

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

Произведение синусов и косинусов можно заменить более удобной суммой.

Почему эти формулы важны в 10 классе



Они опираются на формулы сложения и помогают быстро упрощать выражения с разными углами, а также решать тригонометрические уравнения и готовиться к более сложным задачам.



Основная формула для произведения синусов

Формула преобразования

1

Произведение двух синусов заменяется разностью косинусов: $\sin A \cdot \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$. Это позволяет перейти от умножения к более удобной записи.

Что обязательно сохраняется

2

В формуле всегда присутствуют два аргумента: разность $A - B$ и сумма $A + B$. Именно они задают структуру результата и показывают, как связаны исходные углы.

Общий коэффициент

3

Перед скобками неизменно стоит множитель $\frac{1}{2}$. Его нельзя терять при вычислениях, потому что он является частью каждой формулы преобразования произведения в сумму.

Основная формула для произведения косинусов :::



Сумма косинусов

Для произведения косинусов используется запись $\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$.
В результате появляются два косинуса с одинаковым коэффициентом.



Удобство при похожих аргументах

Формула особенно полезна, когда углы близки или выражение симметрично. Тогда исходное произведение легче привести к виду, который проще анализировать и преобразовывать дальше.



Отличие от случая синусов

Здесь между слагаемыми стоит знак «плюс», тогда как у произведения синусов получается разность. Это различие важно запомнить, чтобы не перепутать формулы при вычислениях.

Формулы для произведения синуса и косинуса

1

Синус на косинус

Если первый множитель — $\sin A$, то получаем $\frac{1}{2}[\sin(A + B) + \sin(A - B)]$. Результат выражается через сумму двух синусов, где сохраняется единый коэффициент $\frac{1}{2}$.

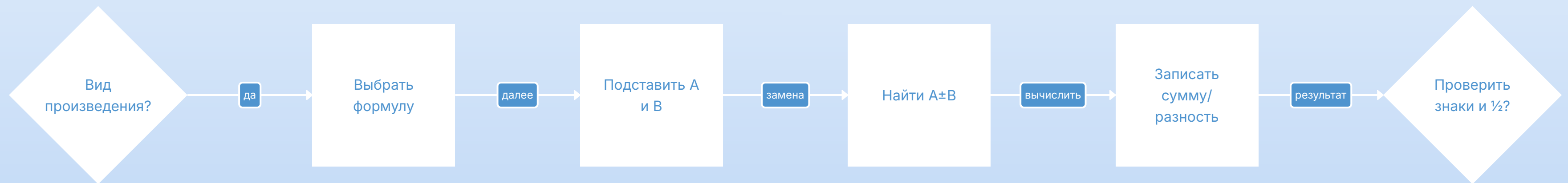
2

Косинус на синус

Если первым стоит $\cos A$, используется формула $\frac{1}{2}[\sin(A + B) - \sin(A - B)]$. Здесь особенно важно учитывать порядок множителей, потому что он влияет на знак во второй части.

Алгоритм преобразования произведения в сумму

Последовательность действий при выборе и применении формулы



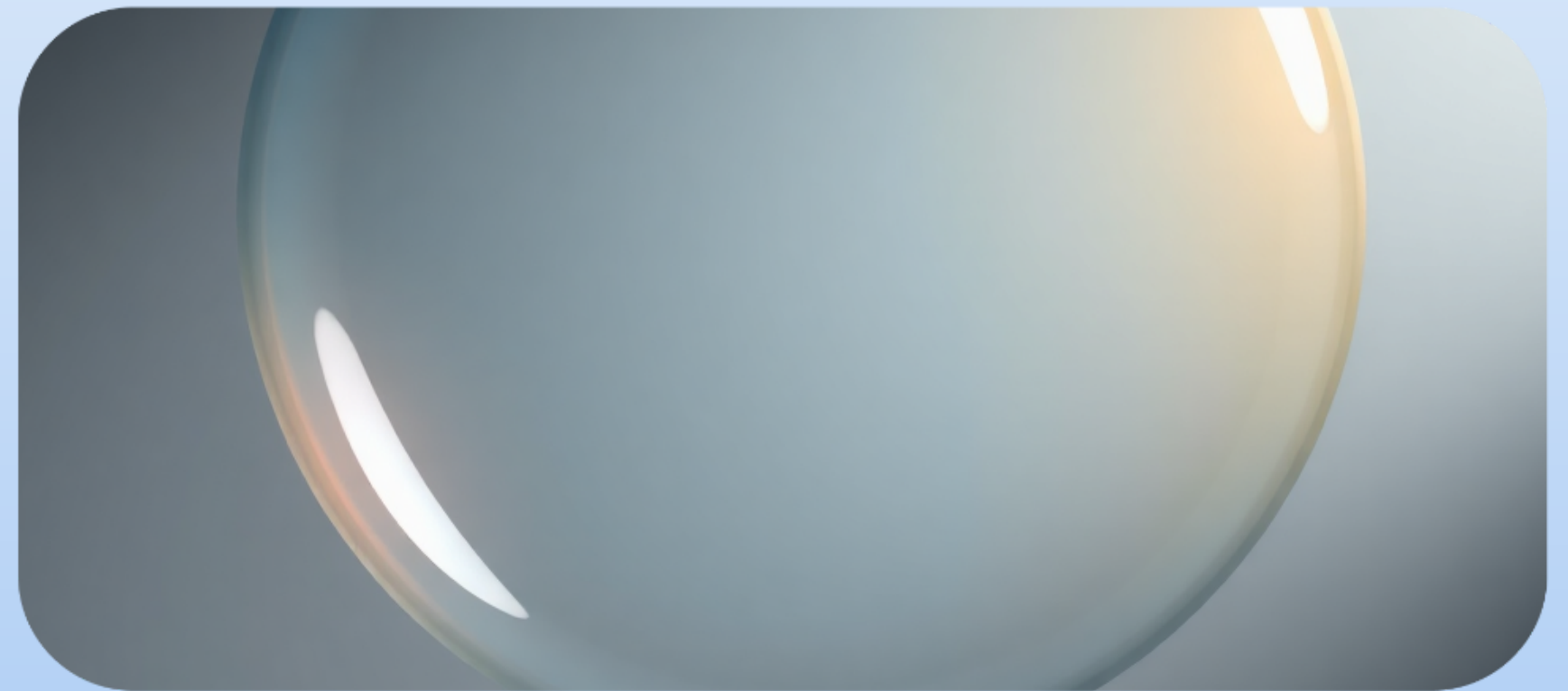
Геометрический смысл на единичной окружности :::

Углы на окружности

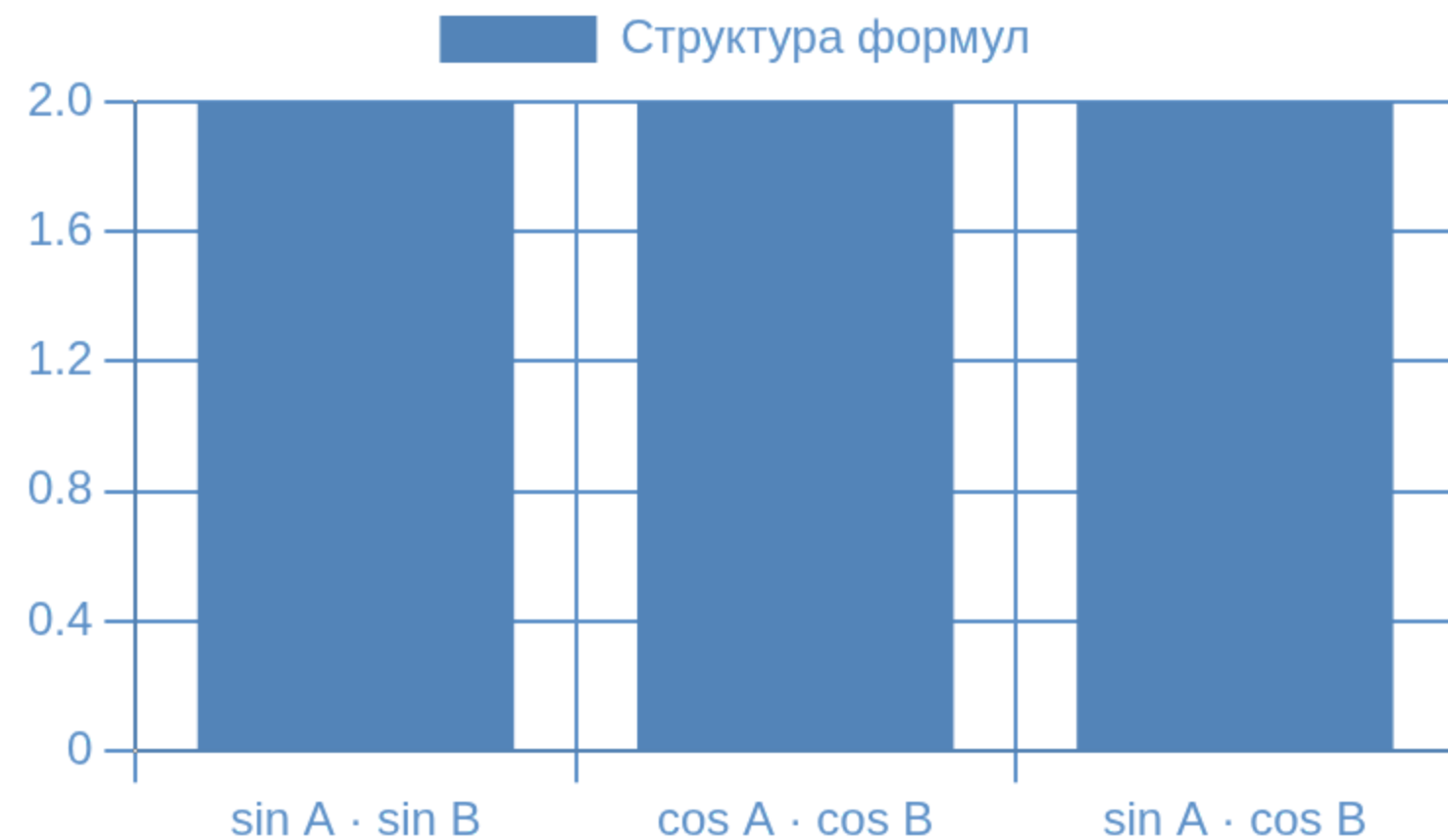
На единичной окружности синус и косинус задаются координатами точки, соответствующей углу. Поэтому работа с выражениями $\sin A$ и $\cos A$ сразу связана с геометрическим образом поворота, а не только с алгебраическими преобразованиями.

Сумма и разность углов

Появление аргументов $A + B$ и $A - B$ показывает, что формулы опираются на тождества для сложения и вычитания углов. На рисунке это удобно видеть через два направления отсчёта и связь между ними.



Сравнение трёх основных формул



Все три формулы имеют одинаковую основу: коэффициент $\frac{1}{2}$ и два слагаемых. Различаются только функция результата и знак между частями.

Общая структура упрощает запоминание: достаточно удержать тип произведения и знак, а затем подставить суммы и разности аргументов.

Школьные тригонометрические тождества

Откуда берутся формулы

Тождества сложения

Исходной точкой служат формулы $\sin(A \pm B)$ и $\cos(A \pm B)$. Именно они содержат нужные комбинации синусов и косинусов, из которых затем выделяются произведения.

Сложение выражений

Если сложить или вычесть соответствующие тождества, можно получить выражения с $\sin A \cdot \sin B$, $\cos A \cdot \cos B$ и смешанными произведениями. Это делает вывод формул прозрачным.

Не отдельное правило

Поэтому формулы преобразования не нужно воспринимать как набор случайных записей. Они логически следуют из основных тригонометрических тождеств и хорошо запоминаются через их вывод.

Связь с основной теорией

Понимание происхождения формул помогает увереннее применять их в задачах. Ученик видит не готовый шаблон, а следствие уже известных соотношений между углами.

Основные формулы в одной таблице



Вид	Формула	Знак
$\sin A \cdot \sin B$	$\frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$	—
$\cos A \cdot \cos B$	$\frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$	+
$\sin A \cdot \cos B$	$\frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]$	+
$\cos A \cdot \sin B$	$\frac{1}{2}[\sin(A+B) - \sin(A-B)]$	—



Сравнение четырёх случаев помогает быстро выбрать нужную запись и не перепутать знак между слагаемыми.



Во всех случаях сохраняется множитель $\frac{1}{2}$, а различия связаны только с типом функции и знаком между двумя слагаемыми.



Школьные формулы преобразования произведения в сумму

Типичные ошибки при применении формул

1

Потеря коэффициента

Самая распространённая ошибка — забыть множитель $\frac{1}{2}$ после преобразования. Из-за этого итоговое выражение становится неверным, хотя структура формулы может быть записана правильно. Всегда проверяйте коэффициент до дальнейших вычислений.

2

Неверный знак аргумента

Вторая ошибка связана с путаницей между $A - B$ и $A + B$. При подстановке углов важно не менять порядок действий, иначе косинусы или синусы окажутся с неправильными аргументами и ответ исказится.

3

Смешение формул

Часто путают формулы для $\sin A \cdot \cos B$ и $\cos A \cdot \sin B$. Здесь решающим становится порядок множителей: именно он определяет знак между слагаемыми в результате преобразования.

4

Проверка перед подстановкой

Чтобы снизить риск ошибки, сначала определяют тип произведения, затем выбирают нужную формулу и только после этого подставляют углы. Такая последовательность помогает избежать пропуска знаков, коэффициентов и лишних исправлений.

Пример: преобразование $\sin 3x \cdot \sin 5x$

1

Выбор формулы

Для произведения двух синусов применяем формулу $\sin A \cdot \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$. Подставляем $A = 3x$ и $B = 5x$, сохраняя общий множитель $\frac{1}{2}$.

2

Вычисление аргументов

Получаем $\frac{1}{2}[\cos(3x - 5x) - \cos(3x + 5x)]$. Далее упрощаем выражения в скобках: $3x - 5x = -2x$, а $3x + 5x = 8x$.

3

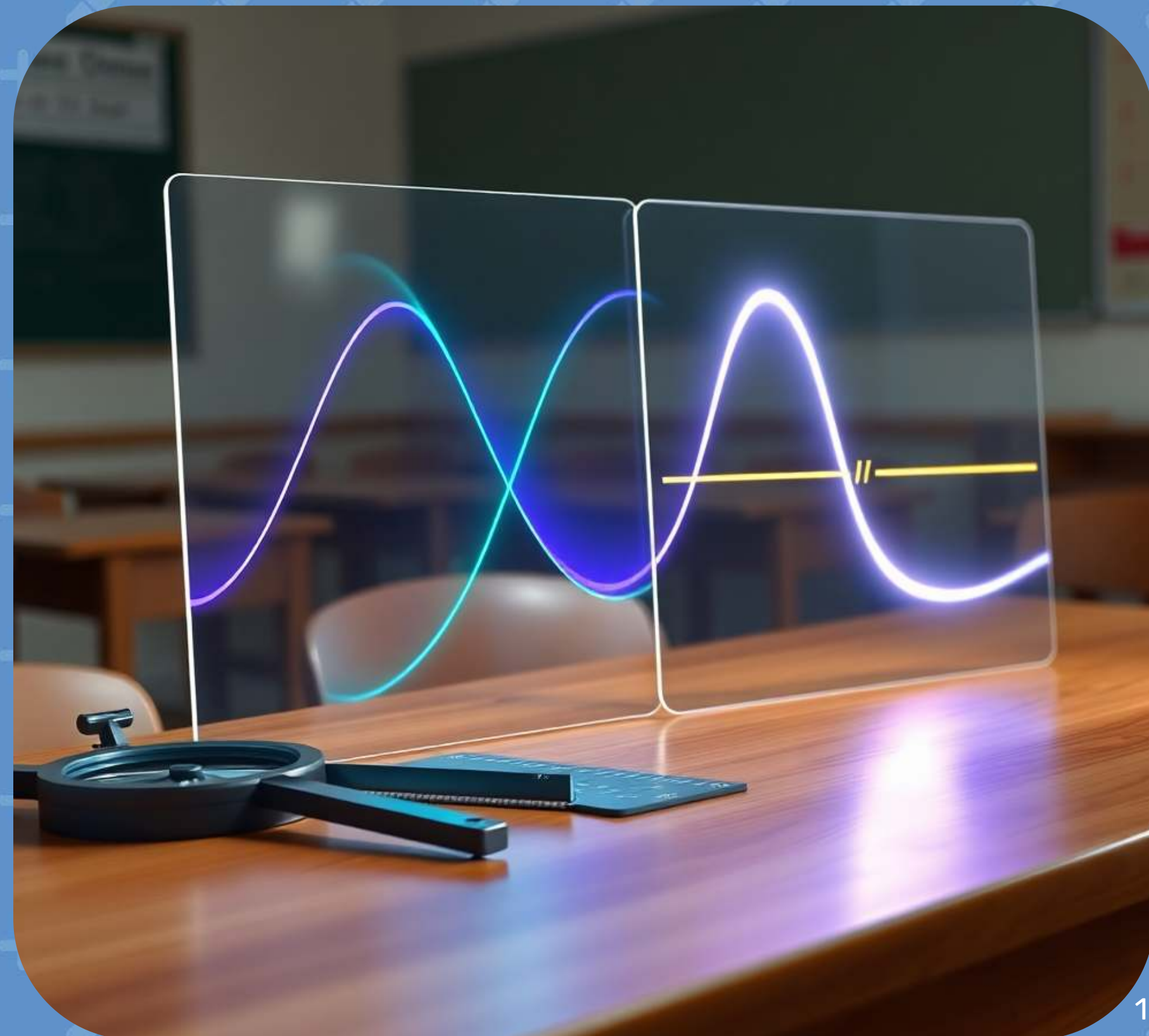
Использование чётности

Запись принимает вид $\frac{1}{2}[\cos(-2x) - \cos 8x]$. Поскольку косинус — чётная функция, $\cos(-2x) = \cos 2x$, и первый аргумент можно заменить без изменения значения.

4

Итоговый ответ

В результате получаем $\frac{1}{2}[\cos 2x - \cos 8x]$. Пример показывает, как исходное произведение двух синусов превращается в более удобную разность косинусов с простыми аргументами.



Частные случаи при одинаковых углах :::

+

Квадрат синуса

Если положить $A = B$, формула для произведения синусов даёт $\sin^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A)$. Такое представление удобно, когда нужно заменить квадрат тригонометрической функции выражением с двойным аргументом.

+

Квадрат косинуса

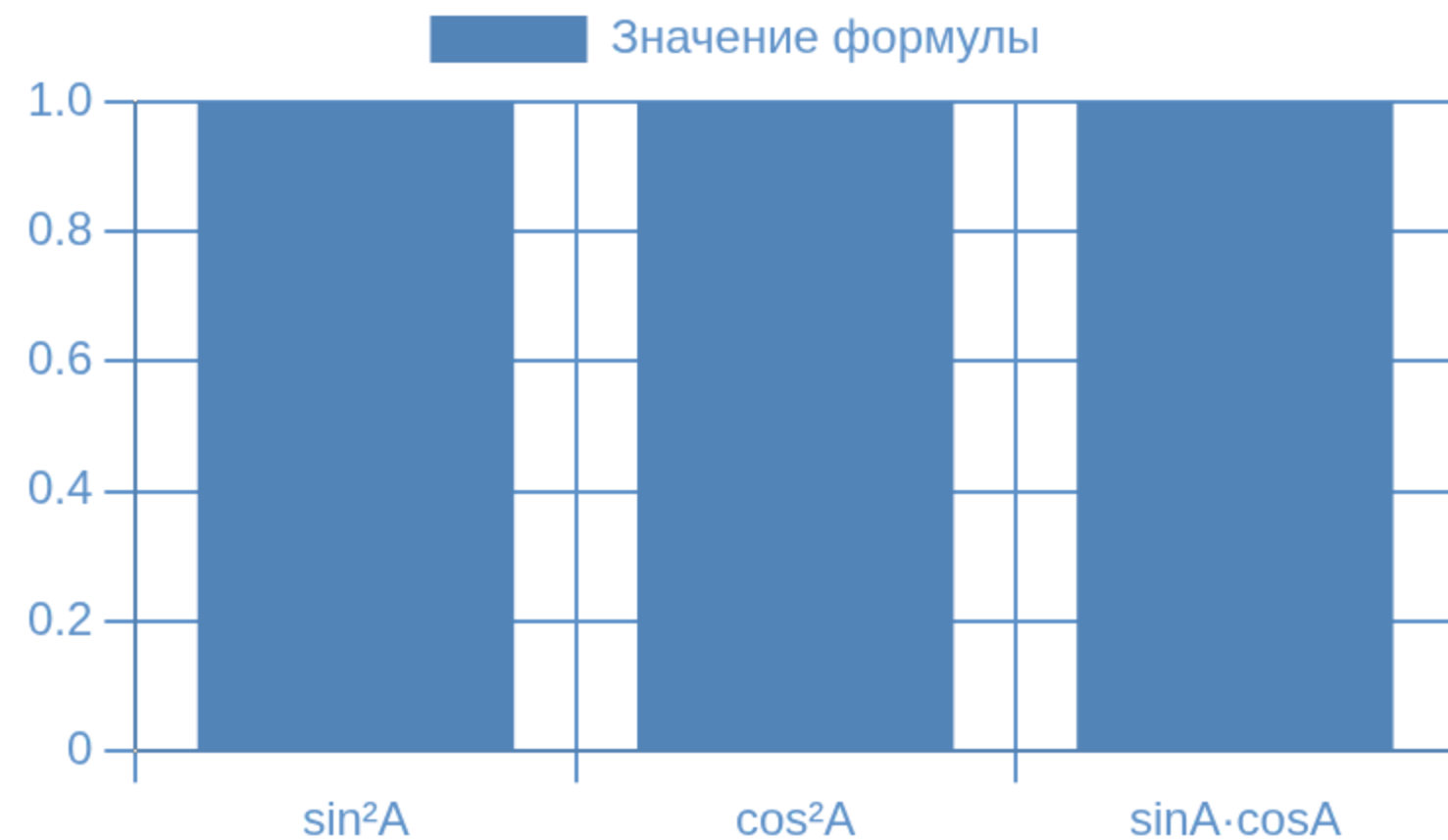
При $A = B$ из формулы для $\cos A \cdot \cos B$ получается $\cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A)$. Эта запись часто используется для упрощения выражений, где присутствуют степени косинуса и требуется перейти к линейному виду.

+

Произведение синуса и косинуса

Из формул для смешанного произведения следует $\sin A \cdot \cos A = \frac{1}{2} \sin 2A$. Это тождество особенно полезно при сокращении выражений и преобразовании произведения в функцию двойного угла.

Частные случаи: $\sin^2 A$, $\cos^2 A$ и $\sin A \cdot \cos A$



Все три частных случая получаются из общих формул при равных углах. Их удобно сравнивать как единый набор тождеств, связанных переходом к двойному аргументу.

Структура общая: коэффициент $\frac{1}{2}$ сохраняется, а различия связаны только с типом функции и знаком перед $\cos 2A$.

Выведено из формул преобразования произведения тригонометрических функций при $A = B$.

Применение при решении тригонометрических уравнений

Упрощение произведения

1

Если в уравнении встречается произведение тригонометрических функций, его можно заменить суммой или разностью. После этого выражение обычно становится короче и удобнее для дальнейшего анализа.

Разделение на части

2

Полученные слагаемые часто приводят к уравнениям с отдельными синусами или косинусами. Тогда каждую часть можно рассматривать независимо, используя нули тригонометрических функций и формулы приведения.

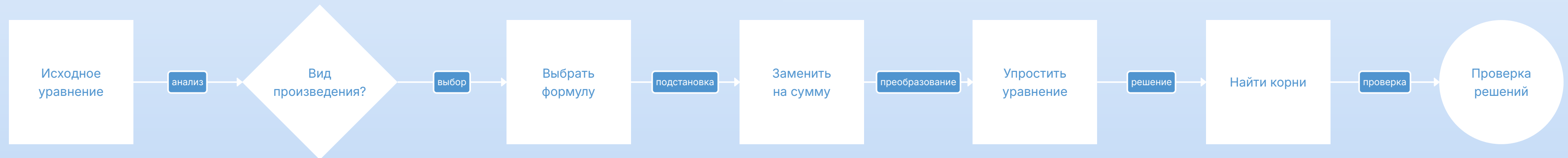
Поиск корней

3

После упрощения уравнение обычно принимает вид, где корни находятся стандартными способами. Такой подход позволяет избежать громоздких преобразований и быстрее добраться до ответа.

Схема решения уравнения с произведением

Последовательность шагов при преобразовании тригонометрического произведения в сумму и решении уравнения



Связь с интегралами и прикладными задачами

1

Интегралы
с произведением

Формулы особенно полезны при вычислении интегралов вида $\int \sin ax \cos bx \, dx$, $\int \sin ax \sin bx \, dx$ и $\int \cos ax \cos bx \, dx$. После преобразования подынтегральная функция распадается на более простые слагаемые.

2

Упрощение вычислений

Каждый полученный интеграл содержит уже не произведение, а отдельный синус или косинус. Это делает вычисление короче и позволяет использовать стандартные первообразные без дополнительных приёмов.

3

Практический смысл

В задачах о колебаниях и волнах такие преобразования помогают описывать сочетание периодических процессов. Сумма и разность частот возникают естественно и показывают, как сложный сигнал раскладывается на более простые компоненты.

Примеры преобразований с разными аргументами

- Примеры по формулам преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

Исходное	Вид результата	Формула
$\sin x \cdot \cos 4x$	синусы	$\frac{1}{2}[\sin 5x - \sin 3x]$
$\cos 2x \cdot \cos 7x$	косинусы	$\frac{1}{2}[\cos 5x + \cos 9x]$
$\sin 6x \cdot \sin x$	косинусы	$\frac{1}{2}[\cos 5x - \cos 7x]$

Таблица показывает, как формулы работают при разных аргументах и как быстро меняется тип результата после преобразования.

Во всех случаях аргументы складываются и вычитаются одинаково; меняются только тип функции и знак между частями.

Связь с колебаниями и периодическими процессами



Две волны, один результат

Когда на графике складываются два периодических колебания, произведение может быть переписано через сумму и разность частот. Именно поэтому на практике видно не только исходные колебания, но и более медленную огибающую, связанную с преобразованием формулы.



Что показывает сигнал

В физике и обработке сигналов такие записи помогают выделять скрытую структуру сложного процесса. Преобразование делает заметными новые частотные компоненты, а это важно при анализе модуляции, резонанса и поведения колебательных систем.

Формулы, которые упрощают тригонометрию

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму опирается на формулы сложения и вычитания и даёт единый удобный инструмент для упрощения выражений, решения уравнений и анализа периодических процессов.