

Теорема Менелая: связь прямой и пропорций в треугольнике

Одна прямая задаёт точное числовое условие для трёх отрезков в треугольнике.

Почему эту теорему изучают в 8 классе

В 8 классе Менелай помогает работать с отношениями отрезков прямо на чертеже, без координат и измерений. Она связана с подобием, пропорциями и признаком коллинеарности, поэтому часто нужна в задачах с треугольником и секущей прямой.



1

**произведение трёх отношений
отрезков равно единице.**

Если прямая пересекает стороны
треугольника ABC в точках K, L и M, то
 $AK/KB \cdot BL/LC \cdot CM/MA = 1$.

Теорема Менелая, школьная планиметрия

Условия теоремы и её результат

Условие	Где лежат точки	Что получается
Треугольник ABC	K на AB (или её продолжении)	$AK/KB \cdot BL/LC \cdot CM/MA = 1$
Секущая прямая	L на BC (или её продолжении)	точное числовое условие
Общая прямая	M на CA (или её продолжении)	проверка коллинеарности и вычисления

Теорема работает, когда точки пересечения лежат на одной прямой, а отношения берутся к «соседним» вершинам.

Главная проверка в задачах — корректно выбрать стороны (или их продолжения) и пары отрезков для каждого отношения.

Школьная формулировка теоремы Менелая

Порядок действий в задачах на теорему Менелая

Схема помогает превратить рисунок в уравнение.

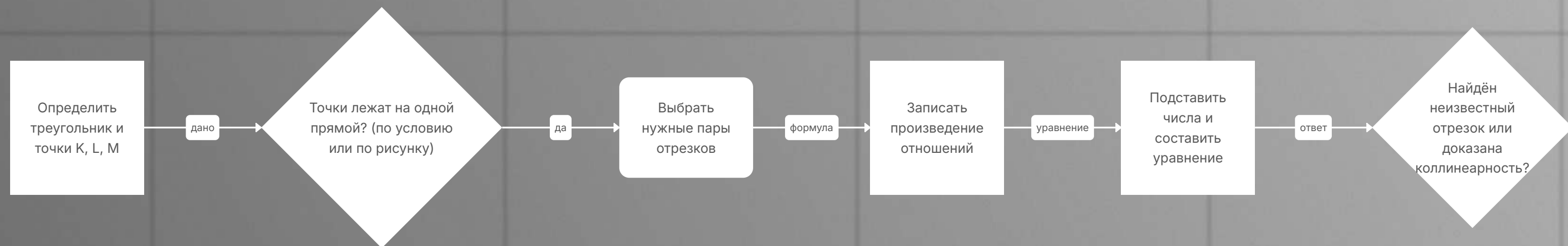


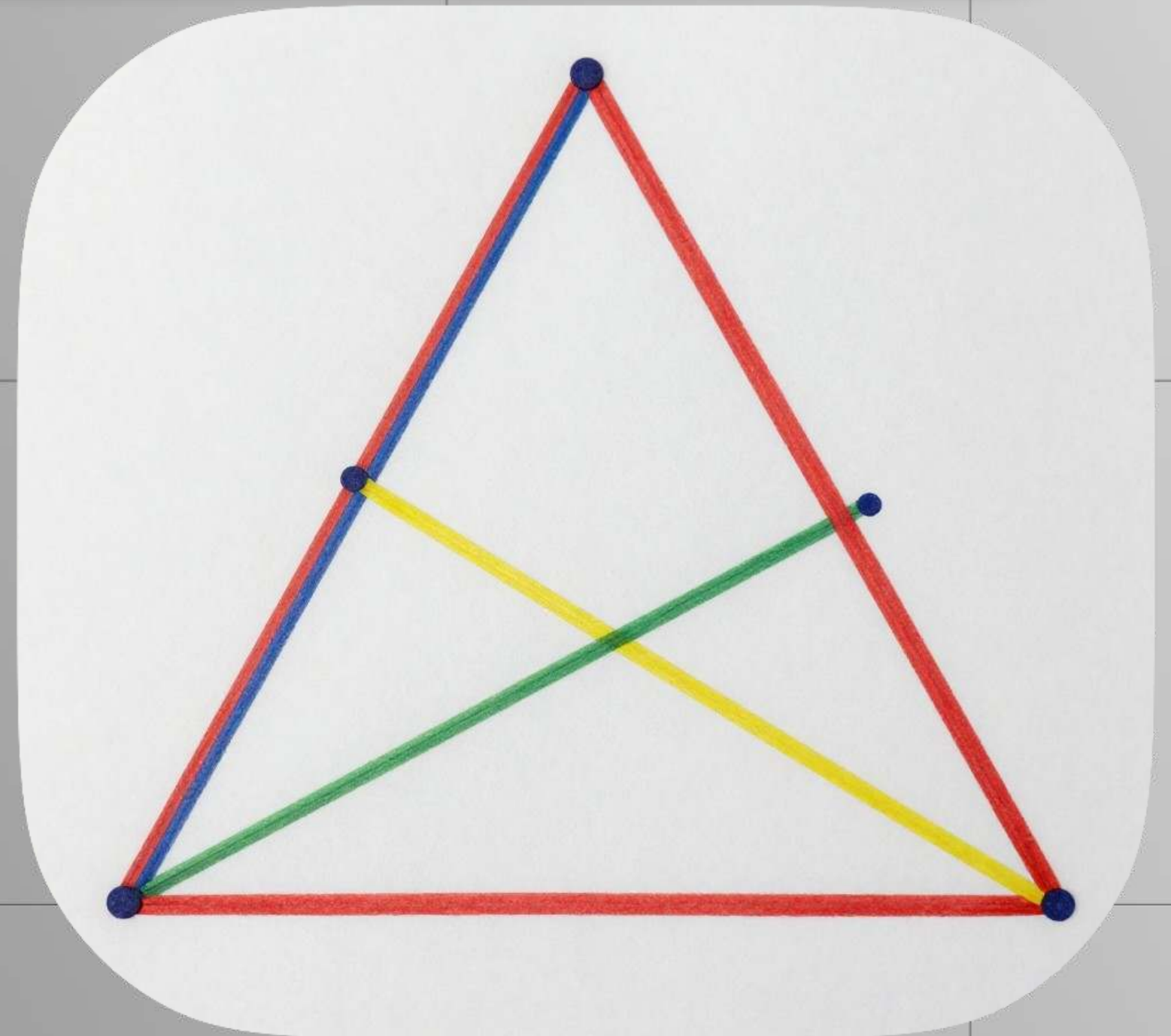
Схема треугольника с секущей прямой

Что показывает рисунок

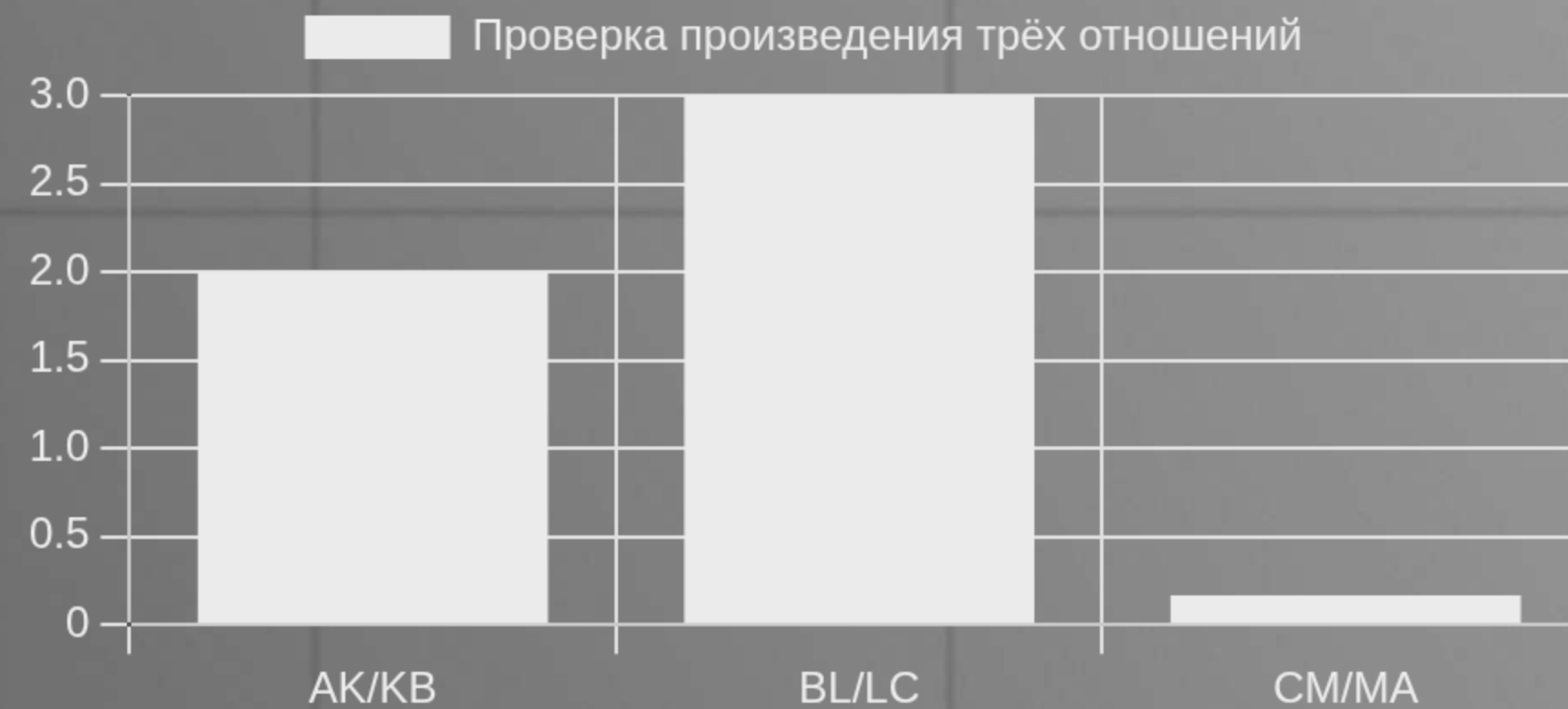
Треугольник ABC пересекается прямой, которая проходит через точки K на AB, L на BC и M на CA. Важно, что эти три точки принадлежат одной прямой.

Какие отрезки входят в формулу

Отмечаются пары отрезков у вершин: AK и KB, BL и LC, CM и MA. По ним составляют три дроби и затем перемножают, получая условие теоремы.



Пример отношений отрезков в теореме Менелая



Рассуждение по заданным отношениям (2, 3 и 1/6)

Если перемножить 2, 3 и $1/6$, получится 1, как требует теорема.

Числа подтверждают именно правило произведения: одно неверное отношение разрушает равенство.

Направленные отрезки и их роль в формуле

Длины обычных отрезков всегда неотрицательны, но иногда точка К, L или M лежит на продолжении стороны треугольника. Тогда нужно учитывать направление на прямой, а не только размер.

Направленные отрезки позволяют сохранять единое правило даже при «перевороте» положения точки. В результате формула остаётся верной для разных конфигураций, включая случаи с продолжениями сторон.

Без направленных отрезков легко получить ошибку со знаком: равенство может казаться нарушенным из-за неправильного выбора «пары» при отношении или из-за подстановки обычной длины.

Обратная теорема Менелая

Если для точек K, L и M выполняется равенство $AK/KB \cdot BL/LC \cdot CM/MA = 1$, то эти точки обязательно лежат на одной прямой. Это утверждение называют обратной теоремой Менелая.

В задачах на доказательство удобно начинать с вычислений: находят или проверяют произведение трёх дробей по известным отрезкам. Если получилось 1, остаётся сделать вывод о коллинеарности.

Такой переход особенно помогает, когда геометрический вывод нужно получить строго из численного условия, а не из «внешнего вида» рисунка.

Теорема Менелая и теорема Чева: главное различие

Теорема	Какая геометрия рассматривается	Тип связи
Менелай	Точки лежат на одной прямой (секущая через стороны)	Проверка и вычисления через отношения отрезков
Чева	Три прямые из вершин пересекаются в одной точке	Проверка и вычисления через отношения отрезков

Сравнение школьных теорем о пропорциях

Обе теоремы работают с отношениями на сторонах треугольника, но описывают разные геометрические ситуации.

Выбор теоремы зависит от рисунка: если фигурирует «одна прямая через стороны» — нужен Менелай; если «три прямые из вершин сходятся» — Чева.

Как распознать задачу на теорему Менелая



Треугольник и секущая прямая

В условии почти всегда есть треугольник и прямая, которая пересекает его стороны. Важно, чтобы прямая проходила через три точки пересечения со сторонами или их продолжениями.



Три точки K, L, M

Отмечены точки пересечения: обычно K на AB, L на BC, M на CA или на продолжениях. Если в рисунке видны три такие точки на одной прямой, это прямой намёк на Менелая.



Отношения отрезков — ключевые данные

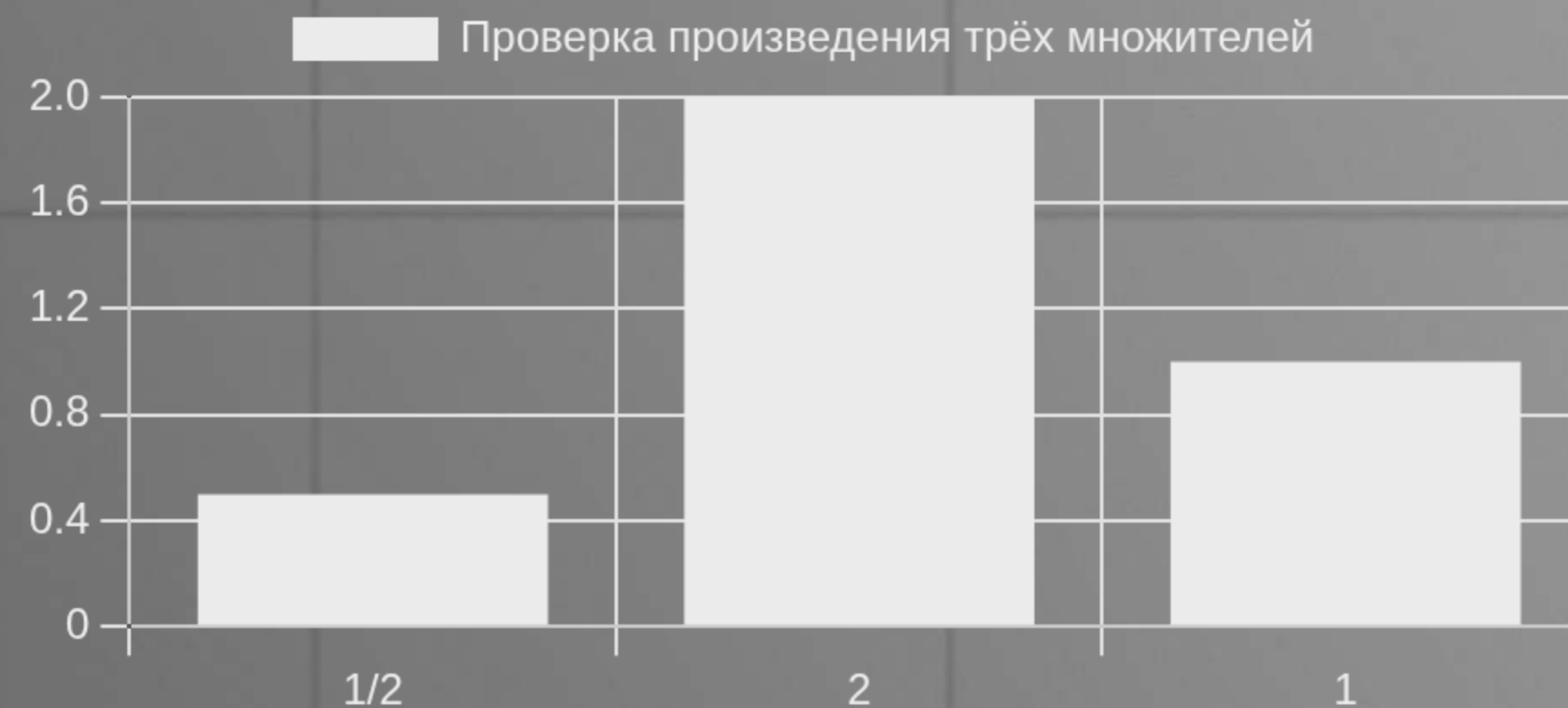
В условии часто даны отношения вида AK/KB , BL/LC или числовые длины отдельных отрезков. По ним составляют произведение трёх дробей и проверяют условие равенства единице.



Что требуется: доказать или найти

Задача может просить доказать коллинеарность точек K, L, M или найти неизвестную длину по известным. В обоих случаях решают через одно и то же произведение трёх отношений.

Проверка условия на простом числовом примере



Учебный пример (без внешних данных), 12.05.2026

Если перемножить три заданных отношения, получается $0,5 \times 2 \times 1 = 1$. Важно смотреть именно на произведение, а не на отдельные дроби по отдельности.

Полученное равенство с единицей соответствует условию теоремы Менелая. Значит, в правильной конфигурации три точки должны лежать на одной прямой.

Алгоритм решения задачи на нахождение длины

Логика решения: от рисунка к формуле и обратно



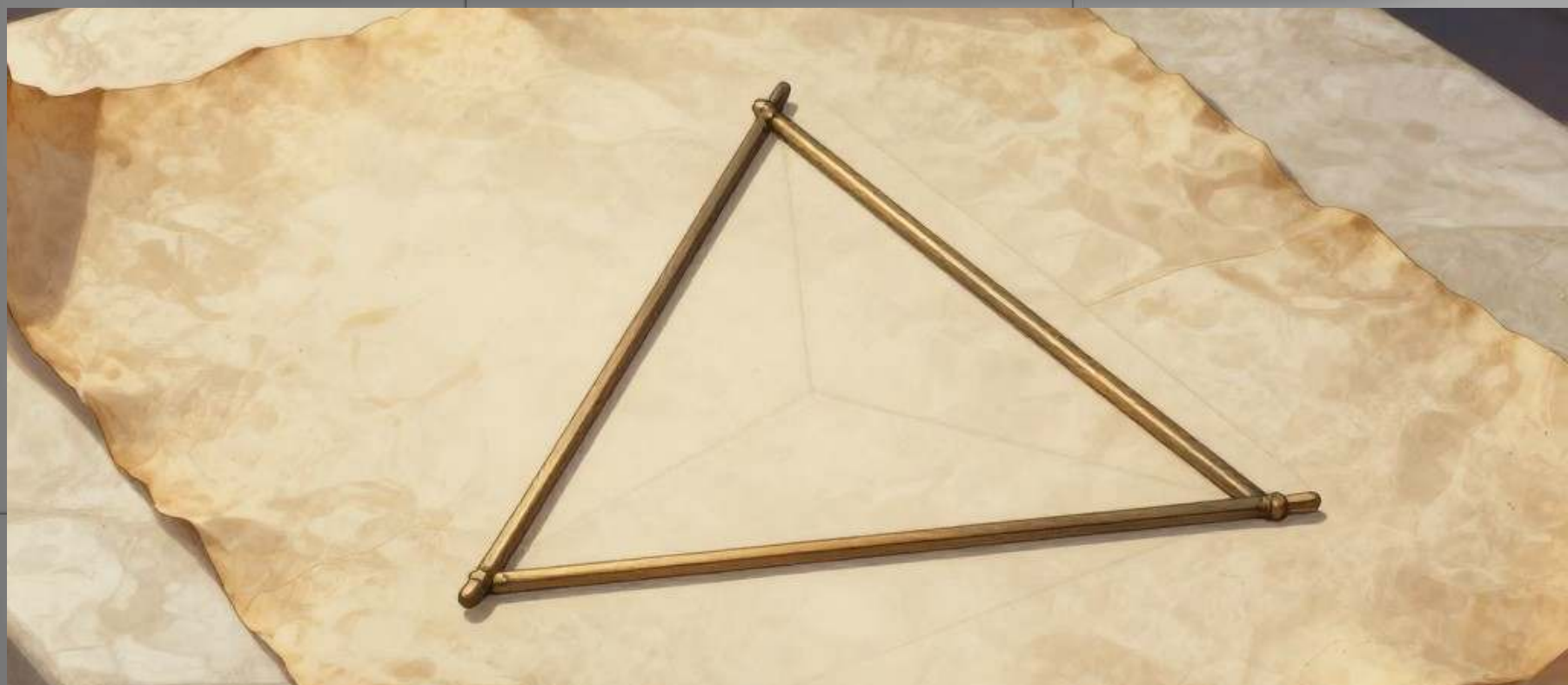
Исторический контекст теоремы

Чертёж как язык математики

Античная геометрия во многом опиралась на наглядные построения: треугольники, прямые, пересечения. По сути, чертёж становился “доказательством в рисунке”, а отношения отрезков — способом перевести картинку в точные формулы. Теорема Менелая хорошо отражает этот подход.

Менелай Александрийский и правило для секущей

Имя Менелая Александрийского связывают с математиком I века. Его правило сохранилось в школьной геометрии как понятная связь между треугольником и секущей прямой. На иллюстрации уместен античный стиль: треугольник и прямая, проходящая через три точки пересечения.



Типичные ошибки при применении теоремы

Самая частая ошибка — брать не те отрезки, которые реально образуют дроби в формуле. Нужно точно понять: какое деление стороны даёт пары AK/KB , BL/LC и CM/MA .

Вторая ошибка — перепутать порядок в отношениях. Например, вместо AK/KB записывают KB/AK . Тогда меняется значение дроби, а произведение уже не станет равным единице даже при верной геометрической картине.

Третья ошибка появляется при работе с продолжениями сторон: тогда нужны направленные отрезки. Если подставить обычные положительные длины, знак в произведении “сломается”, и равенство единице не получится.

Наконец, неверная запись одного множителя делает всё равенство неверным. Даже небольшая опечатка в дроби или пропуск стороны приводит к ошибочному выводу о коллинеарности или о найденной длине.

Основные применения теоремы в школьной геометрии

Коллинеарность точек Поиск неизвестных длин
Проверка пропорций



Сводный учебный обзор (без количественных частот), 12.05.2026

В школьных заданиях Менелай обычно работает в трёх режимах: установить коллинеарность, вычислить неизвестную величину и проверить корректность пропорций на рисунке.

Диаграмма показывает “три задачи из одного инструмента”. Во всех случаях опираются на произведение трёх отношений и сравнивают его с единицей.

Опорные обозначения для записи теоремы

Элемент	Обозначение
Треугольник	ABC
Точка пересечения с AB	K
Точка пересечения с BC	L
Точка пересечения с CA (или её продолжением)	M
Формула условия	$AK/KB \times BL/LC \times CM/MA = 1$

Короткая шпаргалка связывает элементы рисунка с тем, что подставляют в произведение отношений. Если точка лежит на продолжении стороны, применяют направленные отрезки.

Если собрать пары отрезков вокруг вершин A, B, C в указанном порядке, произведение становится тестом: либо подтверждает коллинеарность, либо даёт уравнение для неизвестной длины.

Где теорема Менелая используется дальше



Олимпиадные задачи на отношения

В олимпиадной геометрии Менелай помогает связать несколько отрезков, когда нужно доказать равенства отношений без координат. Он часто появляется после правильного построения секущей и выбора коллинеарных точек.



Связка “рисунок → вычисления”

Теорема удобна, когда требуется перевести геометрическую конфигурацию в алгебраическое равенство. Построение секущей превращает условие о расположении точек в произведение дробей.



Комбинации с подобием треугольников

Иногда Менелай используют вместе с подобием: сначала находят пропорции, затем уточняют их через произведение трёх отношений. Получается более короткий путь от геометрии к нужному числу или выводу.



Доказательства через конфигурации точек

В продвинутых решениях прямые и пересечения группируют так, чтобы применить Менелая несколько раз. Тогда из локальных отношений появляется общий вывод о структуре фигуры и взаимном положении точек.

Мини-пример с готовым выводом

- Дано: $AK = 2$, $KB = 6$, $BL = 3$, $LC = 1$. Тогда $AK/KB = 1/3$ и $BL/LC = 3$. Чтобы произведение трёх отношений стало равно 1, нужно $CM/MA = 1/9$.

- После нахождения требуемого отношения делают вывод: точки К, L и M лежат на одной прямой. На рисунке полезно подчеркнуть именно найденную дробь CM/MA и саму секущую прямую.



Точка, прямая и пропорции: главное в Менелae

Теорема Менелая связывает треугольник и секущую прямую через произведение трёх отношений отрезков. Она позволяет проверять коллинеарность трёх точек и находить неизвестные длины при корректном учёте порядка и продолжений.