

Описанная и вписанная окружности четырёхугольника

Изучаем, как окружности связаны с четырёхугольником.

Где окружности помогают в геометрии

В задачах по геометрии окружности помогают находить стороны, углы, радиусы и площади. Для четырёхугольников особенно важны случаи, когда окружность касается всех сторон или проходит через все вершины.

Вписанная окружность: основное определение

1. Положение окружности

Вписанная окружность находится внутри четырёхугольника и касается каждой его стороны ровно в одной точке, не пересекая границы фигуры.

2. Расстояние до сторон

Центр такой окружности одинаково удалён от всех сторон. Это общее расстояние и есть радиус вписанной окружности, который можно использовать в вычислениях.

3. Где расположен центр

Чтобы центр был равноудалён от сторон, он лежит на биссектрисах углов четырёхугольника. Поэтому их пересечение помогает найти центр окружности.

4. Что важно помнить

Если вписанная окружность существует, то она касается всех четырёх сторон. Именно связь со сторонами отличает её от описанной окружности.



Описанная окружность: основное определение

Положение окружности

Описанная окружность проходит через все четыре вершины четырёхугольника, поэтому каждая вершина лежит на одной и той же окружности.

Равные расстояния

Центр описанной окружности равноудалён от всех вершин фигуры. Это расстояние до любой вершины называют радиусом описанной окружности.

Как находят центр

Для построения такого центра используют серединные перпендикуляры к сторонам или диагоналям. Их пересечение указывает положение центра окружности.

Главная идея

Если окружность проходит через вершины, она связана не со сторонами, а именно с углами и вершинами четырёхугольника.

Вписанная и описанная окружности: сравнение

Признак	Вписанная	Описанная
Положение	внутри	через вершины
Равное расстояние	до сторон	до вершин
Существование	$a+c=b+d$	углы 180°
Центр	биссектрисы	серединные перпендикуляры

Сравним два вида окружностей по главным признакам и положению центра.

Вписанная окружность связана со сторонами, а описанная — с вершинами. По этому отличию удобно выбирать нужный признак в задаче.

Когда у четырёхугольника есть вписанная окружность

1.

Главный признак

Четырёхугольник имеет вписанную окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон равны. Это проверяется по формуле $a + c = b + d$.

2.

Как использовать признак

Зная длины сторон, можно сразу проверить существование окружности без построения чертежа. Если равенство выполняется, четырёхугольник является касательным.

3.

Примеры фигур

Квадрат и ромб всегда подходят под это условие. Их свойства делают проверку простой, поэтому они часто используются как готовые примеры.



Свойства касательного четырёхугольника

Равные касательные

Из одной вершины к окружности можно провести две касательные. Их отрезки от вершины до точек касания равны, и это свойство часто помогает в вычислениях.

Биссектрисы углов

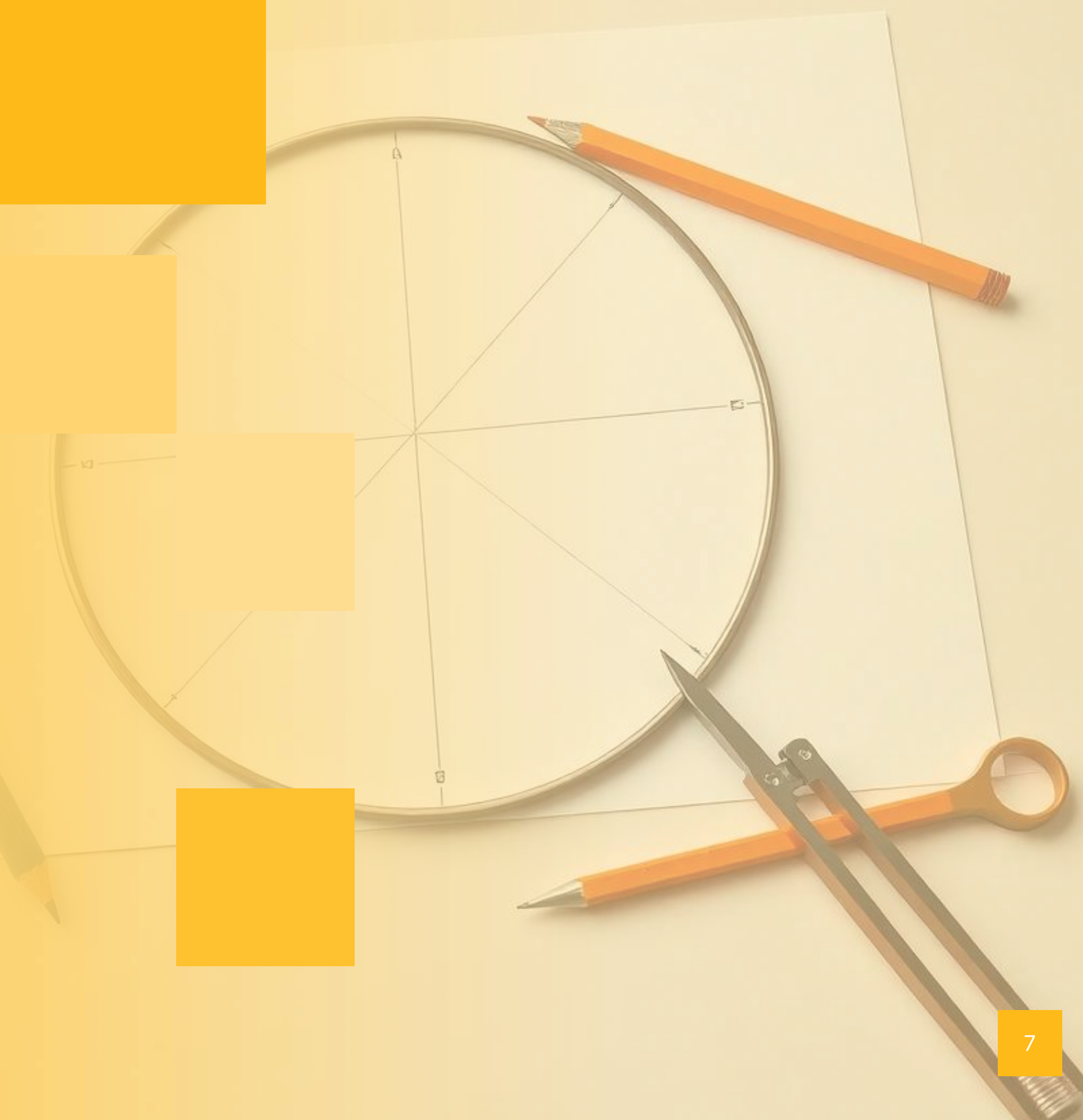
Центр вписанной окружности лежит на биссектрисах углов четырёхугольника, потому что он должен быть одинаково удалён от обеих сторон каждого угла.

Точки касания

Окружность касается всех четырёх сторон, а расстояние от её центра до каждой стороны одинаково. Это расстояние совпадает с радиусом окружности.

Практическая польза

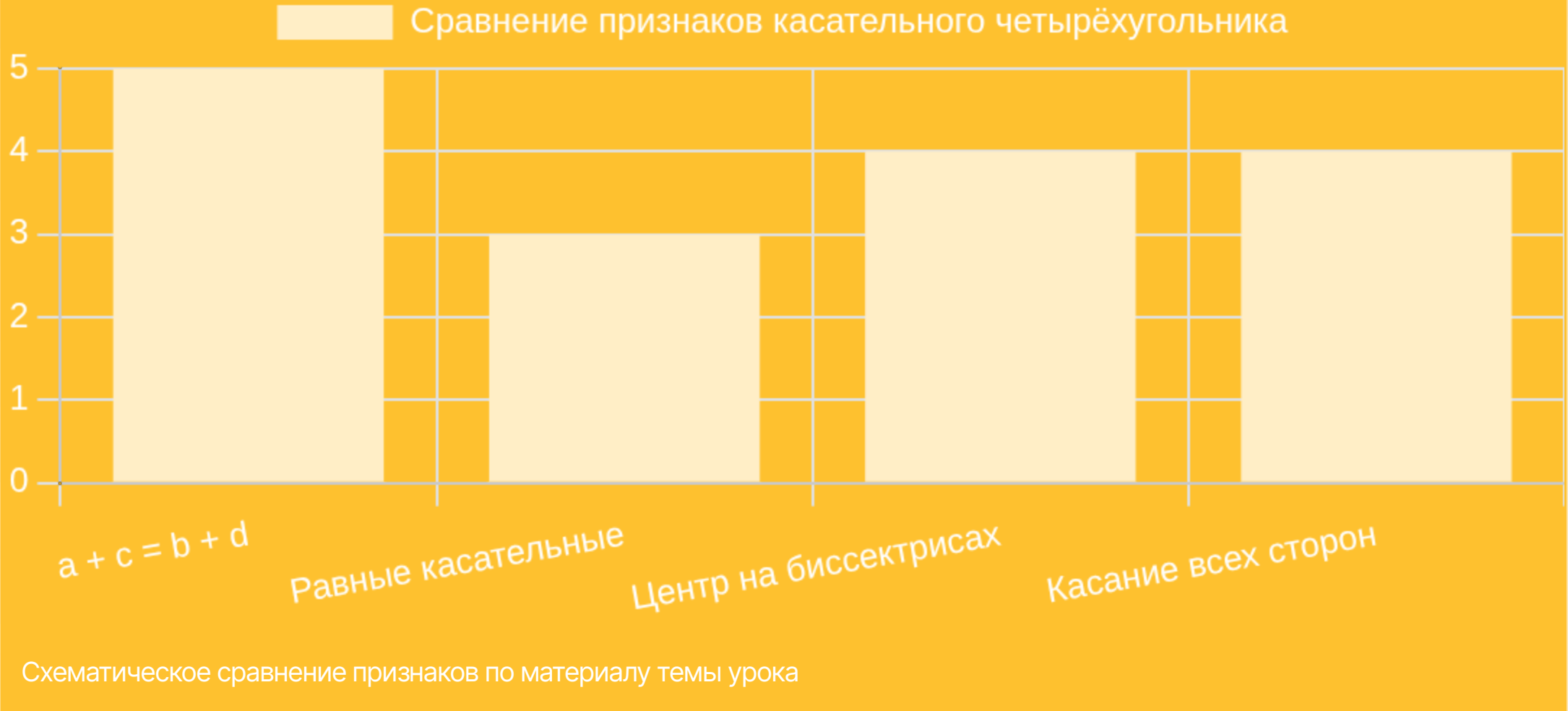
Свойства касательного четырёхугольника позволяют находить неизвестные отрезки, радиус и иногда площадь фигуры без сложных построений.



Признаки касательного четырёхугольника

На практике сначала проверяют условие равенства противоположных сторон, а затем используют геометрические свойства для вычислений.

Главным критерием остаётся равенство сумм противоположных сторон; остальные признаки подтверждают и дополняют его.



$$S = r \cdot p$$

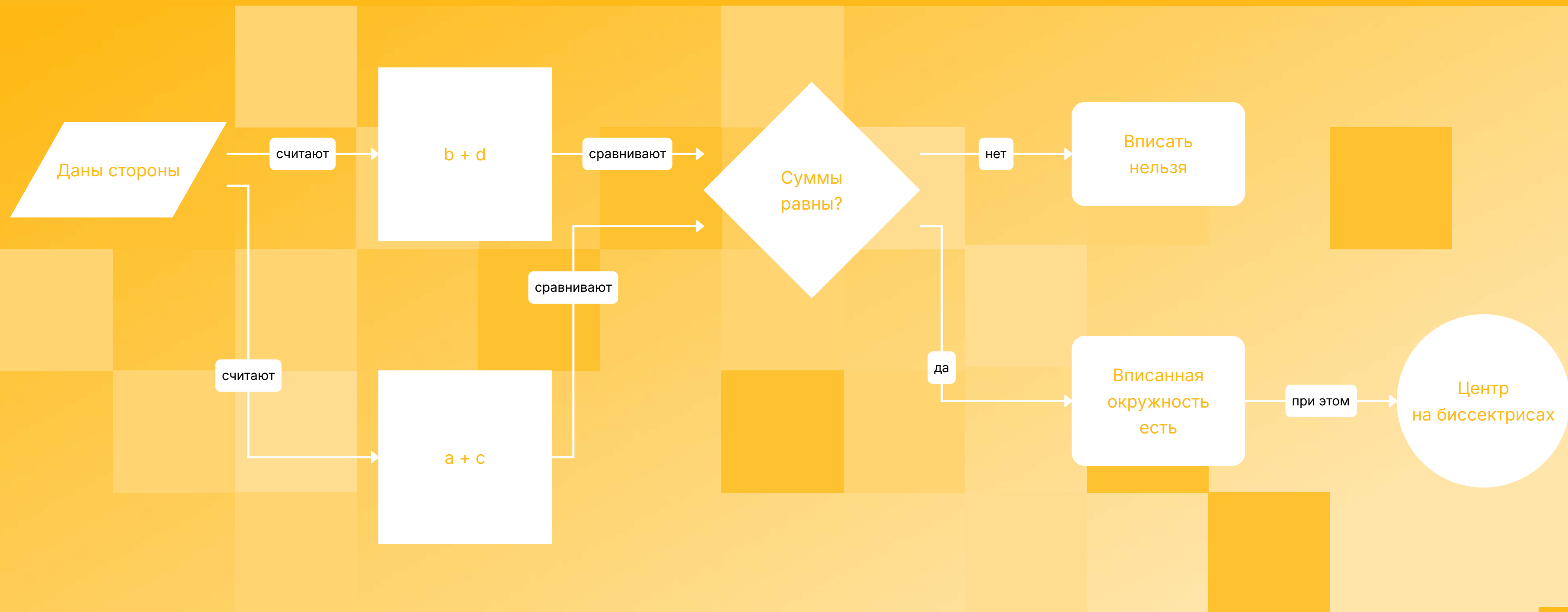
**позволяет быстро находить
площадь касательного
четырёхугольника
по радиусу и полупериметру**

Формула особенно удобна, когда известны стороны фигуры. Полупериметр берут как половину суммы всех сторон, а затем умножают на радиус вписанной окружности.

Школьная формула площади касательного четырёхугольника из курса геометрии 8 класса

Как проверить существование вписанной окружности

Алгоритм проверки по длинам сторон четырёхугольника



Когда четырёхугольник имеет описанную окружность

Проверка углов

Если сумма двух противоположных углов четырёхугольника равна 180° , вокруг него можно провести окружность через все вершины.

Пример с прямоугольником

У прямоугольника каждый угол равен 90° , поэтому противоположные углы дают 180° . Значит, описанная окружность у него существует.

Свойства циклического четырёхугольника

1. Одинаковая хорда

Если два вписанных угла опираются на одну и ту же хорду, они равны. Это свойство удобно применять, когда на рисунке отмечены дуги или общая сторона.

2. Противоположные углы

В циклическом четырёхугольнике сумма противоположных углов всегда равна 180° . По этому признаку легко проверять, может ли фигура быть вписанной в окружность.

3. Центр окружности

Центр описанной окружности находится на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам или диагоналям. В этой точке все расстояния до вершин становятся равными.

4. Полезно в задачах

Эти свойства помогают находить неизвестные углы, доказывать равенство элементов и строить центр окружности без лишних вычислений, опираясь на готовые геометрические признаки.

Признаки описанного четырёхугольника

Угловые признаки чаще всего помогают быстро распознать циклический четырёхугольник без дополнительных построений.

Главный практический признак — сумма противоположных углов 180° ; остальные свойства дополняют проверку и помогают в доказательствах.

- Сумма противоположных углов 180°
- Равенство углов на одну хорду
- Окружность через все вершины



Учебная геометрия 8 класса: свойства циклического четырёхугольника

Особые четырёхугольники и их окружности



Квадрат

Квадрат обладает сразу двумя окружностями: вписанной и описанной. Это связано и с равенством всех сторон, и с прямыми углами, поэтому он подходит как самый удобный пример.



Ромб

У ромба есть вписанная окружность, потому что все его стороны равны. Однако описанная окружность появляется не всегда и в обычном ромбе чаще всего отсутствует.



Прямоугольник

Прямоугольник имеет описанную окружность, так как все его углы прямые. Вписанная окружность существует только у частного случая — когда прямоугольник становится квадратом.



Параллелограмм

У параллелограмма обе окружности одновременно бывают только тогда, когда он является квадратом. В остальных случаях его углы и стороны не дают нужных признаков.

Какие четырёхугольники имеют обе окружности

Фигура	Вписанная	Описанная	Условие
Квадрат	Да	Да	Всегда
Ромб	Да	Нет	Стороны равны
Прямоугольник	Нет	Да	Все углы 90°
Параллелограмм	Нет	Нет	Только квадрат

Свойства особых четырёхугольников из школьной геометрии

Сравнение показывает, как свойства сторон и углов влияют на наличие вписанной и описанной окружностей.

Квадрат — единственный четырёхугольник из списка, у которого обе окружности существуют без дополнительных условий.

Геометрический чертёж с окружностями



Вписанная окружность

На чертеже видно, как окружность касается всех сторон четырёхугольника. Точки касания помогают проверить равенство касательных, проведённых из одной вершины.

Центр вписанной окружности

Его отмечают в точке пересечения биссектрис углов. От этой точки до каждой стороны проведены одинаковые радиусы, что показывает равное расстояние.

Описанная окружность

Внешняя окружность проходит через все вершины фигуры. Такая схема помогает увидеть, что вершины лежат на одной окружности, а не внутри неё.

Центр описанной окружности

Он находится на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам или диагоналям. Это позволяет быстро строить окружность по нескольким известным точкам.

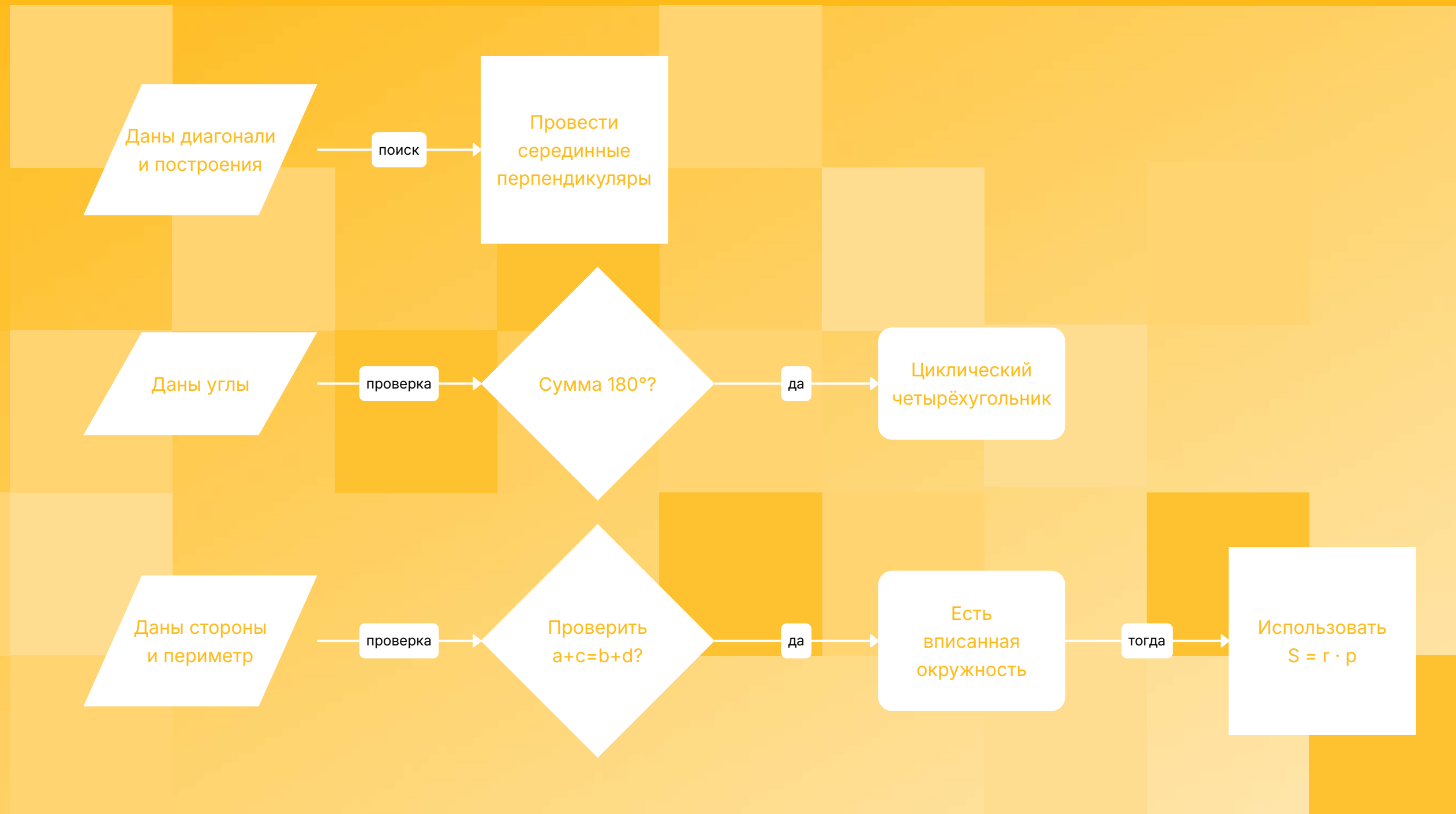
Вспомогательные линии

Биссектрисы, перпендикуляры и радиусы делают чертёж наглядным. По ним легко объяснить, почему окружности существуют и какие свойства используются в доказательстве.



Как выбрать признак в задаче

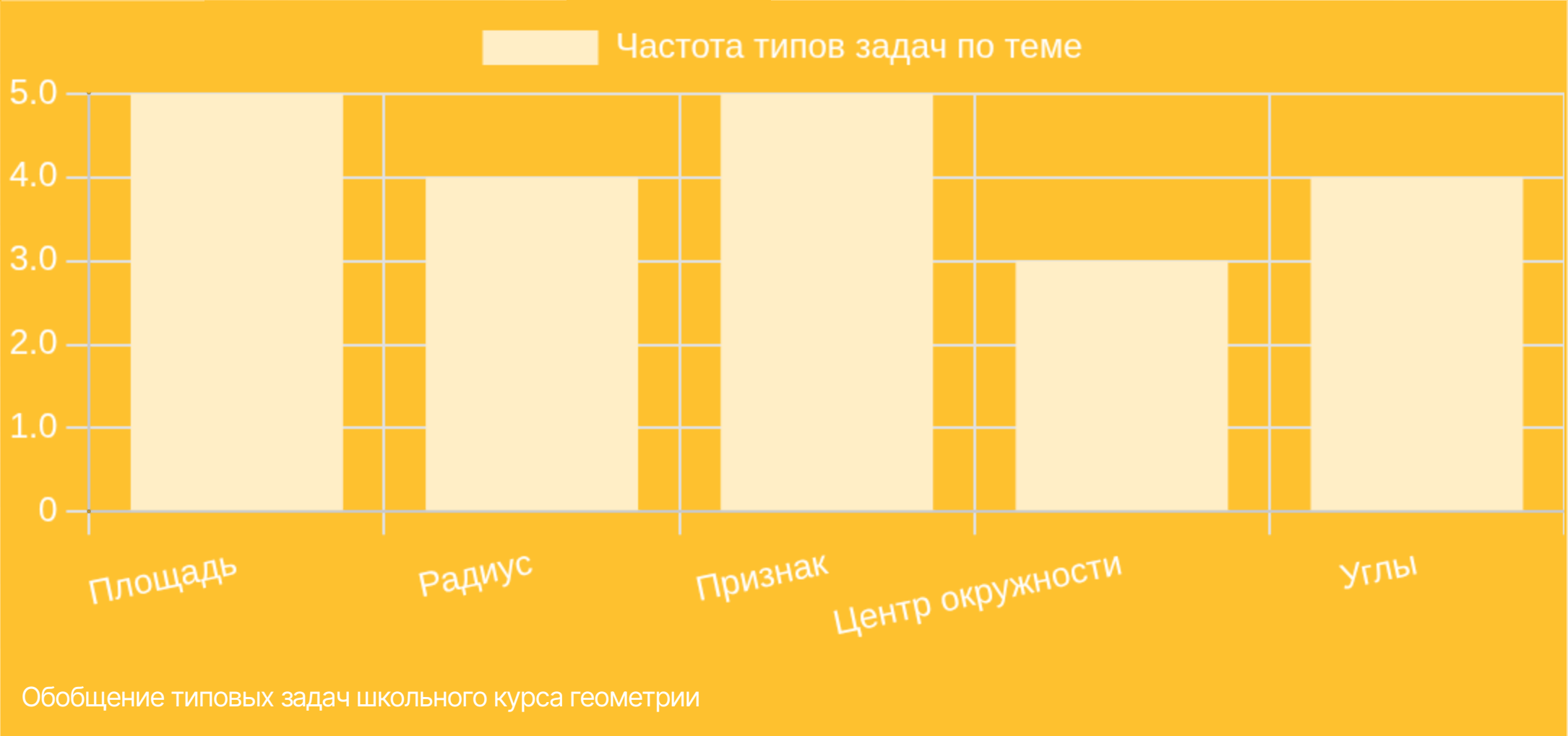
Переход от условия задачи к нужному признаку или построению



Где чаще встречаются такие задачи

В задачах по теме часто сочетаются вычисления, построения и доказательства, поэтому полезно узнавать нужный признак по условию сразу.

Чаще всего встречаются задачи на признаки и площадь; реже всего — на нахождение центра окружности, потому что они требуют дополнительных построений.



Типичные ошибки при работе с окружностями

Путают окружности

Иногда вписанную и описанную окружности считают одним и тем же объектом. Нужно помнить: одна касается сторон, а другая проходит через вершины.

Смотрят только на рисунок

Внешний вид фигуры может быть обманчивым. Для ответа важно не угадывать, а проверять точный признак: по сторонам или по углам.

Забывают условия

Часто пропускают равенство противоположных сторон у касательного четырёхугольника или сумму противоположных углов 180° у циклического. Без этого доказательство неполное.

Неверно используют диагонали

Не каждая диагональ проходит через центр окружности. Это зависит от вида четырёхугольника и от того, какая окружность рассматривается в задаче.

Что нужно запомнить об окружностях четырёхугольника

Вписанная окружность проверяется по сторонам,
а описанная — по углам. Если помнить два главных
признака, легче находить радиус, площадь, центр
окружности и распознавать нужный четырёхугольник.