

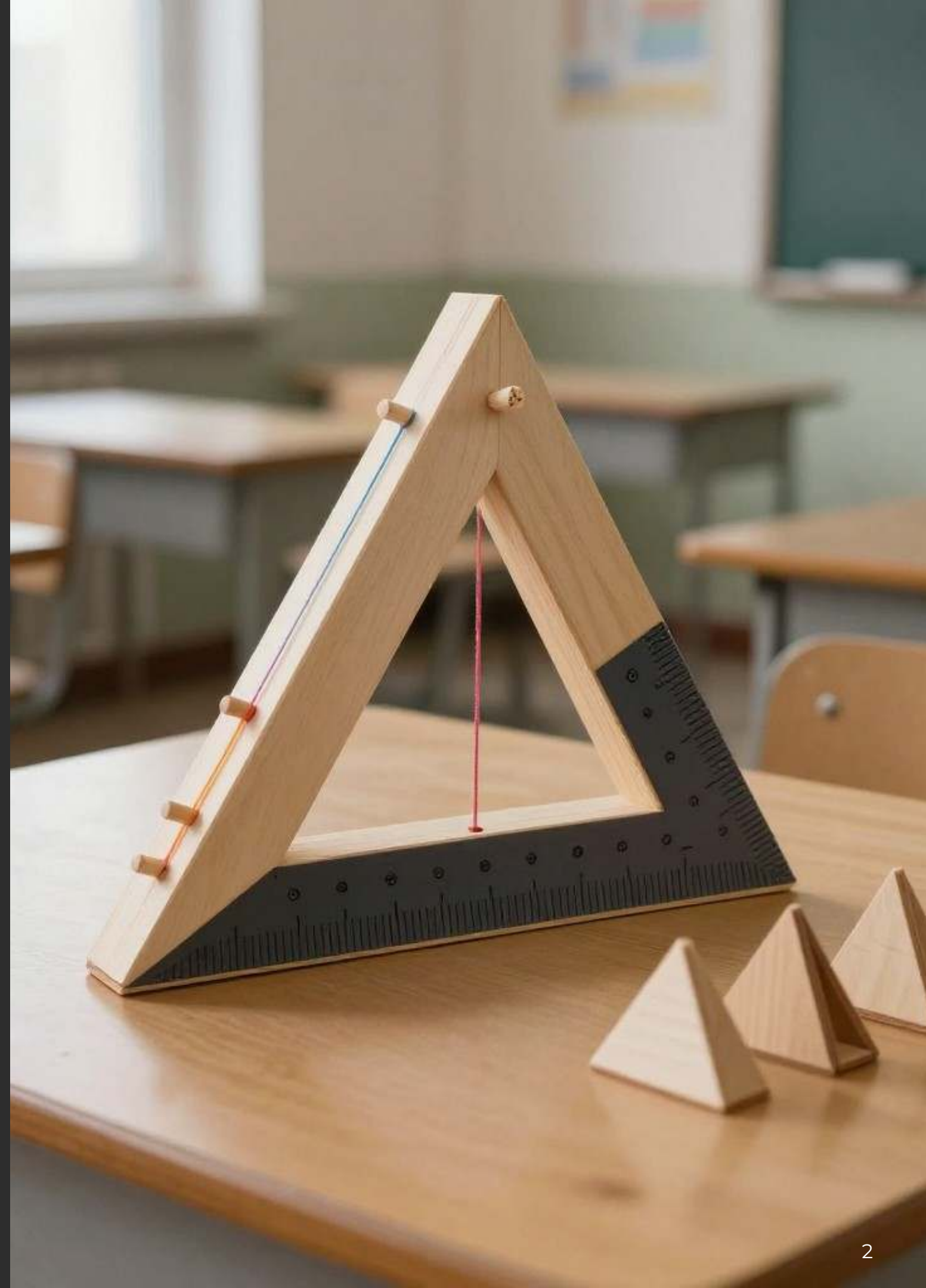
Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

Связь высоты к гипотенузе с её отрезками: $a^2=c \cdot p$, $b^2=c \cdot q$, $h^2=p \cdot q$, $c=p+q$.



Зачем изучают эти зависимости

Одна высота в прямоугольном треугольнике соединяет сразу несколько величин: она разбивает фигуру на два меньших подобных треугольника, поэтому стороны выражаются через простые пропорции. Это материал 8 класса: подобие и теорема Пифагора.



Обозначения на чертеже

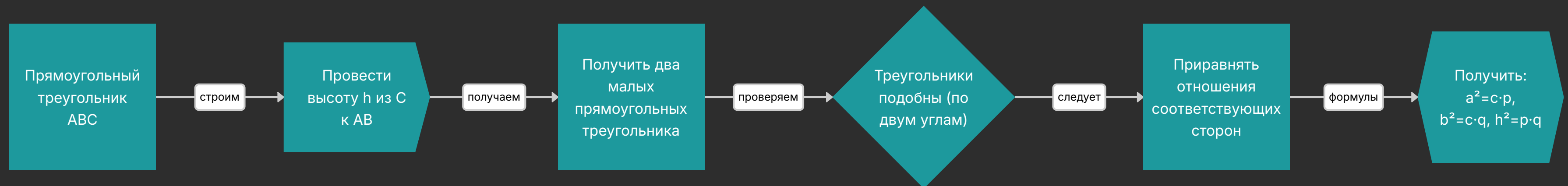
Пусть прямоугольный треугольник задан точками A, B, C , где $\angle C = 90^\circ$. Сторона AB — гипотенуза, её длина обозначается c , а стороны AC и BC — катеты с длинами a и b .

Высота h проведена из вершины C к гипотенузе AB и перпендикулярна ей. Точка пересечения высоты с гипотенузой обычно обозначается как D — это удобно для объяснений и вычислений.

Основание высоты делит гипотенузу на два отрезка: $AD = p$ и $DB = q$. Далее именно через p и q выражаются a, b и h , что и лежит в основе всех формул темы.

Как появляются формулы

От одной высоты к подобным треугольникам и отношениям соответствующих сторон



Почему треугольники подобны



Совпадают углы

У большого и малого прямоугольных треугольников один острый угол общий, а второй острый угол дополняется до прямого. Поэтому прямоугольные углы сохраняются, и конфигурация перестраивается без изменения пропорций.



Подобие означает одинаковые отношения

По признаку подобия по двум углам такие треугольники считаются подобными. Из подобия напрямую следует: отношения соответствующих сторон равны, то есть стороны связаны одними и теми же коэффициентами.



Отношения превращаются в формулы

Когда выразить соответствующие стороны через c , p , q и учесть, что высота делит гипотенузу, появляются равенства для квадратов: $a^2 = c \cdot p$, $b^2 = c \cdot q$ и $h^2 = p \cdot q$. Так геометрия становится удобным «языком» вычислений.

Теорема о проекциях катетов

Высота делит гипотенузу на два отрезка: p и q . Для катетов a и b верны важные соотношения: квадрат катета выражается произведением гипотенузы на «свою» проекцию на гипотенузу.

Формулы записываются так: $a^2 = c \cdot p$ и $b^2 = c \cdot q$. Здесь p — это отрезок гипотенузы, прилежащий к катету a (то есть проекция a на гипотенузу), а q — проекция катета b .

Эти равенства особенно удобны: если известны гипотенуза c и один из отрезков p или q , то можно сразу найти соответствующий катет. А дальше, зная катеты, легко проверять вычисления другими способами.

$$h^2 = p \cdot q$$

**Эта связь позволяет
находить высоту, как
только известны части
гипотенузы.**

Квадрат высоты равен произведению двух частей гипотенузы. Удобно, что p и q часто находятся из условия — и тогда высота вычисляется сразу через корень.

Школьная теорема о высоте к гипотенузе (подобие треугольников)

Главные формулы темы

Сводим в одну таблицу, какие элементы треугольника связаны через гипотенузу и её отрезки.

Все формулы используют одни и те же обозначения p и q , поэтому один чертёж «собирает» несколько неизвестных в задаче.

Элемент	Формула	Смысл
Катет a	$a^2 = c \cdot p$	Квадрат катета равен c , умноженной на прилежащую проекцию p
Катет b	$b^2 = c \cdot q$	Квадрат второго катета равен $c \cdot q$, где q — его проекция
Высота h	$h^2 = p \cdot q$	Квадрат высоты выражается через произведение частей гипотенузы
Гипотенуза c	$c = p + q$	Вся гипотенуза равна сумме двух отрезков p и q

Материал темы про подобие и проекции в прямоугольном треугольнике

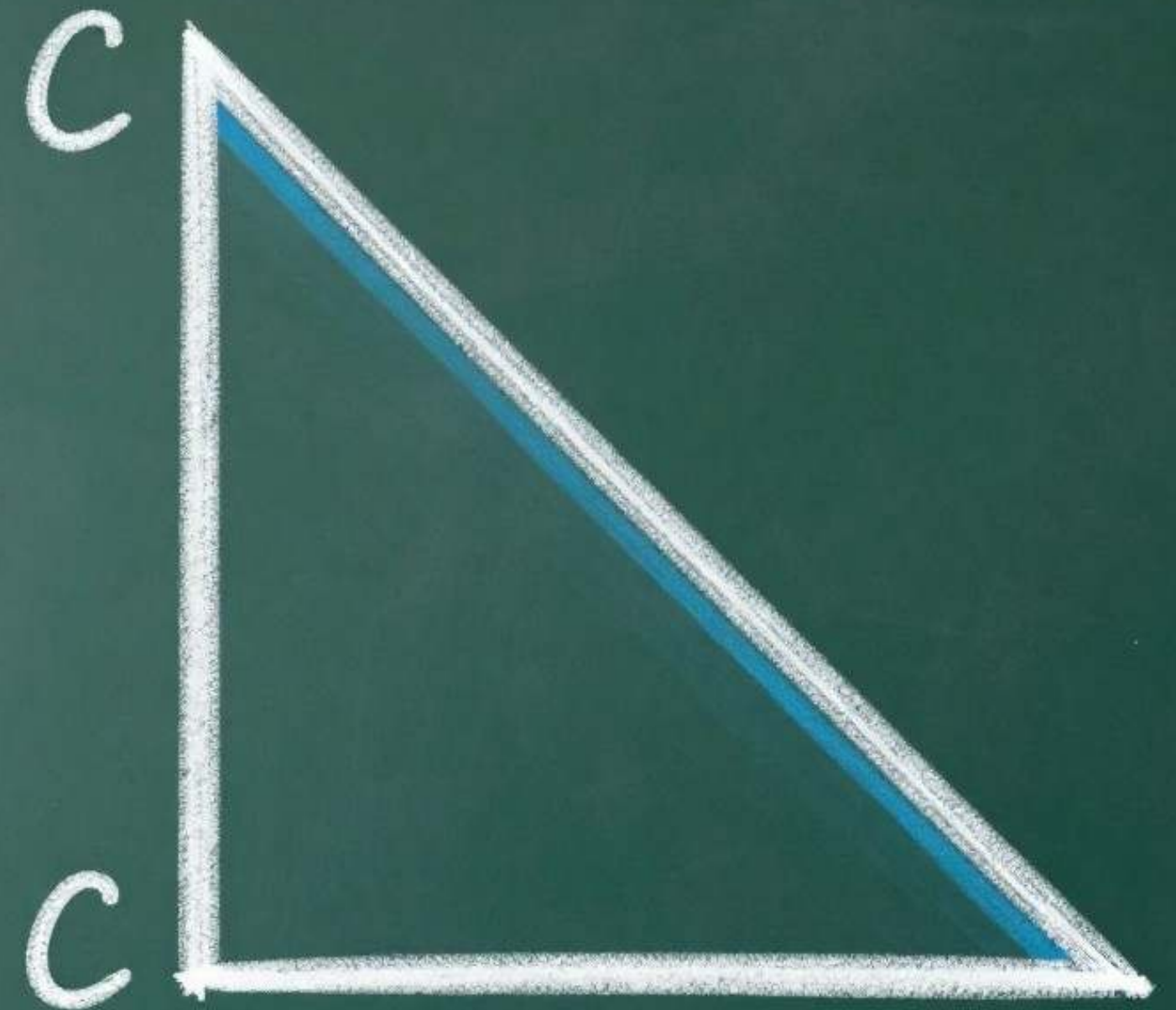
Схема с буквенными обозначениями

Стороны треугольника

На схеме показан прямоугольный треугольник: $\angle C = 90^\circ$, катеты обозначены $AC = a$ и $BC = b$. Гипотенуза — сторона AB , её длина равна c . Линия высоты выходит из вершины C .

Части гипотенузы и высота

Высота h опущена на гипотенузу AB и перпендикулярна ей. Точка основания высоты делит гипотенузу на отрезки p и q : p принадлежит к катету a , а q — к катету b . Такое разделение и определяет проекции.



Как находить неизвестный отрезок



Шаг 1. Найдите недостающую часть гипотенузы

Если известны c и один из отрезков p или q , второй отрезок находят по $c = p + q$.

Шаг 2. Через p и q найдите высоту

После нахождения p и q вычисляют высоту: $h^2 = p \cdot q$, то есть $h = \sqrt{p \cdot q}$.

Шаг 3. Найдите катеты по проекциям

Катет a берут из $a^2 = c \cdot p$, а катет b — из $b^2 = c \cdot q$. Затем извлекают квадратные корни.

Шаг 4. Проверьте результат

Проверка помогает избежать ошибок: убедитесь, что выполняется $c = p + q$ и согласуются найденные a и b (например, через теорему Пифагора).

Связь с теоремой Пифагора

Теорема Пифагора связывает катеты и гипотенузу: $a^2 + b^2 = c^2$. Она работает всегда для прямоугольного треугольника и задаёт основу для дальнейших зависимостей.

Формулы пропорциональных отрезков используют те же величины, но связывают их через проекции на гипотенузу и высоту: $a^2 = c \cdot p$, $b^2 = c \cdot q$.

Высота к гипотенузе добавляет ещё одно равенство: $h^2 = p \cdot q$. Благодаря этому в задаче можно переходить от «катеты–гипотенуза» к «высота–части гипотенузы».

В одной задаче можно применять и Пифагора, и формулы проекций: если что-то неудобно считать напрямую, сначала находят недостающее через p и q , а затем делают проверку.

В треугольнике 3–4–5 все связи сходятся в одних и тех же числах

Значения в примере подобраны так, что $p \cdot q$ совпадает с h^2 , а $c \cdot p$ и $c \cdot q$ дают a^2 и b^2 .

График наглядно показывает единую систему: гипотенуза, её части, высота и квадраты катетов связаны без противоречий.



Числовой пример вычислений

Дан прямоугольный треугольник: $c = 10$ и $p = 4$. Тогда второй отрезок гипотенузы равен $q = c - p = 6$.

Высота находится по теореме о высоте к гипотенузе: $h = \sqrt{(p \cdot q)} = \sqrt{24} \approx 4,9$. Это сразу использует произведение частей гипотенузы.

Катеты считаем через проекции: $a = \sqrt{(c \cdot p)} = \sqrt{40} \approx 6,3$; $b = \sqrt{(c \cdot q)} = \sqrt{60} \approx 7,7$. Проверка: $a^2 + b^2 \approx 10^2$, то есть вычисления согласуются.

Типичные ошибки в задачах

Частая ошибка — перепутать отрезки p и q . Если вместо p подставить q в формулу $a^2 = c \cdot p$, то получится неверный катет и «сломается» проверка.

Другая ошибка — думать, что высота всегда равна половине гипотенузы. На самом деле h зависит от того, как именно точка основания делит сторону AB на p и q .

Иногда забывают ключевое равенство $c = p + q$. Тогда, даже правильно вычислив h по $p \cdot q$, можно получить несогласованные длины, потому что гипотенуза не сходится с её частями.

Чтобы уменьшить ошибки, полезно сразу на чертеже подписывать a, b, c, p, q, h и отмечать, какой отрезок прилегает к какому катету. Это дисциплинирует подстановки.

Что известно и что можно найти

Дано	Найти	Основная формула	Первый шаг
с и р	q, h, a, b	$c = p + q$	$q = c - p$
р и q	с, h, a, b	$h^2 = p \cdot q$	$c = p + q$
с и h	р, q, a, b	$h^2 = p \cdot q$	р и q из связей/условия

Сводная логика решения по формулам $a^2 = c \cdot p$, $b^2 = c \cdot q$, $h^2 = p \cdot q$ и $c = p + q$.

Таблица показывает, какой следующий шаг обычно удобнее: находить сначала р и q или сразу с, а затем переходить к высоте и катетам.

По двум известным величинам из этой темы можно восстановить остальные элементы. Удобно начинать с того набора, где формула дает следующую величину без лишних шагов.

Где используется высота к гипотенузе



Площади и расстояния

В задачах на площадь прямоугольных фигур высота к гипотенузе помогает найти неизвестную длину через $p \cdot q$. Часто находят h , а затем подставляют в формулу площади или высоты.



Чертежи и построения

На схемах лестниц, наклонных элементов и диагоналей высота выделяет «прямоугольную» часть. Если известны части гипотенузы, h находится по $h^2 = p \cdot q$ без сложных измерений.

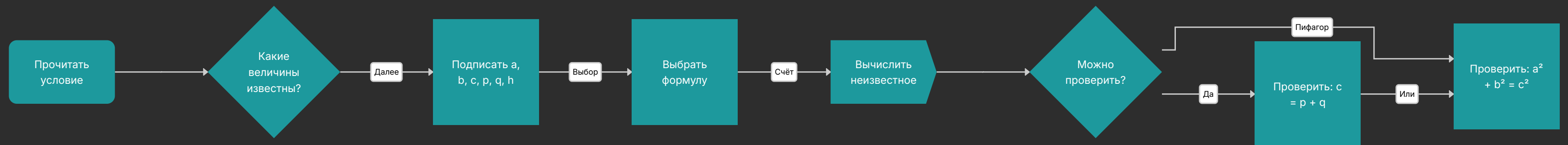


Измерения на местности

Когда прямое измерение недоступно, используют прямоугольный треугольник по вертикали и горизонтали. Высота к гипотенузе позволяет восстановить расстояние, используя проекции на одну линию.

Алгоритм решения задач

Логика выбора формул для нахождения h , a , b и отрезков гипотенузы p , q



Примеры практических задач

В задачах про лестницу высота к гипотенузе появляется из прямоугольного треугольника: вертикаль и горизонталь образуют катеты, а наклонная линия становится гипотенузой.

В задачах про тени и наклонные крыши одна и та же идея помогает перейти от «длины наклонного элемента» к высоте без прямого измерения нужного отрезка.

При измерении расстояний на местности часто используют вертикальные и горизонтальные ориентиры. Если часть гипотенузы разбита на p и q , высоту находят быстро через произведение $p \cdot q$.

Итоговые свойства темы

Высота к гипотенузе делит прямоугольный треугольник на два меньших прямоугольных треугольника. Они подобны исходному и подобны друг другу, поэтому связи становятся строгими.

Отрезки p и q образуют всю гипотенузу: $c = p + q$. Их произведение связано с высотой: $h^2 = p \cdot q$, то есть h зависит от того, как делится гипотенуза.

Катеты выражаются через проекции: $a^2 = c \cdot p$ и $b^2 = c \cdot q$. Эти формулы переводят задачу из «длин сторон» в «длины частей» и квадраты.

Все результаты темы опираются на подобие. Поэтому можно решать разными путями: сначала находить p и q , затем h и катеты, либо начинать с катетов и делать обратные шаги.

Один чертёж — несколько ответов

Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике показывают, как один чертёж даёт сразу несколько связанных величин. Инструменты темы — подобие и теоремы о проекциях, высоте и Пифагора.

