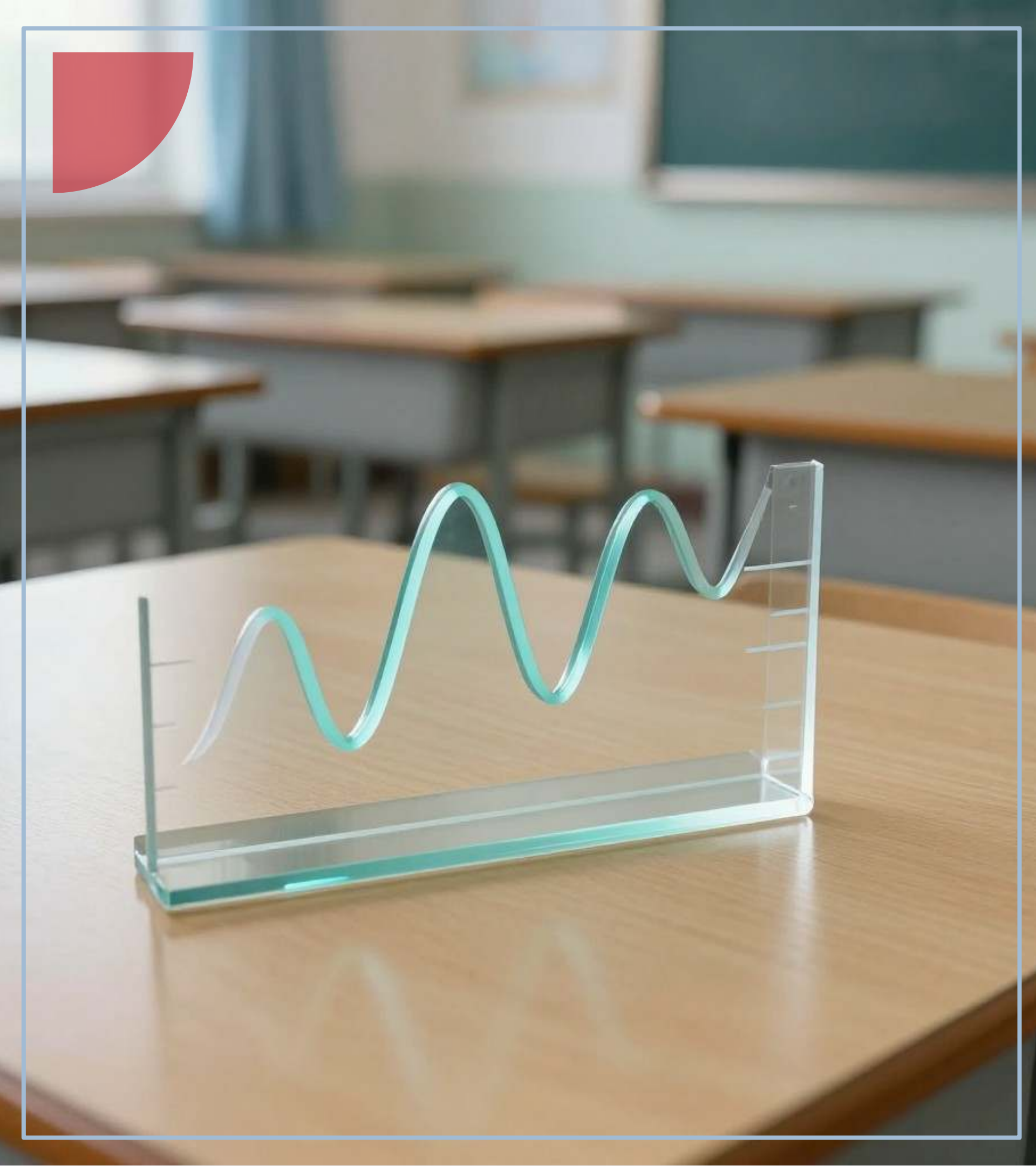


# Уравнение $\sin x = a$ : общая идея

Сначала проверяем параметр, затем находим решения и отбираем их на промежутке.



# Что изучаем и зачем

Это уравнение показывает связь между значением синуса, геометрией единичной окружности и графиком. Сначала определяем существование решений, затем записываем общую формулу и, при необходимости, выбираем ответы на нужном промежутке.

# Область допустимых значений параметра $a$

## 01 Границы синуса

Синус всегда принимает значения только от  $-1$  до  $1$ . Поэтому при  $|a| > 1$  уравнение не имеет решений, и дальнейшие вычисления бессмысленны.

## 02 Крайние значения

При  $a=1$  и  $a=-1$  получаются особые случаи. В каждом из них остаётся одна серия решений, потому что две общие ветви совпадают.

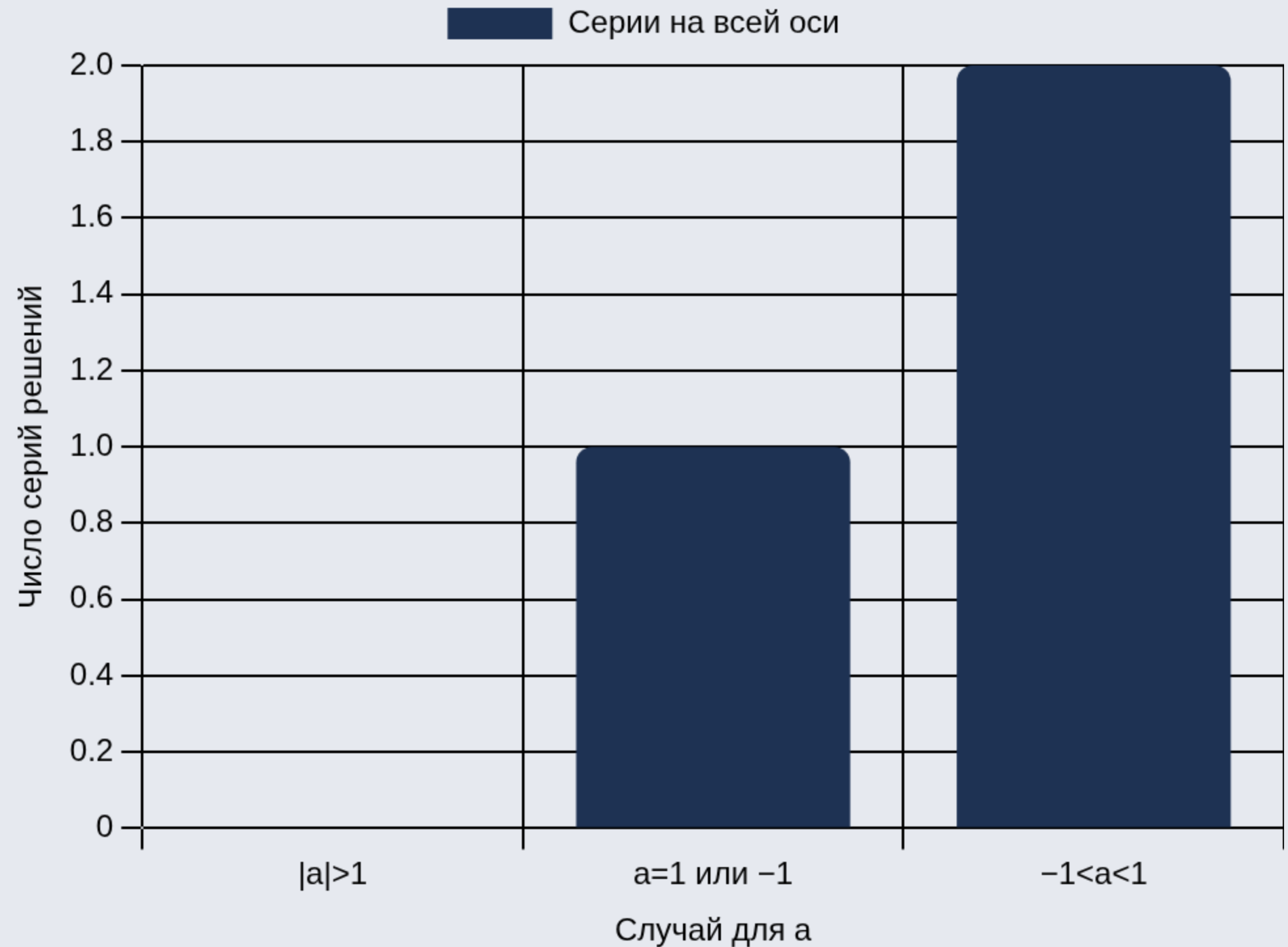
## 03 Внутренний интервал

Если  $-1 < a < 1$ , решений на всей оси бесконечно много. Общий ответ распадается на две симметричные серии, связанные с периодичностью синуса.

# Графическая интерпретация уравнения

Горизонтальная прямая  $y=a$  пересекает график  $\sin x$  в разных точках в зависимости от высоты.

Порог  $|a|=1$  делит все случаи: вне диапазона решений нет, на границе остаётся одна серия, внутри — две.



Анализ уравнения  $\sin x = a$

# Единичная окружность и две точки решения

## Две симметричные точки

На единичной окружности синус задаётся ординатой точки. Поэтому одному значению  $a$  обычно соответствуют две точки, расположенные симметрично относительно оси  $Oy$ .

## Периодическое повторение

После полного оборота к каждому решению добавляется  $2\pi k$ , где  $k$  — любое целое число. Так появляются бесконечные серии решений.

## Углы на окружности

Если одну точку обозначить углом  $\alpha$ , то вторая будет иметь угол  $\pi - \alpha$ . Эти углы дают одинаковую ординату, а значит, одинаковый синус.



# Введение обозначения $\alpha = \arcsin(a)$

1

## Главное значение

Обозначение  $\alpha = \arcsin(a)$  удобно тем, что сразу фиксирует главное значение и не допускает путаницы с выбором угла на окружности.

2

## Диапазон арксинуса

Для  $\alpha$  всегда верно  $\sin \alpha = a$ , а сам угол лежит в пределах  $[-\pi/2; \pi/2]$ . Это помогает контролировать знак и диапазон ответа.

3

## Удобство записи

После ввода  $\alpha$  формулы решения записываются компактно и одинаково для разных задач. Далее остаётся только проверить, какие значения подходят заданному промежутку.

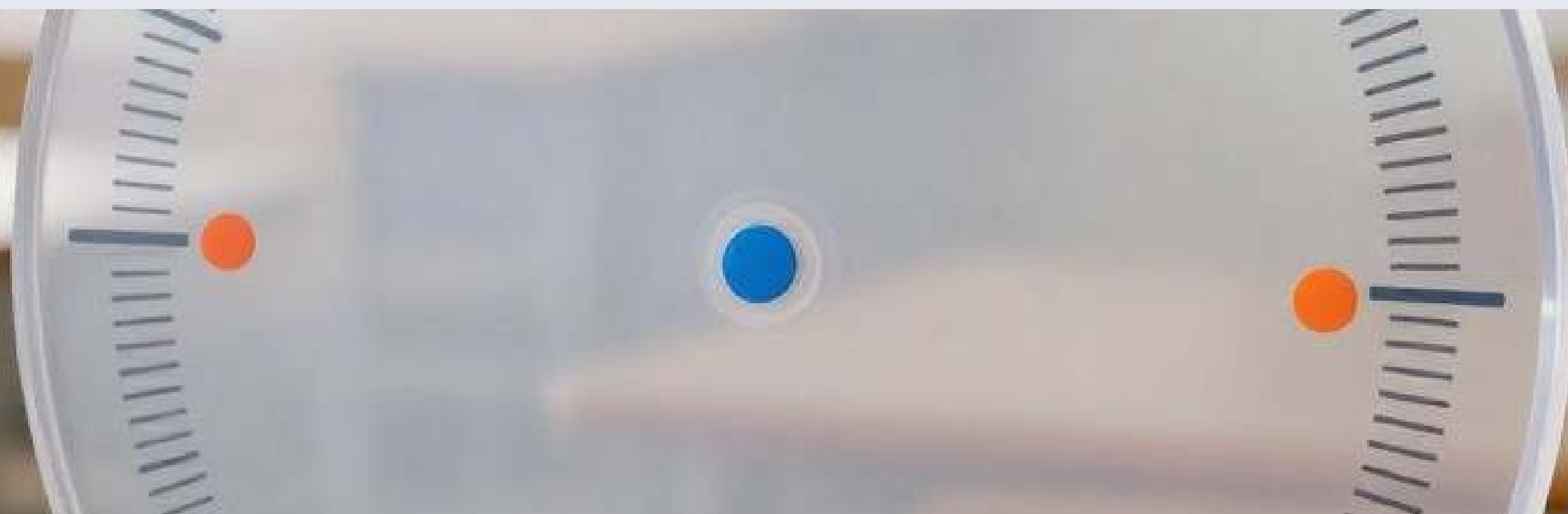
# Общий случай: две серии решений

## + Первая серия

Первая серия имеет вид  $x = \alpha + 2\pi k$ . Она описывает все положения точки с нужной ординатой после повторения одного и того же поворота.

## + Вторая серия

Вторая серия записывается как  $x = \pi - \alpha + 2\pi k$ . Она соответствует симметричной точке окружности, у которой синус совпадает с исходным значением.



## Особые случаи $a=1$ и $a=-1$

Для крайних значений параметра достаточно одной формулы решения.

При  $a=\pm 1$  две общие ветви сливаются в одну, поэтому решение записывается одной серией.

| $a$ | $\alpha$ | Решение         |
|-----|----------|-----------------|
| 1   | $\pi/2$  | $\pi/2+2\pi k$  |
| -1  | $-\pi/2$ | $-\pi/2+2\pi k$ |

# Когда решений нет

## Предел значений

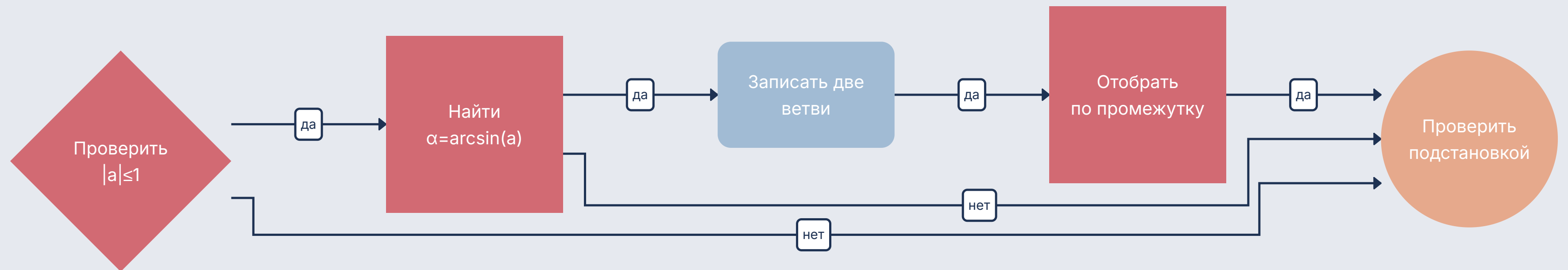
Если  $|a| > 1$ , значение  $a$  выходит за пределы, которые может принимать синус. В этом случае уравнение не имеет решений ни на одном промежутке.

## Первый шаг

Такую проверку удобно делать первой. Она сразу отделяет невозможные случаи от тех, где нужно искать углы и отбирать корни.

# Алгоритм решения

Последовательность решения уравнения и отбора корней



2

они образуют две  
симметричные точки  
на графике синуса.

На отрезке  $[0; 2\pi]$  это уравнение даёт  
ровно два решения в пределах  
одного периода.

*Аналитическое решение уравнения  $\sin x = \frac{1}{2}$  по формуле  
 $\arcsin(a)$  и периодичности  $\sin x$*

# Пример 2: отрицательное $a$

## + Главный угол

Для отрицательного значения параметра главное значение  $\arcsin$  остаётся отрицательным, поэтому  $\alpha = -\pi/4$ . Это удобно: знак сразу подсказывает, в какой части окружности искать первое решение.

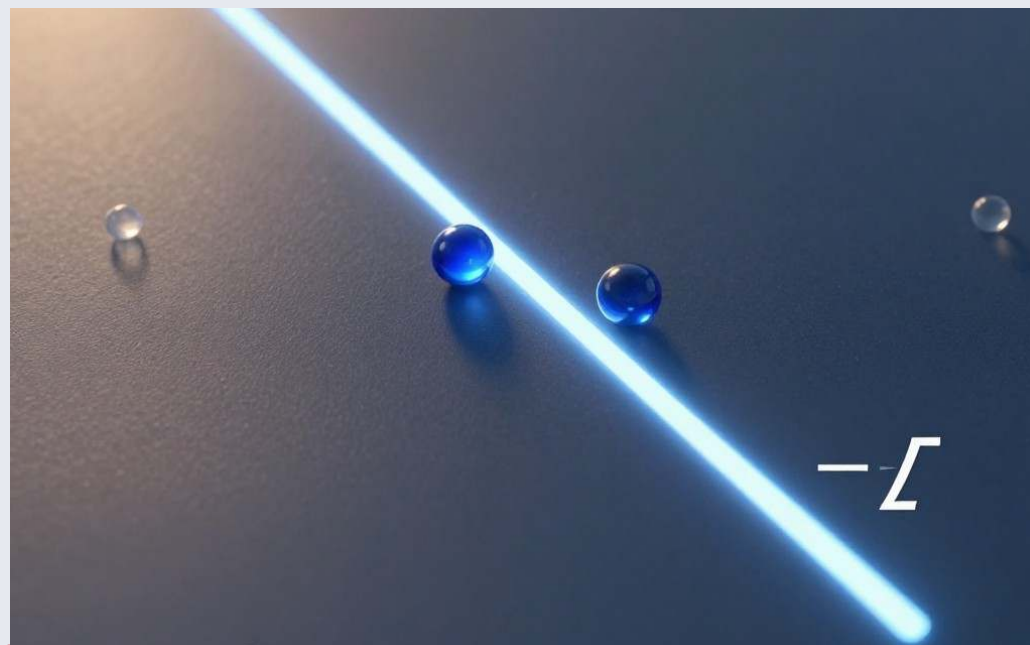
## + Частая ошибка

При решении важно не подменять  $\arcsin(a)$  положительным углом по привычке. Тогда легко потерять правильную пару симметричных точек и получить неполный ответ.

## + Две серии

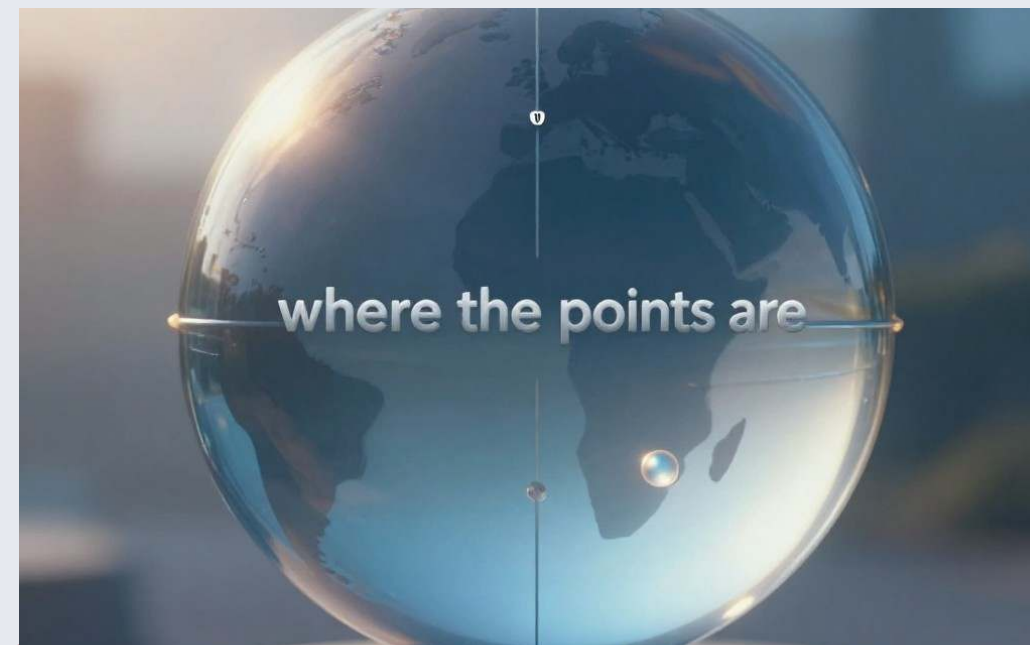
Общее решение записывается в двух ветвях:  $x = -\pi/4 + 2\pi k$  и  $x = 5\pi/4 + 2\pi k$ . Вторая формула не исчезает, даже если угол в первой ветви отрицательный.

# Как отрезок меняет ответ



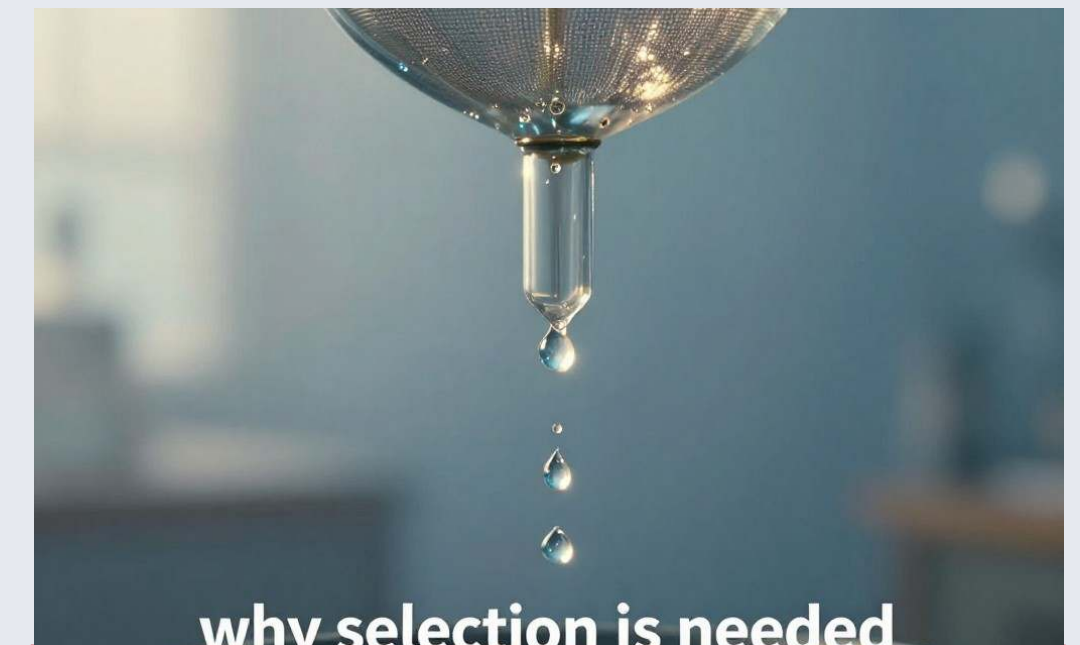
## Что попадает в отрезок

На отрезке  $[-\pi; \pi]$  остаются только те значения, которые действительно попадают в границы. Для  $a = -\sqrt{2}/2$  это  $x = -\pi/4$  и  $x = -3\pi/4$ , а остальные периодические решения выходят за пределы интервала.



## Где находятся точки

Если посмотреть на единичную окружность, обе точки лежат в III и IV четвертях. У них одинаковая ордината, поэтому синус совпадает, хотя углы различаются по знаку и положению.

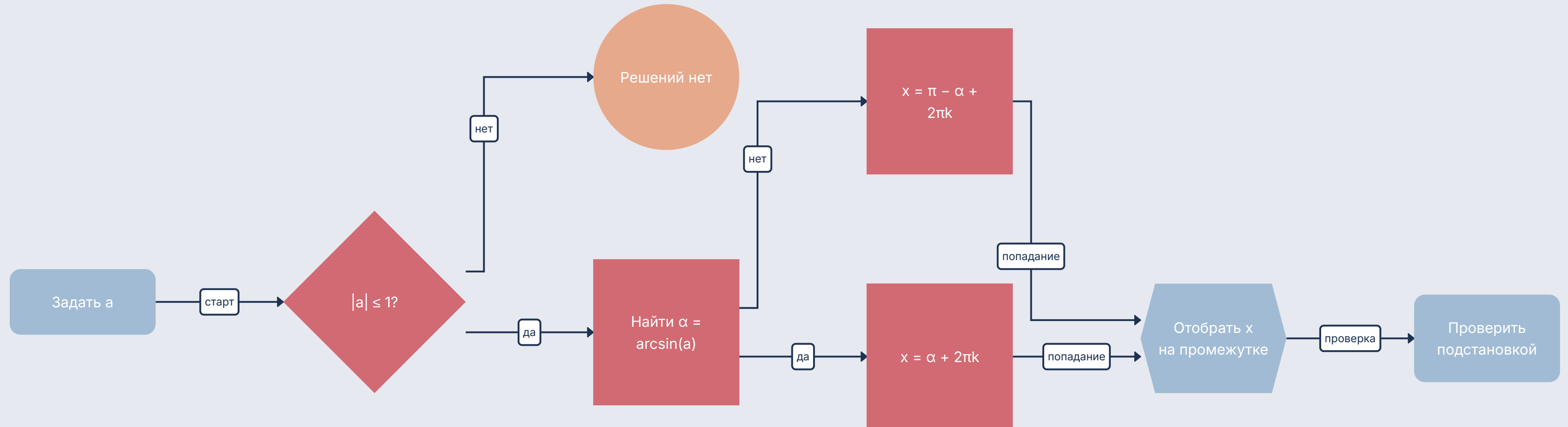


## Зачем нужен отбор

Такой пример хорошо показывает роль отбора: формулы дают бесконечное семейство, но на конкретном промежутке остаются только два ответа. Именно поэтому после записи общего решения всегда нужен проверочный этап.

# Алгоритм выбора $k$ для отрезка

Проверка параметра, запись двух ветвей и отбор значений на заданном промежутке.



# Пошаговый отбор решений

## 1. Записать общий ответ

Сначала находят общее решение без ограничений по  $x$ . Это задаёт все возможные значения и помогает не пропустить ни одну ветвь.

## 3. Отобрать нужные корни

Затем прибавляют или вычитают  $2\pi$ , пока не появятся все подходящие значения внутри интервала. После этого полезно быстро проверить ответ подстановкой.

## 2. Проверить границы

Далее сравнивают каждое значение с границами отрезка  $[-\pi; \pi]$ . Если решение выходит за пределы, его пока не оставляют в списке.

# Таблица типовых случаев

| а             | Решения     |
|---------------|-------------|
| 0             | $x = \pi k$ |
| $\frac{1}{2}$ | 2 ветви     |
| $-\sqrt{2}/2$ | 2 ветви     |

Сводка показывает, как меняется ответ в типичных случаях при разных значениях параметра  $a$ .

При  $a = 0$  получается одно семейство, а при  $|a| < 1$  — две серии решений; различие определяется знаком  $a$  и симметрией синуса.

# Типичные ошибки и способы их избежать

## Пропуск второй ветви

Часто забывают вторую ветвь  $x = \pi - \alpha + 2\pi k$  и тем самым теряют половину ответов. Чтобы этого не произошло, всегда мысленно отмечайте обе точки на окружности.

## Проверка параметра

Перед вычислениями обязательно проверяйте условие  $|a| \leq 1$ . Если оно нарушено, уравнение не имеет решений, и дальнейшие преобразования только запутают.

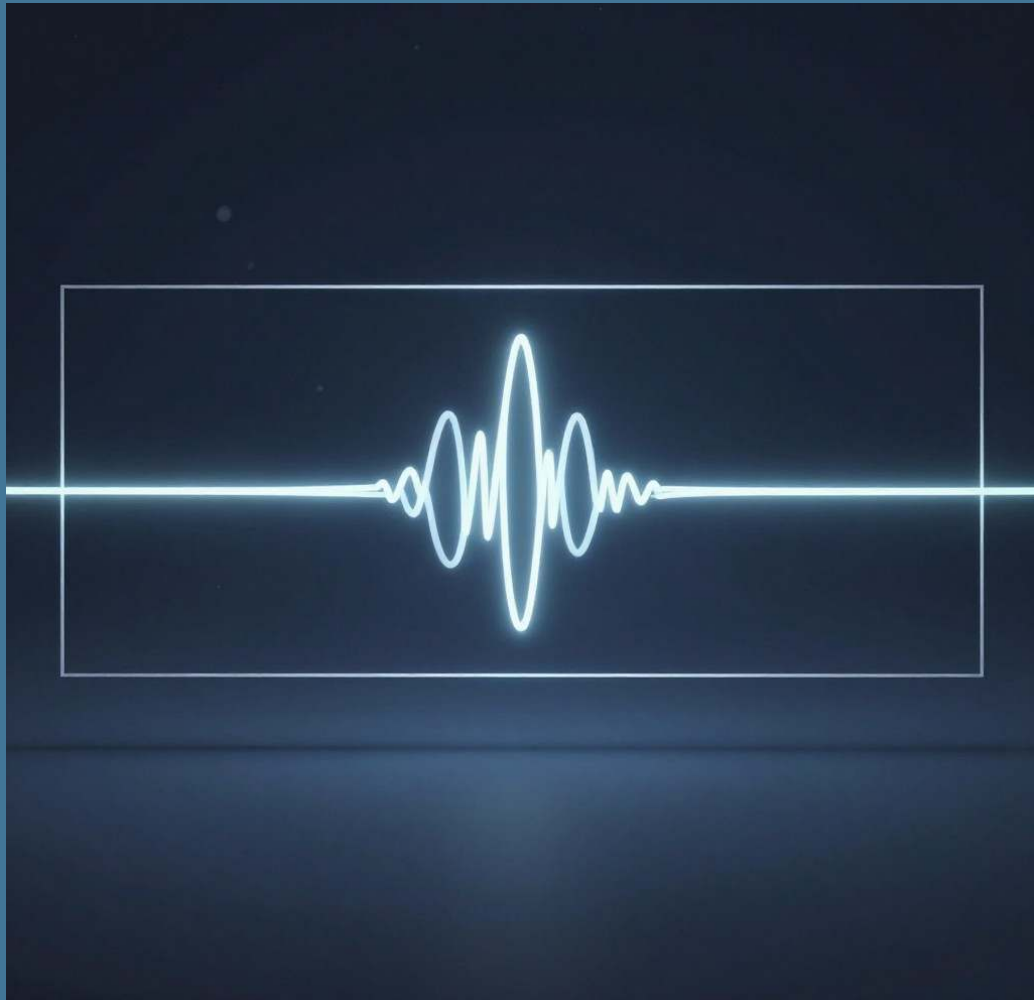
## Неверный период

Ещё одна ошибка — путать период синуса с шагом между соседними решениями. Формула содержит именно  $2\pi k$ , а не  $\pi k$ , иначе ответ становится неверным.

## Сохранить знак

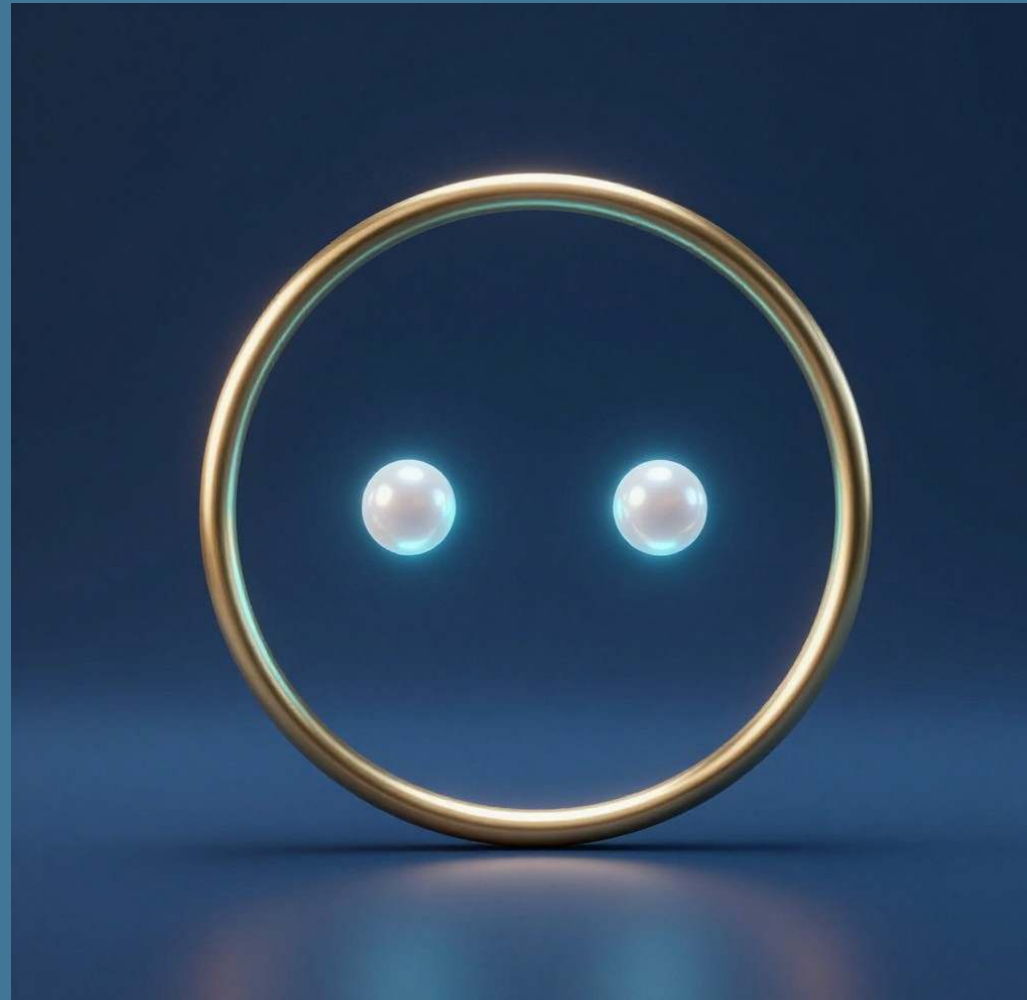
Для отрицательного  $a$  нельзя заменять  $\arcsin(a)$  удобным положительным углом. Лучше сохранить знак, а затем проверить результат подстановкой и по расположению точек.

# Три взгляда на одно уравнение



## График как фильтр

График  $y = \sin x$  отвечает на первый вопрос: есть ли пересечения с прямой  $y = a$  и сколько их на одном периоде. По нему сразу видно, когда решений нет вовсе, а когда их бесконечно много.



## Окружность как геометрия

Единичная окружность показывает, где именно находятся точки с нужной ординатой. Она объясняет симметрию двух ответов и помогает не перепутать знак угла при отрицательных значениях параметра.



## Формула как итог

Формулы дают окончательный записанный ответ в алгебраическом виде. Когда график, окружность и формулы совпадают, решение можно считать надёжно проверенным и готовым для записи.

## Проверь себя: три задания

Попробуйте решить три уравнения и сравнить ход мысли с образцом.

Во всех заданиях нужно сначала найти  $\alpha$ , затем записать две ветви общего решения и после этого отобрать только подходящие значения на заданном промежутке.

| Уравнение                     | Подсказка     |
|-------------------------------|---------------|
| $\sin x = 0$                  | $\alpha = 0$  |
| $\sin x = -\frac{1}{2}$       | $[0; 2\pi]$   |
| $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $[-\pi; \pi]$ |

Типовые примеры на формулу  $\sin x = a$

# Главное правило решения

Запомните короткий алгоритм: сначала проверьте, что параметр лежит между  $-1$  и  $1$ , затем найдите  $\alpha = \arcsin(a)$ , после этого запишите две ветви и отберите нужные  $k$ .