаково согласовать масштаб чертежа и единицы в вычислениях, чтобы результат имел «физический» смысл.



Периметр

Периметр — сумма длин сторон. Он нужен для уравнений и проверок, а также для вычисления боковой поверхности в телах с круговым или многоугольным основанием.



Объёмы

Объём измеряется в кубических единицах. Это та область, где особенно легко ошибиться со степенями при переводе единиц и перепутать объём и площадь поверхности.

Формулы, которые чаще всего используются в 10 классе

Фигура	Формула	Что нужно для применения	Проверка ответа
Треугольник	$S = 1/2 \cdot a \cdot h$; $S = 1/2 \cdot ab \cdot \sin \gamma$	Основание и высота; две стороны и угол	$S > 0$, единицы – квадратные
Параллелограмм	$S = a \cdot h$; $S = ab \cdot \sin \gamma$	Основание и высота; две стороны и угол	$S > 0$, единицы – квадратные
Трапеция	$S = 1/2 \cdot (a + b) \cdot h$	Оба основания и высота	$S > 0$, единицы – квадратные
Окружность	$L = 2\pi r$; $S = \pi r^2$	Радиус r (или d через $d=2r$)	L, S положительны, π сохраняется
Призма/ Параллелепипед	$V = S_{\text{осн}} \cdot h$; $V = abc$	Площадь основания и высота; три ребра	$V > 0$, единицы – кубические
Цилиндр/Конус/Шар	$V = \pi r^2 h$; $V = 1/3 \cdot \pi r^2 h$; $V = 4/3 \cdot \pi r^3$	r и h (для цилиндра/конуса); r для шара	$V > 0$, единицы – кубические

Сводная таблица помогает выбрать формулу по типу фигуры и быстро проверить ответ по смыслу.

Большинство задач решается через распознавание фигуры и корректный набор исходных данных. Достаточно избегать типичных ошибок единиц и «подставлять по смыслу», а не «по ощущениям».

Материал школьного курса геометрии (10 класс) и стандартные формулы для площадей и объёмов.

Сравнение способов нахождения площади треугольника

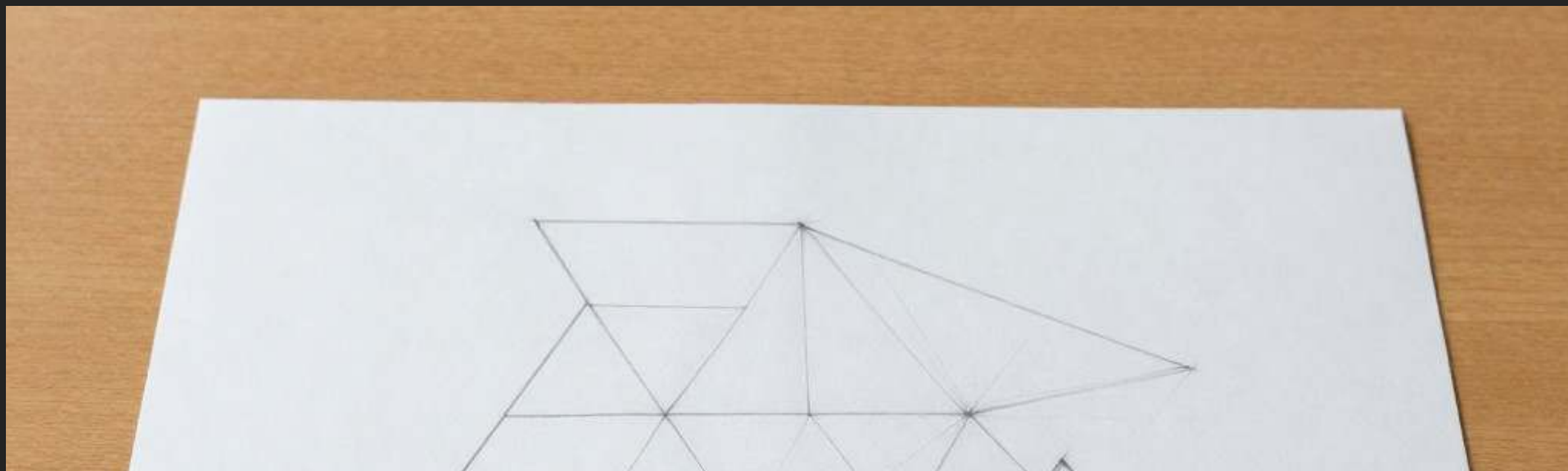


Если известны основание и высота, решение максимально прямое; при наличии сторон и угла подходит формула с $\sin$; Герон удобен, когда известны только стороны.

Выбор формулы зависит не от «красоты», а от доступных данных. Правильная привязка к основанию/углу или к трём сторонам снижает риск ошибок.

Сводка методов из школьного курса геометрии (применимость: известные параметры треугольника).

Треугольник как основная фигура школьной геометрии



Почему треугольник — «опорная» фигура

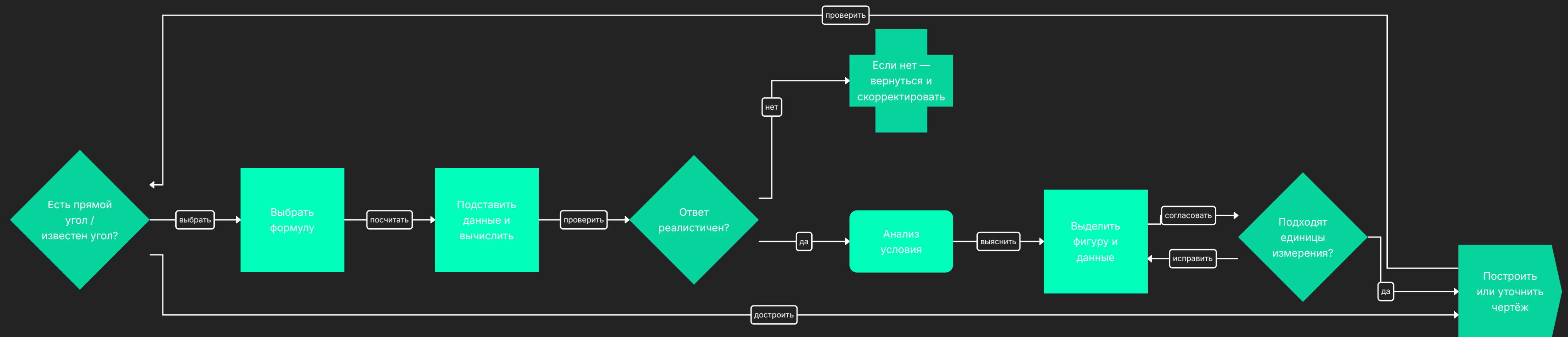
Треугольник служит базой большинства вычислений: любую сложную область можно разбить на треугольники, а затем сложить площади. Это превращает задачу в набор более простых шагов.

Прямоугольные и произвольные треугольники

Для прямоугольного треугольника ключевая связка — теорема Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$. В произвольном треугольнике нужны сумма углов 180° , признаки равенства и подобия, а также медианы, биссектрисы и высоты.

Алгоритм решения задачи на вычисление геометрической величины

Типовая логика: от условия и чертежа — к формуле и проверке результата.



Если треугольники подобны, отношение площадей равно квадрату коэффициента подобия. Поэтому достаточно найти результат для меньшей или большей фигуры и масштабировать его.



k^2

При переходе к подобным фигурам площади меняются в квадрат масштаба.

Свойство подобия: коэффициент подобия k даёт отношение площадей k^2 (школьная геометрия).



Окружность и круг: длина, площадь, дуги и сектора

Окружность задают радиусом r и диаметром $d = 2r$. Тогда длина окружности равна $L = 2\pi r$, а площадь круга — $S = \pi r^2$. Дуговые и секторальные величины зависят от доли полного круга.

В прикладных задачах часто встречаются хорда, секущая и касательная, а также углы, связанные с окружностью. Их используют, чтобы выразить нужный отрезок или часть площади через известные параметры радиуса.



01

Для параллелограмма площадь выражается через основание и высоту $S = a \cdot h$ либо через две стороны и синус угла между ними $S = ab \cdot \sin \gamma$. Выбор формулы определяется тем, что именно дано в условии.

02

Для ромба удобны формулы через сторону и высоту, а также через диагонали: $S = d_1 d_2 / 2$. Этот вариант часто сокращает вычисления, если диагонали уже указаны на чертеже.

03

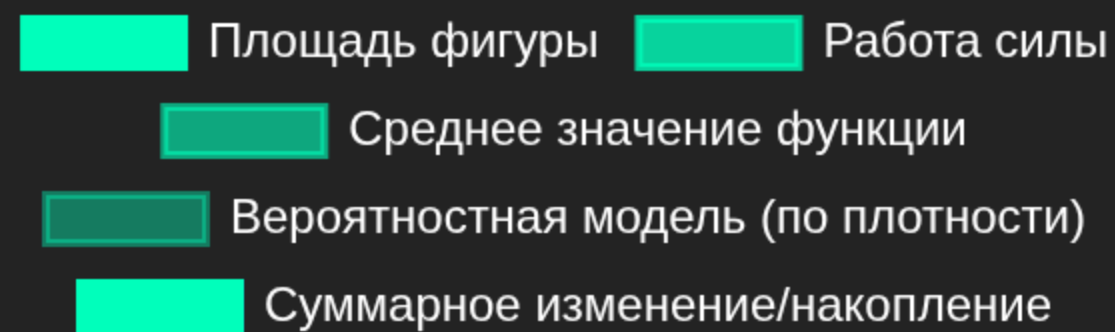
В трапеции базовыми остаются основания и высота, поэтому ключевая связь $S = 1/2(a + b)h$. Даже при наличии дополнительных сведений формула помогает быстро получить площадь.

04

При решении задач на четырёхугольники полезно разбиение на треугольники и перенос информации через параллельность и равенство сторон. Дополнительно работают свойства диагоналей, особенно в частных видах четырёхугольников.

Четырёхугольники и формулы площадей

Смысл определённого интеграла: «накопление» как единая идея



Определённый интеграл в школьных задачах объединяет разные сюжеты: площадь, работу, накопление величин и средние значения, показывая, что «разные задачи» решаются одним языком.

Диаграмма подчёркивает универсальность: один и тот же математический объект даёт результат для разных прикладных интерпретаций, если заданы границы и функция.

Материал курса алгебры и начал анализа (10–11 классы), базовые определения и типовые задачи; без статистических данных.

01

Основная идея теоремы связывает первообразную и определённый интеграл: если $F'(x)=f(x)$, то $\int[a,b] f(x)dx = F(b)-F(a)$. Это превращает накопление в разность значений первообразных.

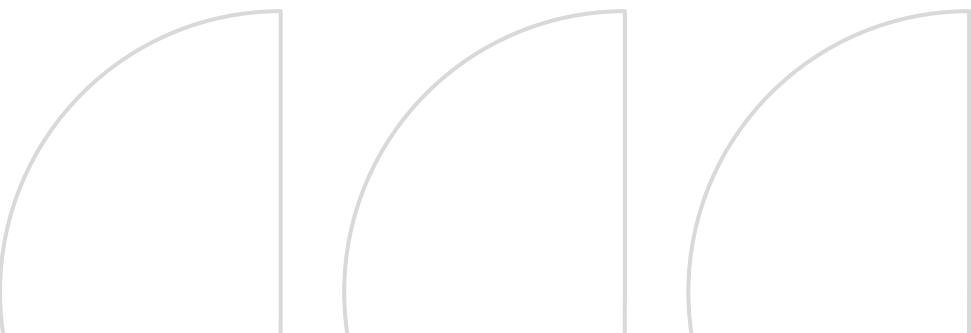
02

На практике сначала находят удобную первообразную, затем подставляют верхний и нижний пределы. Важно аккуратно различать переменную первообразной и пределы интегрирования, чтобы не перепутать x и a, b .

03

Теорема работает и как проверка вычислений: если при дифференцировании снова получается исходная функция $f(x)$, значит первообразная найдена верно; дальше результат задаётся разностью $F(b)-F(a)$. Проверяйте знаки!

Теорема о связи производной и интеграла: главная точка курса



Базовые интегральные формулы для типовых вычислений

В таблице собраны ключевые «скелеты» ответов: первообразная и подстановка пределов, а также стандартные интерпретации через определённый интеграл. Они помогают быстро выбрать ход решения.

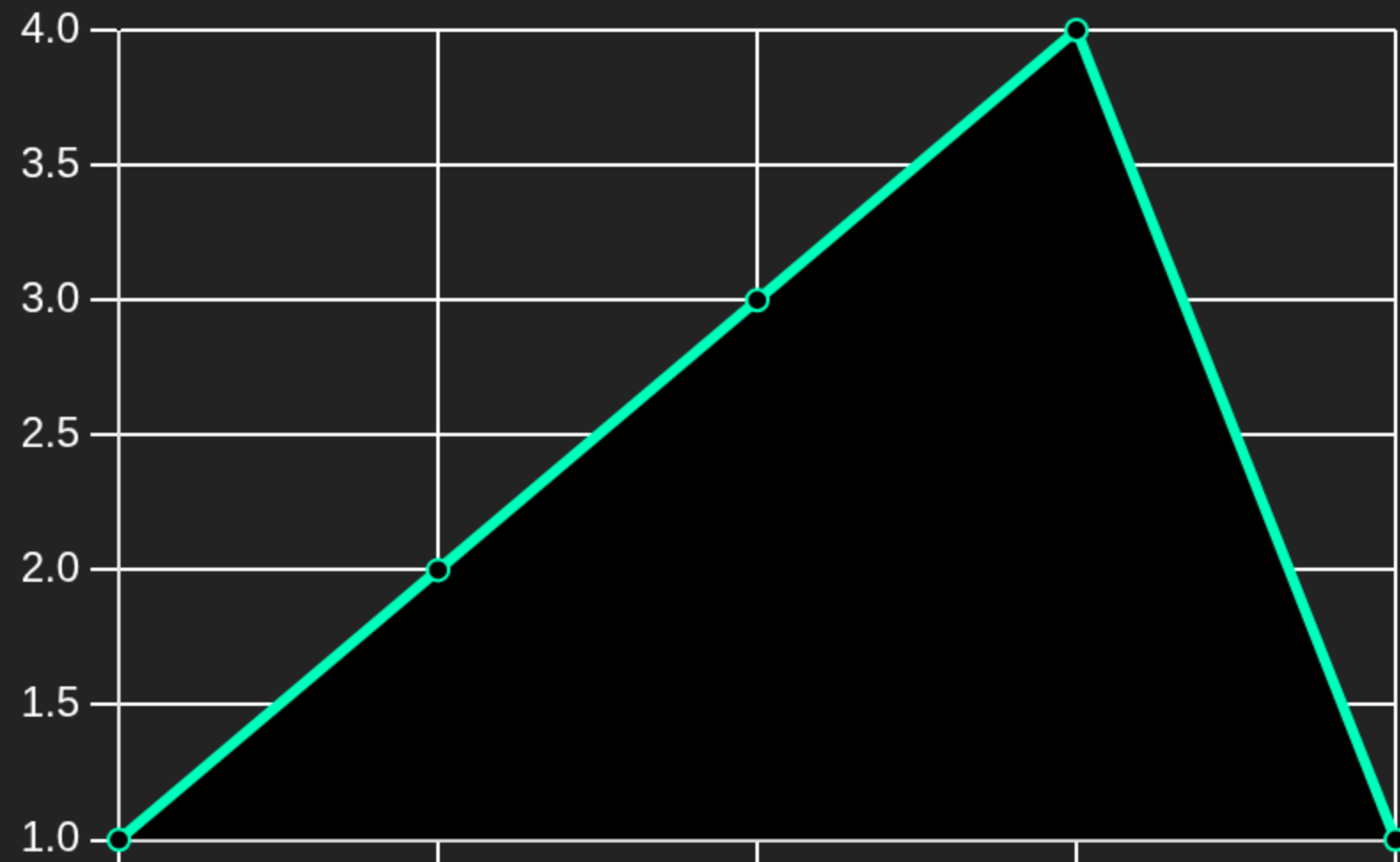
Задача	Интеграл	Что искать	Финальная запись
Найти первообразную	$\int f(x)dx$	$F(x)$, что $F'=f$	$F(x)+C$
Определённый интеграл	$\int[a,b] f(x)dx$	$F(x)$ с $F'=f$	$F(b)-F(a)$
Площадь под графиком	$\int[a,b] y(x)dx$ ($y\geq 0$)	площадь через интеграл	$S=\int[a,b] y(x)dx$
Работа силы	$\int[a,b] F(x)dx$	закон силы по координате	$A=\int[a,b] F(x)dx$
Среднее значение	$(1/(b-a))\int[a,b] f(x)dx$	среднее накопление	$\bar{f} = (1/(b-a))...$
Накопленная величина	$\int[a,t] g(x)dx$	темп $g(x)$	$Q(t)=\int[a,t] g(x)dx$

Таблица показывает общий шаблон: сначала находится первообразная, затем используется либо $F(b)-F(a)$, либо масштабированный результат. Это уменьшает число ошибок выбора метода.

Типовые формулы из школьного курса «начала анализа» (определение определённого интеграла и теорема Ньютона–Лейбница).

Координатный способ в интегралах: от интервала к числу

■ Как координаты пределов и разбиение помогают получить точный численный резу



1. Уточняем задачу
2. Выбираем $f(x)$ и интервал
3. Находим первообразную $F(x)$
4. Подставляем пределы
5. Проверяем знаки и единицы

Сначала фиксируют границы a и b , затем выражают нужную величину через функцию и интеграл. После нахождения первообразной выполняют подстановку $F(b) - F(a)$ и обязательно проверяют смысл результата.

Линейная схема показывает, что точность обеспечивается не «магией формул», а дисциплиной: интервал $\rightarrow$ первообразная $\rightarrow$ подстановка $\rightarrow$ проверка размерности.

Конспект по теореме Ньютона–Лейбница и типовым алгоритмам решения задач на определённый интеграл; без внешних статистических источников.

Симметрия и разбиение: как уменьшить вычисления в интегралах

01

Если функция чётная и интеграл берётся по симметричному интервалу $[-a, a]$, можно удваивать значение на $[0, a]$. Для нечётных функций интеграл по $[-a, a]$ равен нулю.

02

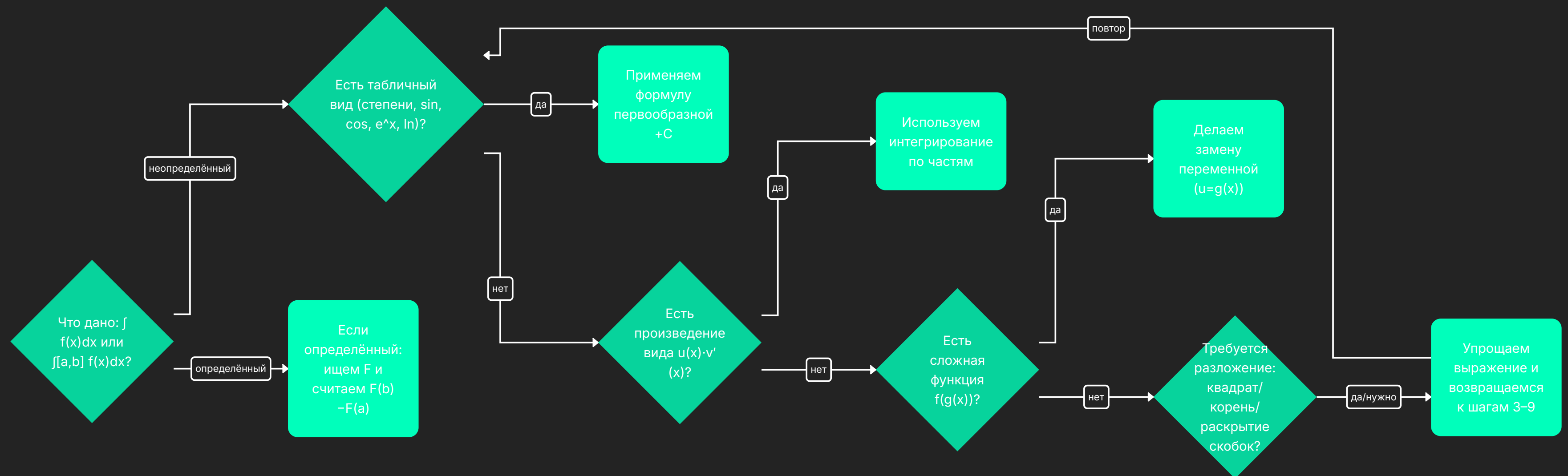
Разбиение работает, когда область или интервал состоит из частей с разными знаками либо разной формой графика. Тогда интеграл по целому отрезку равен сумме интегралов по частям.

03

В задачах на площадь удобно сначала отделить участки, где $y(x) \geq 0$ и $y(x) < 0$, и интегрировать модуль через разность интегралов. Этот подход делает ответ устойчивым к ошибкам со знаками.

Как распознать «правильный ход» при вычислении интеграла

Условия задачи подсказывают тип первообразной, способ разложения и технику (табличный вид, замена, по частям).



Типичные ошибки при вычислении интегралов



Смешивают первообразную и интеграл

Для неопределённого интеграла ответ имеет вид $F(x)+C$, а для определённого — численное значение без $+C$. Ошибка возникает при неверном типе задачи.



Ошибки в замене переменной

После подстановки $u=g(x)$ нужно также заменить dx и пределы (для определённого интеграла). Пропуск этого шага ломает результат.



Путают пределы

В определённом интеграле правильно считается $F(b)-F(a)$. Частая ошибка — подставлять наоборот или забывать, что a и b не равны переменной x .



Теряют знаки при модуле/площади

Если график ниже оси x , площадь берут со знаком «плюс» через интеграл от $|y(x)|$. Нередко знак минус сохраняют, получая неправильную интерпретацию.



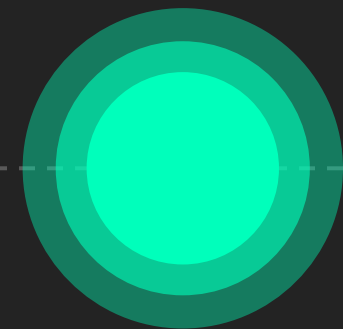
Неверно применяют «правило степеней»

При интегрировании x^n используют $(x^{n+1})/(n+1)$. Ошибка — забыть особый случай $n=-1$, когда получается $\ln|x|$ вместо степени.

Как проверить ответ в геометрически и прикладных задачах на интеграл

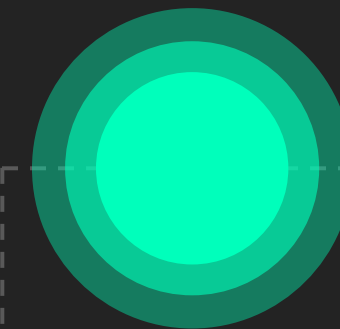
Контроль размерности

Проверьте единицы: интеграл по dx меняет размерность на «умножение на x ». Например, площадь имеет квадратные единицы, работа — произведение силы на длину.



Сравнение со смыслом

Если это площадь, результат неотрицателен и должен быть согласован с графиком на отрезке. Для работы знак зависит от направления и физической модели, а для среднего значения — от диапазона функции.



Быстрая проверка вычислений

Для неопределённого интеграла выполните дифференцирование ответа и убедитесь, что получили исходную подынтегральную функцию. Для определённого интеграла — пересчитайте подстановку $F(b) - F(a)$.

Как оформлять решение на контрольной: от записи до ответа

01

Коротко перепишите условие в интегральном виде: что именно нужно (площадь, работа, накопленная величина) и какие границы. Затем обозначьте подынтегральную функцию и переменную интегрирования.

02

Сделайте выбор метода и обоснуйте его: табличный вид, замена, по частям или разбиение. После этого аккуратно вычислите первообразную, не теряя коэффициенты и знаки.

03

В конце выполните подстановку пределов (если интеграл определённый) и запишите результат в нужных единицах. Завершайте проверкой: знак, адекватность масштаба и корректность размерности.

Интегралы — навык точного счета и осмысленного результата

Геометрия интеграла строится на одном принципе: накопление величины задаётся площадью под графиком темпа. Теорема Ньютона–Лейбница, симметрия и проверка знаков превращают сложные задачи в управляемые вычисления.