

Геометрические фигуры на плоскости и в пространстве

От точек и углов к многогранникам и телам вращения: учимся видеть форму и считать свойства.

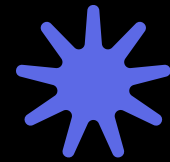
Почему тема важна в геометрии 11 класса



В ней сходятся планиметрия и стереометрия: доказательства, измерения и вычисления опираются на признаки фигур и их элементы. Формулы площади и объёма становятся инструментом, а чертёж — языком для решения задач. Эти же идеи нужны в архитектуре и инженерии, от упаковки до 3D-моделирования.

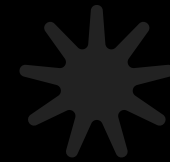


Базовые объекты геометрии



Точка обозначает положение без размеров, прямая задаёт направление и бесконечность, а отрезок имеет конечную длину. Луч начинается в одной точке и продолжается дальше, не заканчиваясь.

01



Угол образуют два луча с общей вершиной; величина угла измеряется в градусах. Именно через углы мы описываем наклоны, повороты и взаимное расположение объектов.

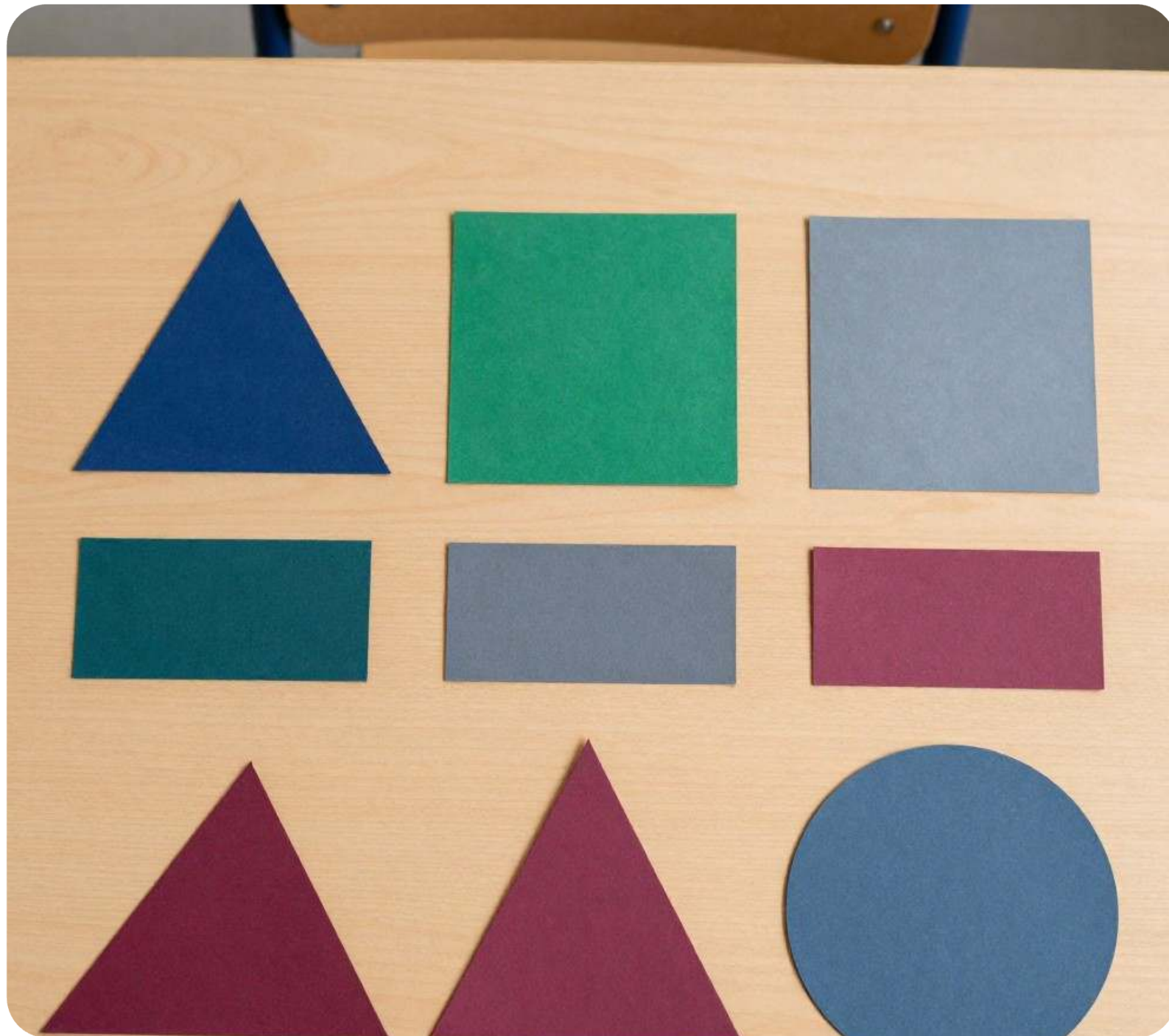
02



Эти исходные элементы помогают строить определения и доказывать свойства более сложных фигур. Понимание точки, прямой, луча и угла делает чертёж осмысленным, а не просто «картинкой».

03

Плоские фигуры и их признаки



01

Что значит «плоская» фигура

Плоские фигуры целиком лежат в одной плоскости: треугольник, квадрат, прямоугольник, ромб, трапеция, окружность. Их изучают через элементы и связи между ними, чтобы по рисунку восстанавливать форму.

02

Основные признаки на чертеже

Ключевые признаки — число сторон, равенство сторон, параллельность, величины углов, наличие центра и радиуса. Для опоры в визуальном наборе подписывают характерные элементы и свойства, помогающие различать фигуры.

Сравнение основных плоских фигур



Фигура	Стороны/граница	Углы	Ключевое свойство
Треугольник	3 стороны	сумма углов 180°	геометрическая определённость по элементам
Квадрат	4 равные стороны	все по 90°	фиксирует и форму, и размеры
Прямоугольник	противоположные стороны равны	все по 90°	параллельность и равенство сторон
Круг	граница — окружность	угловых характеристик нет	все точки границы равноудалены от центра

Школьный курс геометрии (планиметрия).

Инварианты (число сторон, равенства, угловые характеристики и расстояние до центра) позволяют уверенно отличать фигуры по их ключевым признакам.

Различия читаются через устойчивые параметры: для многоугольников важны стороны и углы, для круга — расстояние до центра.

Треугольники: классификация и свойства

01

По сторонам треугольники делят на равносторонние, равнобедренные и разносторонние. По углам различают остроугольные, прямоугольные и тупоугольные — именно это помогает выбирать ход решения.

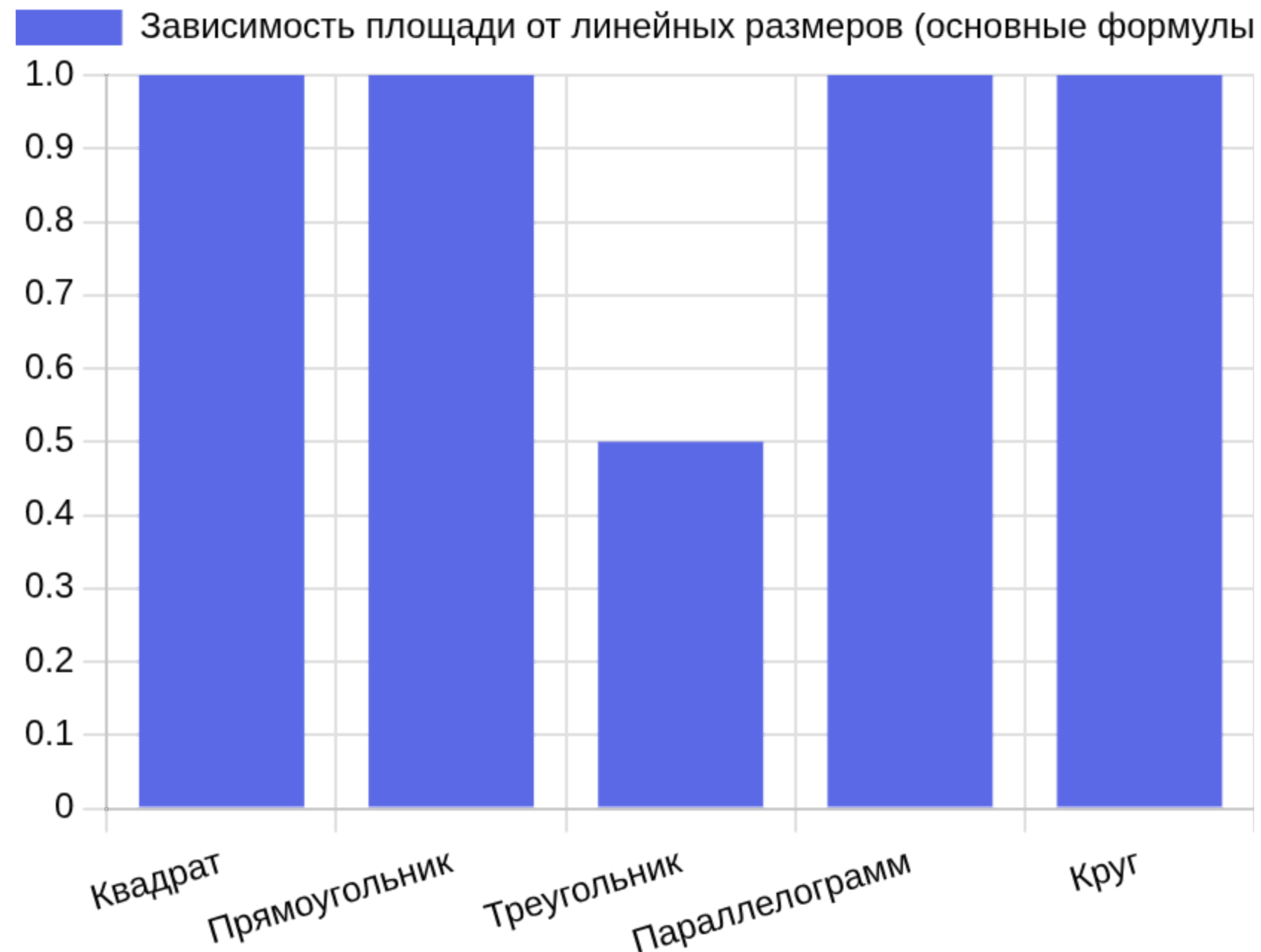
02

Для любого треугольника действует неравенство: каждая сторона меньше суммы двух других. Оно гарантирует, что построение возможно, и служит базовой проверкой корректности заданных длин.

03

Внешний угол треугольника равен сумме двух несмежных внутренних углов. Сумма внутренних углов любого треугольника составляет 180° , поэтому по двум углам легко находить третий и использовать равенства.

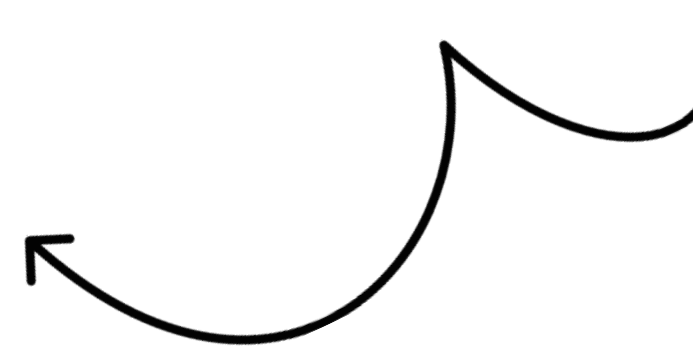
Формулы площади плоских фигур



Сравнивая формулы, заметим: одинаковая «единица измерения» площади всегда получается из линейных параметров — стороны, высоты или радиуса — по правилам степени.

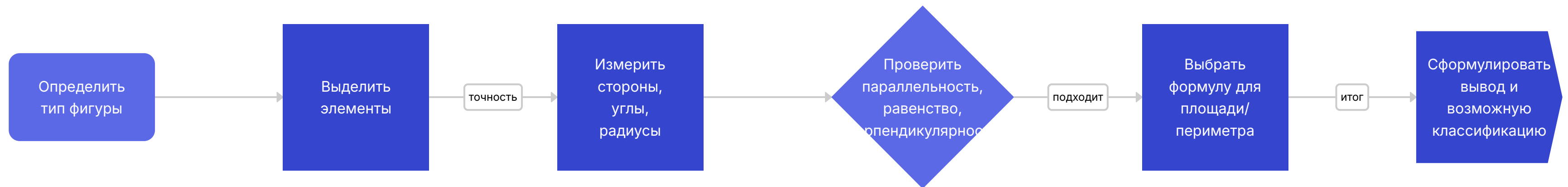
По диаграмме видно, что площадь определяется не только размерами, но и типом фигуры: для многоугольников важны основание и высота, для круга — радиус.

Школьный курс геометрии (формулы площадей).



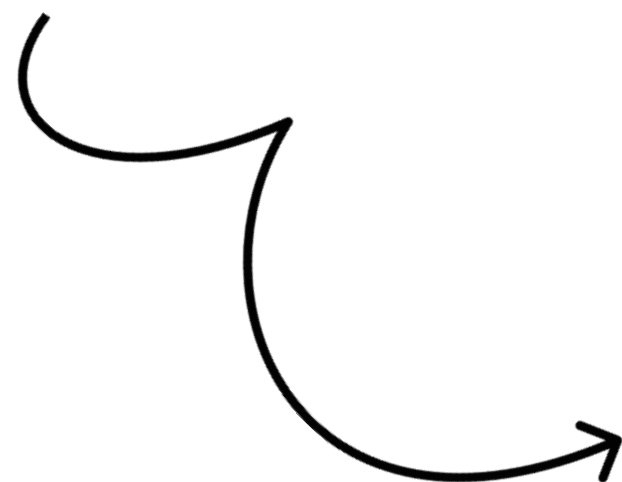
Алгоритм исследования плоской фигуры

Последовательность применяется в задачах на построение, вычисление и распознавание.





Формула для числа диагоналей позволяет заранее оценить, сколько внутренних соединений можно провести. Это важно при анализе четырёхугольников, пятиугольников и при работе с разбиениями на треугольники.

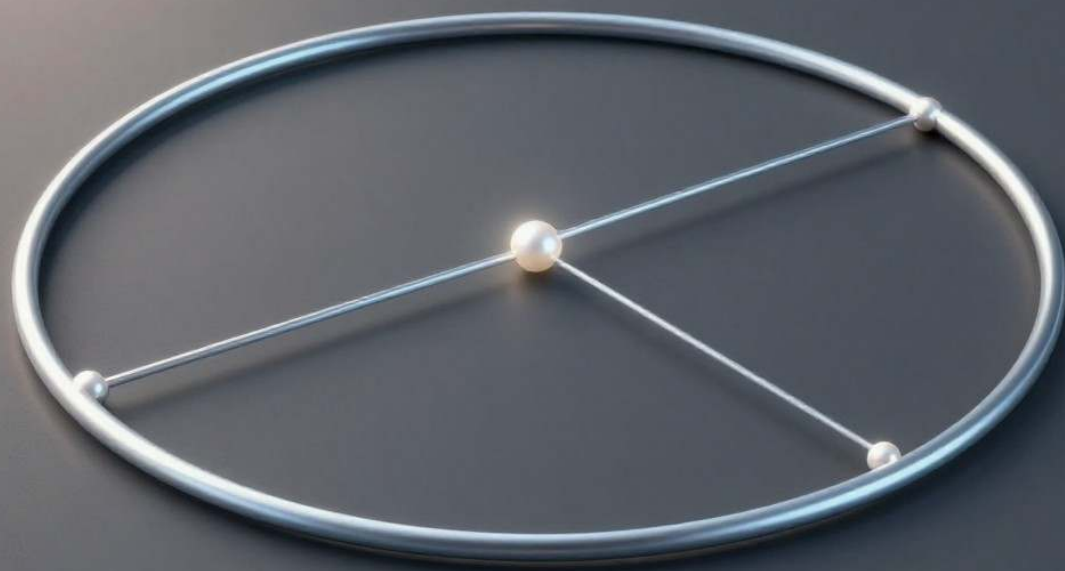


$$n(n-3)/2$$

Количество диагоналей растёт с числом сторон и усложняет внутреннюю структуру многоугольника.

Школьный курс геометрии (свойства многоугольников).

Окружность и круг: истории для иллюстраций



Окружность как «граница-расстояние»

Представьте окружность как ровную дорожку на плоскости: все точки границы находятся на одинаковом расстоянии от центра. На картинке удобно выделить центр и провести радиус к нескольким точкам — это сразу показывает ключевую идею определения.



Круг как «заполненная площадь»

Если к окружности добавить внутреннюю область, получится круг. Визуальная подсказка — закрасить диск внутри границы и оставить саму окружность как линию-границу. Так легче различать понятия «окружность» и «круг».



Хорда, дуга и касательная в одном кадре

Для наглядности можно показать хорду как отрезок между двумя точками окружности и дугу как часть границы между ними. Рядом проводят секущую и касательную: секущая пересекает окружность, касательная касается в одной точке. Это помогает связать термины с рисунком.

Переход от плоскости к пространству



Три измерения

В пространстве фигуры описывают длиной, шириной и высотой. Это сразу меняет подход: то, что на плоскости было «линией», в объёме становится ребром, а «плоская фигура» — гранью.



Грани, рёбра, вершины

У многогранников поверхности состоят из граней, которые соединяются рёбрами; их пересечение образует вершины. Такие элементы удобно подсчитывать и использовать в задачах на распознавание.



Основания и боковая поверхность

Многие тела имеют основания и боковую поверхность. Например, у призм основание задаёт многоугольник, а боковые грани соединяют соответствующие вершины, образуя «каркас» тела.



Объём как итог

Главная цель в стереометрии — объём: сколько «места» занимает тело. Объём учитывает форму в трёх измерениях, поэтому выводы нельзя переносить напрямую из формул площадей.



Многогранники



01

Многогранник ограничен конечным числом многоугольных граней, которые полностью закрывают тело. На школьном уровне особенно часто рассматривают призму и пирамиду, потому что их элементы удобно выделять на рисунках.

02

У призмы два равных основания лежат в параллельных плоскостях, а боковые грани образуют «переход» между ними. В результате появляются рёбра и вершины, по которым легко проверять геометрические связи.

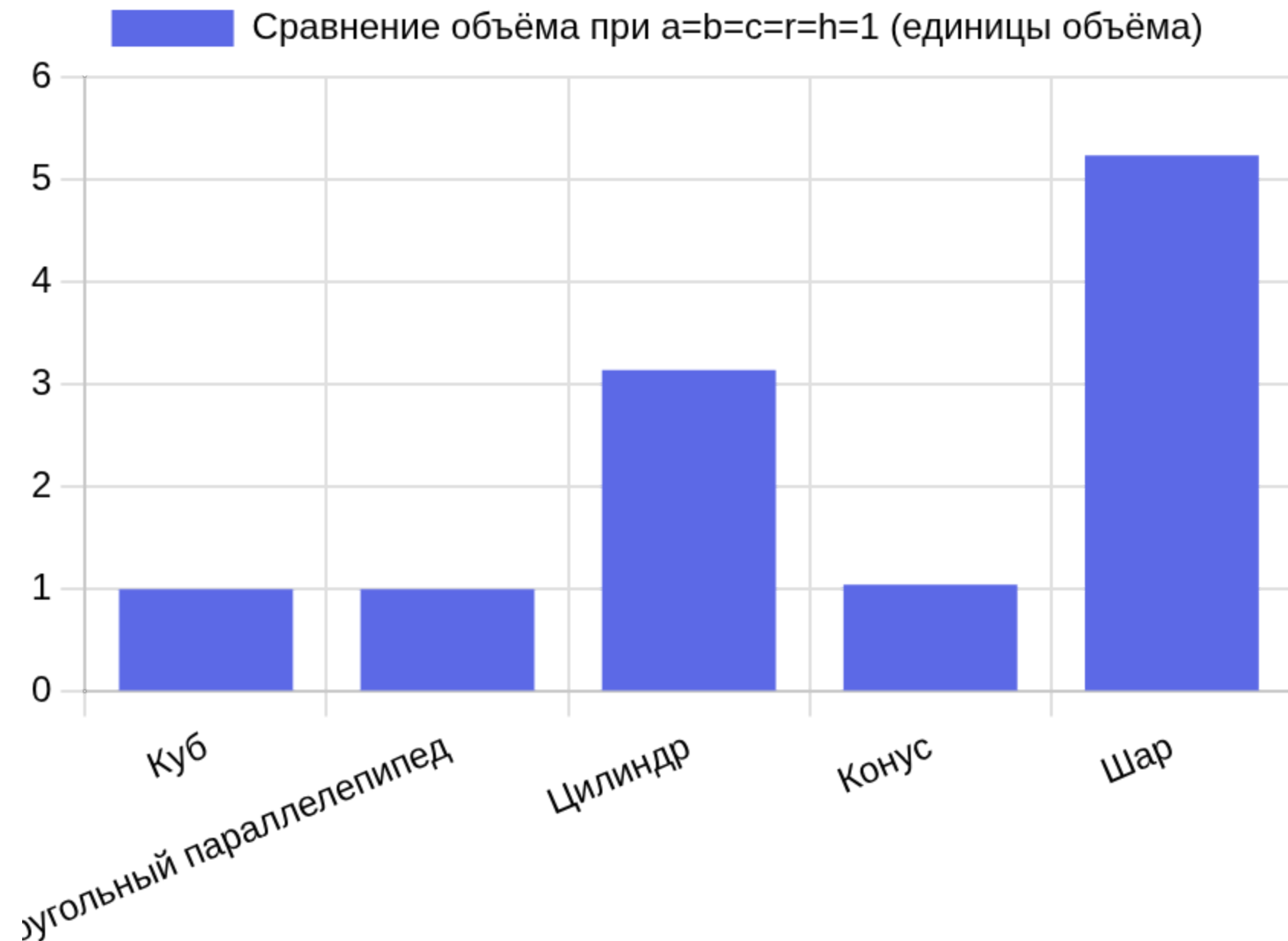
03

У пирамиды основание — один многоугольник, а боковые грани — треугольники, сходящиеся в одной вершине. Это отличает её от призмы и позволяет применять формулы после корректного определения высоты и апофемы.

04

Куб и прямоугольный параллелепипед — частные случаи многогранников. Они особенно полезны в задачах на построение и измерение, потому что их грани и углы повторяют знакомые плоские фигуры.

Формулы объёма пространственных тел

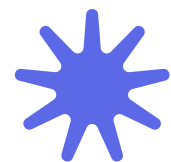


Важно видеть, что в формулах цилиндра и конуса объём выражается через площадь основания (πr^2) и высоту h .

Даже при одинаковых «базовых размерах» одинаковые h и r дают разные объёмы: шар и цилиндр оказываются крупнее, а конус — существенно меньше.

Школьная геометрия; вычисления по формулам $V(\text{куб})=a^3$, $V(\text{параллелепипед})=abc$, $V(\text{цилиндр})=\pi r^2 h$, $V(\text{конус})=\frac{1}{3}\pi r^2 h$, $V(\text{шар})=\frac{4}{3}\pi r^3$, при $a=b=c=r=h=1$.

Сравнение пространственных фигур



Фигура	Основания	Ключевые элементы
Куб	1 (квадрат)	6 граней-квадратов, 12 рёбер, 8 вершин
Призма	2 (равные многоугольники)	боковые грани — параллелограммы; рёбра соединяют соответствующие вершины
Пирамида	1	боковые грани — треугольники, сходящиеся в вершине
Цилиндр	2 (равные окружности)	две круговые поверхности и боковая поверхность, соединяющая основания

Сопоставление основано на типе поверхности и наборе элементов: сколько оснований имеет фигура, как устроены боковые поверхности, и присутствует ли вершина.

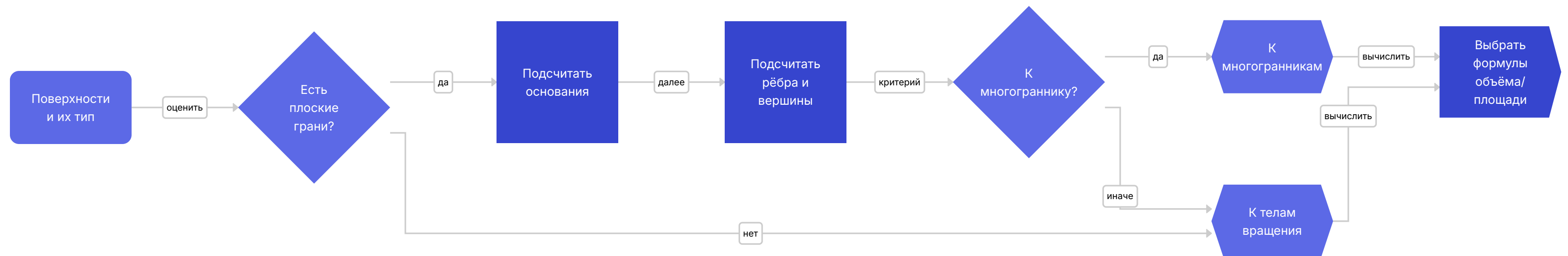
Различия определяются тем, является ли боковая поверхность «плоской» (грани) или «криволинейной» (окружности), а также количеством оснований и наличием вершины.

Школьная геометрия.



Как распознавать пространственное тело

Алгоритм логического анализа по чертежу, развертке или описанию.

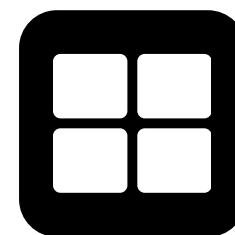


Сечения и развёртки



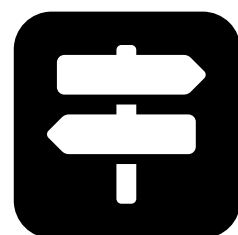
Сечение как «снимок»

Сечение получают, когда плоскость пересекает тело. По форме среза можно понять внутреннюю структуру: какие рёбра и грани «встречает» плоскость, и как меняется контур.



Развёртка для восстановления

Развёртка — это плоское изображение поверхности тела, полученное при «распрямлении» граней. Она помогает находить площади поверхностей и уверенно решать задачи на развертывание.



Связь планиметрии и стереометрии

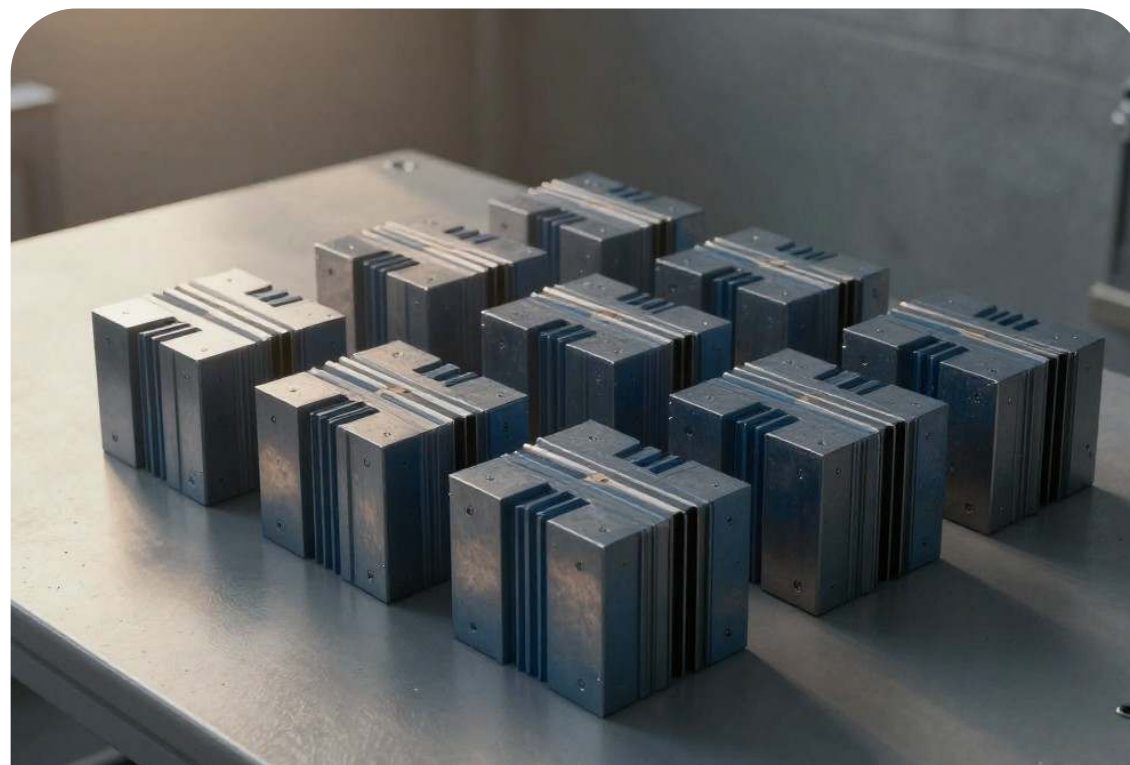
В задачах удобно переводить стереометрию в плоскую геометрию: после построения сечения или развёртки применяют знакомые формулы площадей, а затем возвращаются к объёму или площади поверхности.

Геометрия в жизни и технологиях



Архитектурные каркасы: от эскиза к объёму

Проектирование зданий начинается с чертежей, где формы задаются прямоугольниками, треугольниками, призмами и цилиндрами. По ним согласуют размеры перекрытий и опор, а затем переносят информацию в трехмерную модель, чтобы избежать ошибок на этапе строительства.



Инженерные детали и упаковка: рациональная форма

Технические устройства часто проектируют из повторяющихся геометрических элементов: цилиндров, призм и параллелепипедов. В упаковке это особенно заметно — плоские развёртки и точные размеры помогают уменьшать расход материала и удобно размещать предметы на складе.



Роботы и компьютерная графика: точность в каждом шаге

В робототехнике и компьютерной графике тела и их части описывают геометрическими примитивами. Переход от плоскостных схем к 3D-моделям позволяет рассчитывать траектории, проверять столкновения и визуализировать объёмы так, чтобы они соответствовали реальности.

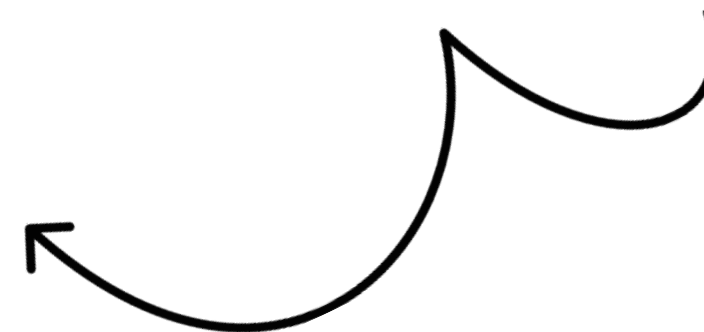
Плоские и пространственные фигуры вокруг нас



В этой диаграмме не используются статистические проценты: единица означает, что соответствующие типы форм регулярно встречаются в задачах и наблюдениях.

Несмотря на разные сферы применения, геометрия остаётся «общим языком»: архитектура и упаковка опираются на правильные тела, а природа часто использует формы, которые эффективно заполняют пространство.

Качественная схема на основе школьных примеров и типичных наблюдений (без внешних измеримых данных, дата: 2026-05-14).



Типичные ошибки при работе с фигурами

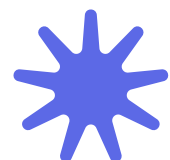
Путают периметр и площадь: периметр измеряют в линейных единицах (например, см), а площадь — в квадратных (см^2). Из-за этого неправильно подставляют числа в формулы и получают «несовместимые» величины.

01

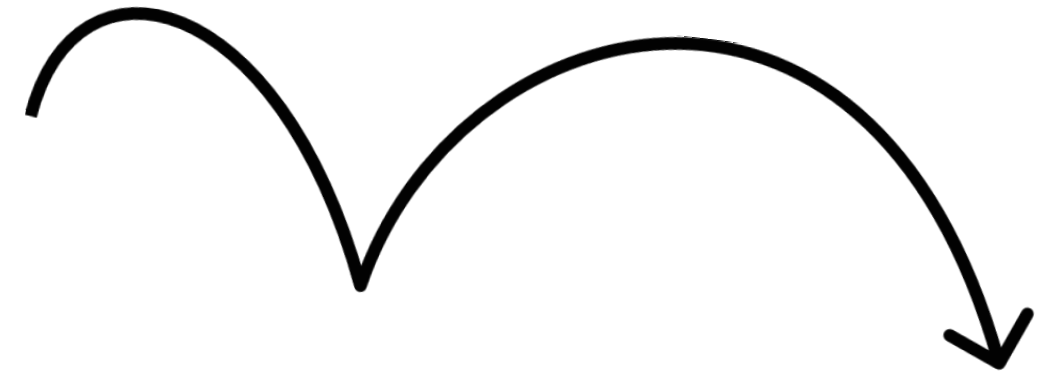
02

Смешивают понятия грань–ребро и круг–окружность. Например, при подсчёте элементов тела рассматривают именно грани как поверхности, а окружность — как линию, тогда как круг включает внутренние точки.

Неверно применяют формулы площади и объёма в комбинированных задачах: подменяют высоту нужным отрезком, забывают про радиус или «удваивают» основание там, где оно одно. Проверьте единицы измерения и логику размеров.



Геометрия, которая превращает рисунок в расчёт



Плоские фигуры описывают форму на плоскости, а пространственные — объекты в объёме. Их свойства определяются элементами, измерениями и формулами площади и объёма. Для 11 класса это основа доказательств и точных вычислений.

