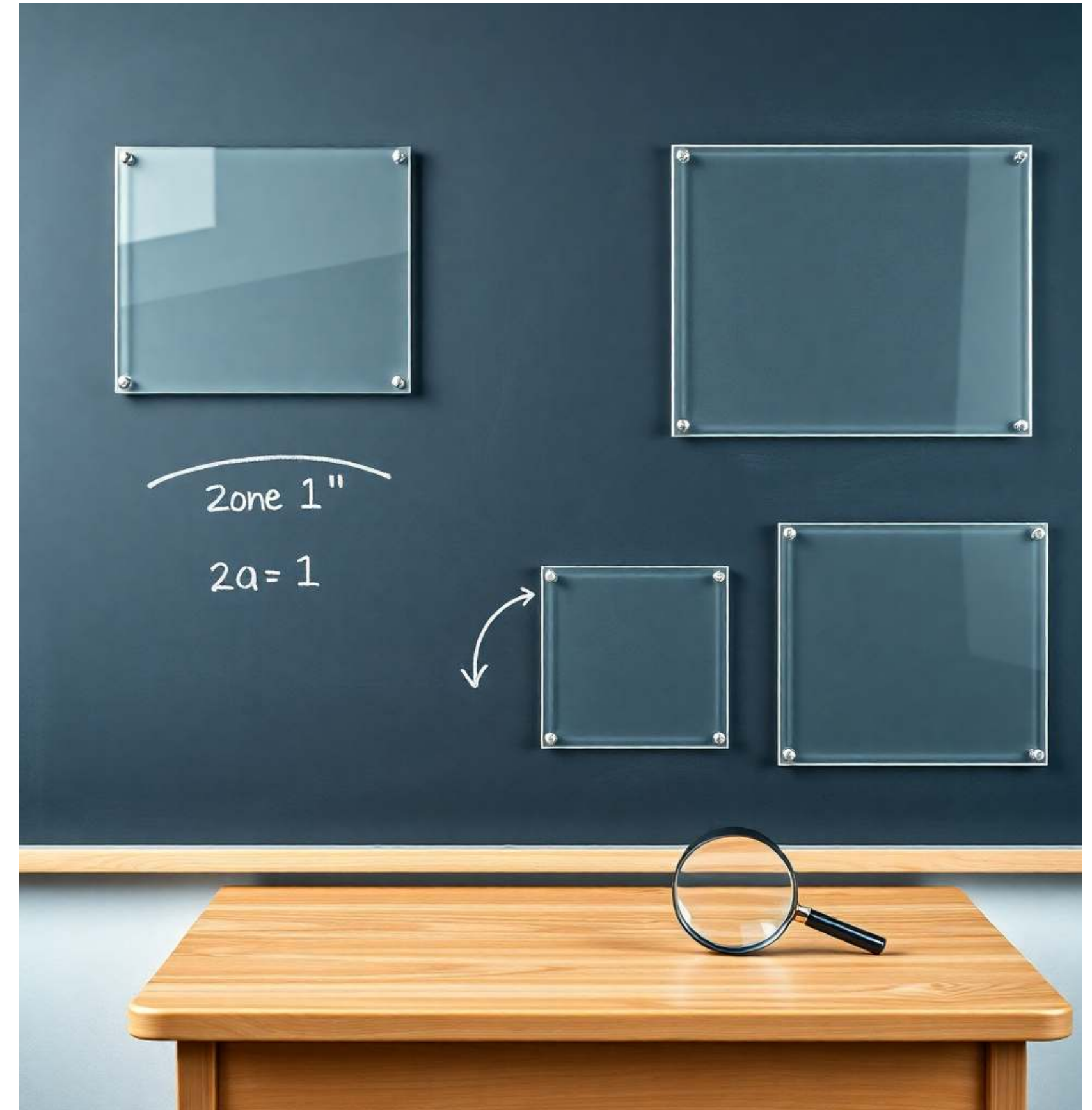
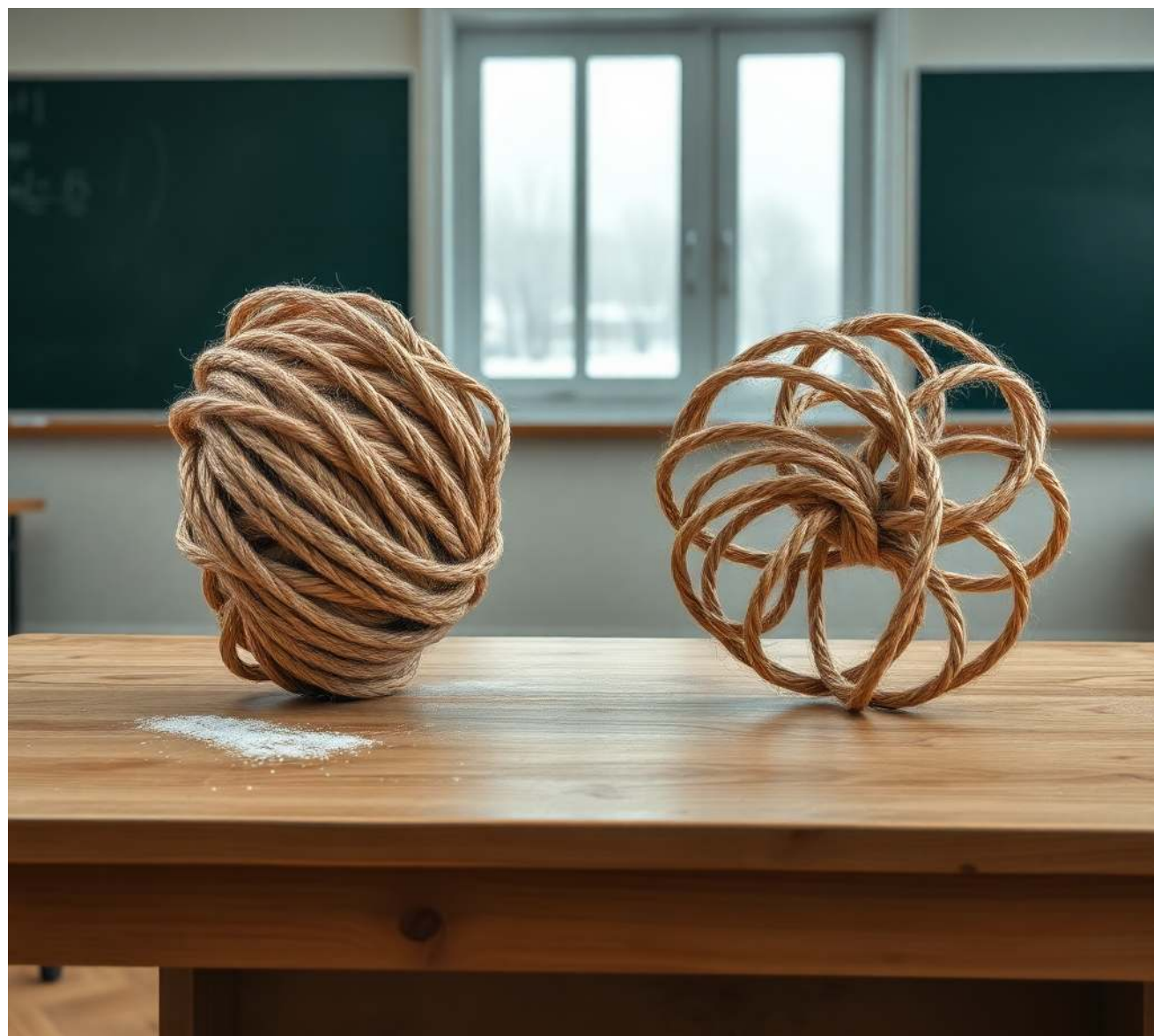


Тождественные преобразования выражений с арифметическими квадратными корнями

Изучаем корни, упрощаем и проверяем
выражения.



Зачем упрощать выражения с корнями



Корни встречаются в геометрии, измерениях и задачах на координатной плоскости. Тожественные преобразования помогают записывать выражения короче, сравнивать их и выполнять вычисления аккуратнее и быстрее.

3

основных свойства корня особенно важны при упрощении выражений в 8 классе.

Именно эти три свойства позволяют преобразовывать корни без изменения значения выражения.

Материал урока алгебры, 8 класс

Смысл корня на примере квадрата



Площадь известна

Если площадь квадрата равна 25 см^2 , то по ней можно найти длину стороны. Корень помогает перейти от площади к линейной величине без перебора вариантов.



Почему ответ неотрицателен

Арифметический корень всегда не меньше нуля, потому что он обозначает длину или другую неотрицательную величину. Это важно помнить при решении задач и проверке ответов.



Сторона как корень

Из равенства $S = a^2$ следует, что $a = \sqrt{S}$. Поэтому сторона квадрата с площадью 25 см^2 равна $\sqrt{25} = 5 \text{ см}$, то есть значение определяется точно.



Основные свойства арифметических квадратных корней

Три свойства лежат в основе большинства преобразований с корнями. Они позволяют раскрывать произведение, дробь и квадрат числа, если соблюдены условия существования.

Свойства применяются только при выполнении условий, иначе преобразование может стать неверным.

Школьный курс алгебры, 8 класс

Свойство	Пример	Условие
$\sqrt{a^2}= a $	$\sqrt{(-3)^2}=3$	a — любое
$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$	$\sqrt{(36\cdot 4)}=12$	$a, b\geq 0$
$\sqrt{(a/b)}=\sqrt{a}/\sqrt{b}$	$\sqrt{(49/4)}=7/2$	$a\geq 0, b>0$

Условия, при которых преобразования допустимы

I

Подкоренное выражение

В арифметическом квадратном корне может стоять только неотрицательное число. Если под корнем появляется отрицательное значение, запись перестаёт быть допустимой в школьном определении.

2

Знаменатель дроби

В дробях знаменатель не должен равняться нулю. Это правило особенно важно при преобразованиях с корнями и переменными, когда область допустимых значений нужно проверять заранее.

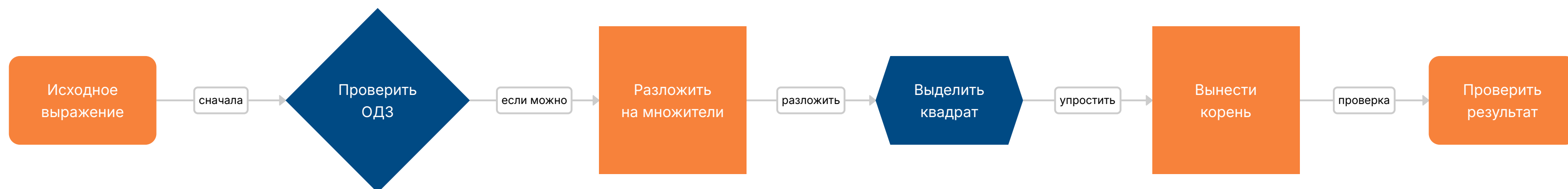
3

Область допустимых значений

При каждом преобразовании следует учитывать ОДЗ, чтобы не изменить смысл выражения. Это помогает избежать ошибок, когда в задаче есть переменная, дробь или несколько ограничений сразу.

Алгоритм упрощения выражения с корнем

Последовательность действий для типовых заданий 8 класса



Вынесение множителя из-под знака корня

Найти полный квадрат

Сначала подбирают множитель, который является полным квадратом. Тогда его корень вычисляется точно, а оставшаяся часть выражения остаётся под знаком корня.

Разделить выражение

Например, $\sqrt{72}$ удобно представить как $\sqrt{(36 \cdot 2)}$. Поскольку 36 — полный квадрат, из-под корня выходит число 6, и получается более короткая запись $6\sqrt{2}$.

Использовать в упрощении

Такой приём сокращает выражение и делает его удобным для дальнейших действий. Его особенно часто применяют в упражнениях, где нужно привести ответ к стандартному виду.



Внесение множителя под знак корня

I

Записать множитель как квадрат

Чтобы внести число под корень, его представляют в виде квадрата. Например, 3 можно записать как $\sqrt{9}$, если нужно преобразовать выражение к общему виду.

2

Объединить запись

Тогда $3\sqrt{5}$ превращается в $\sqrt{(9 \cdot 5)}$ и далее в $\sqrt{45}$. Это удобно, когда выражения нужно сравнивать, перемножать или приводить к одной форме.

3

Не нарушать смысл

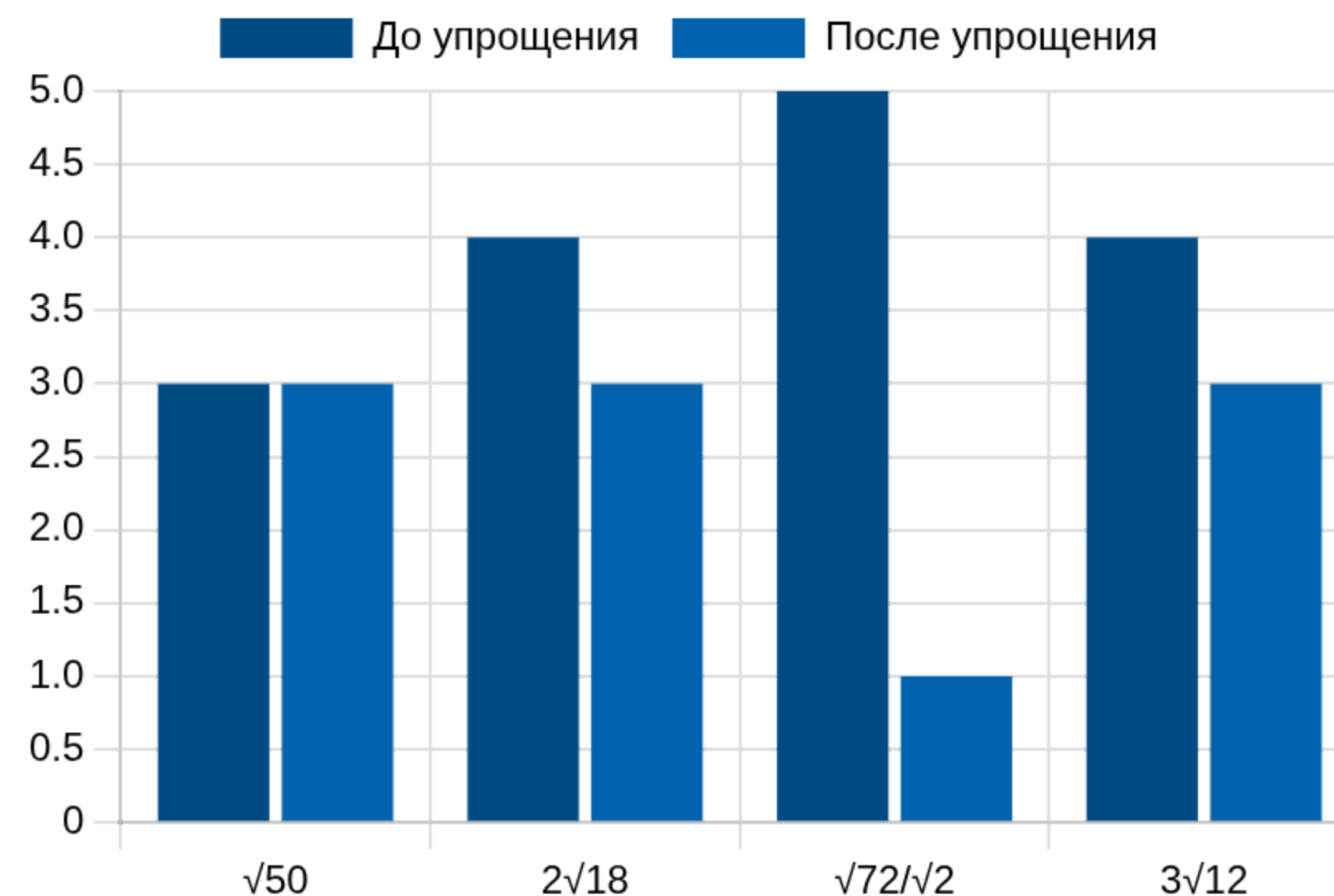
Под знак корня вносят только неотрицательный множитель. Это правило сохраняет смысл арифметического корня и помогает избежать ошибок при преобразовании выражений.

Как упрощение меняет вид выражения

На диаграмме показано, что преобразование часто уменьшает громоздкость записи и делает вычисления удобнее для следующих шагов решения.

После выделения полного квадрата и сокращения запись обычно становится короче и понятнее.

Составлено по учебным примерам из темы 8 класса



Сложение и вычитание однотипных корней



Только одинаковые корни

Складывать и вычитать можно лишь однотипные корни, у которых совпадает подкоренная часть. Тогда складываются только коэффициенты, а сам корень остаётся без изменения.



Короткая и удобная запись

Правило особенно полезно в заданиях 8 класса, потому что позволяет быстро сокращать выражение и получать ответ в стандартной форме без лишних вычислений.



Сначала упростить выражения

Если под корнем разные числа, их сначала приводят к одинаковому виду. Например, $\sqrt{12}$ и $\sqrt{27}$ можно упростить до $2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{3}$, а затем сложить.

Умножение выражений с квадратными корнями

I

Перемножить коэффициенты

Сначала умножают числовые множители перед корнями. Это помогает отделить обычные числа от корневой части и не потерять порядок действий при преобразовании.

2

Применить свойство корня

Затем используют правило $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, если оба подкоренных выражения неотрицательны. После объединения корней часто появляется полный квадрат, который можно вынести.

3

Упростить результат

На последнем шаге выражение приводят к более короткому виду. Так, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ превращается в 4, а произведение $3\sqrt{5}$ и $2\sqrt{10}$ даёт $30\sqrt{2}$.

Деление выражений с корнями

I

Разделить корни

При делении корней удобно использовать правило $\sqrt{a}/\sqrt{b} = \sqrt{a/b}$, но только при $b > 0$. Оно позволяет сразу перейти к более простой дроби под знаком корня.

2

Вычислить значение

После преобразования корень часто становится точным числом. Например, $\sqrt{48}/\sqrt{3} = \sqrt{16} = 4$, поэтому ответ получается без приближений и десятичных дробей.

3

Привести ответ к виду

Если в знаменателе остаётся корень, дробь рационализируют. Так запись становится привычной для школьного ответа и легче проверяется при дальнейших вычислениях.

Типичные ошибки при преобразованиях с корнями

Сравнение неверных и верных записей помогает увидеть, какие правила чаще всего нарушаются при работе с корнями.

Корень нельзя «распределять» по сумме, а подкоренное выражение должно быть допустимым; квадрат переменной даёт модуль, а не саму переменную.

Правила арифметических квадратных корней из школьного курса алгебры

Неверно	Верно	Пояснение
$\sqrt{a+b}$	не равно	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$
$\sqrt{(-9)}$	не является	арифметическим корнем
$\sqrt{a^2}$	равно	$ a $

Рационализация знаменателя

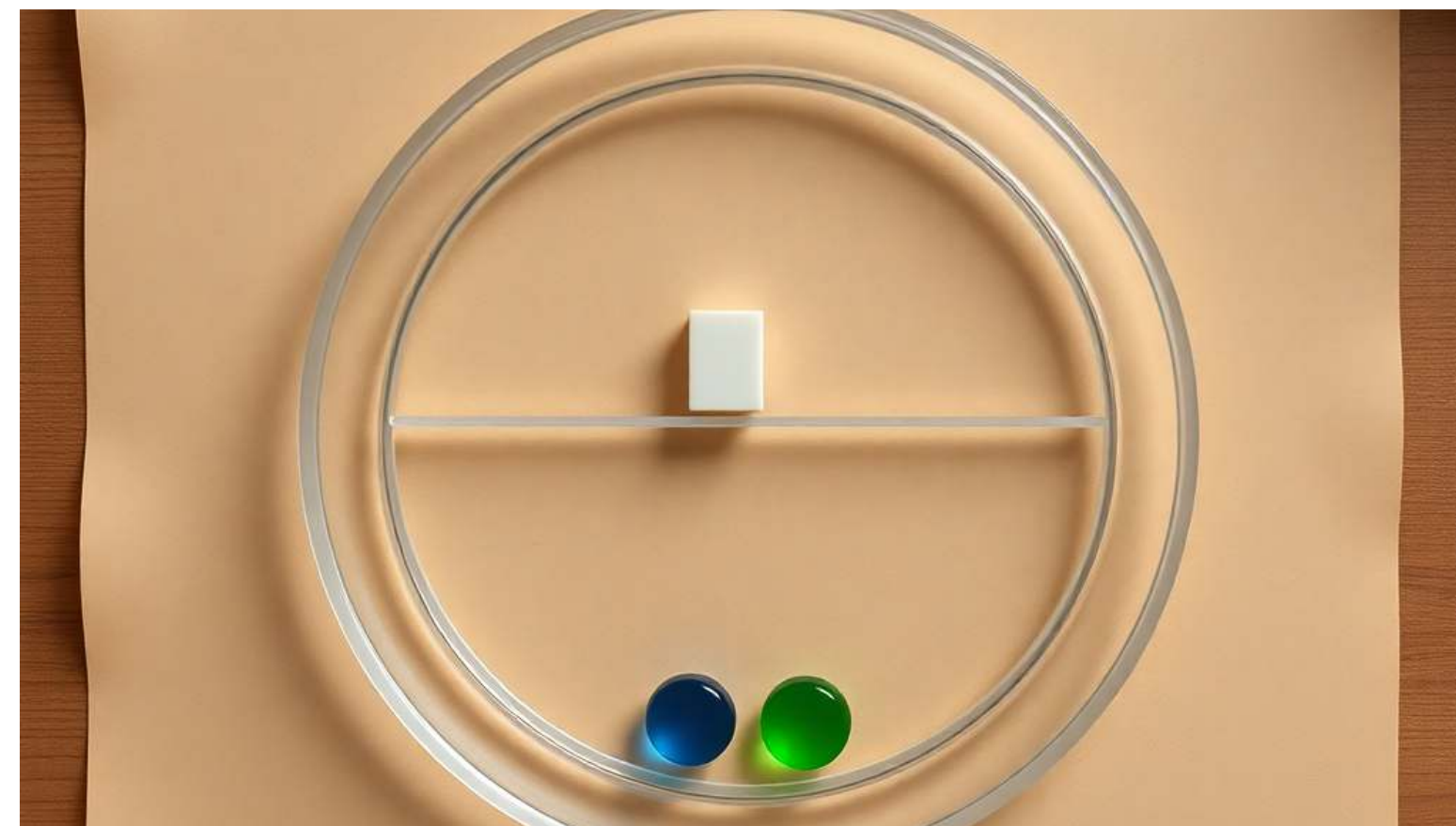
Когда знаменатель содержит корень

Если в знаменателе дроби появляется квадратный корень, запись стараются сделать более удобной. Для этого умножают числитель и знаменатель на подходящий корень или число, чтобы избавиться от иррационального знаменателя.



Стандартная школьная форма

Например, $1/\sqrt{3}$ превращается в $\sqrt{3}/3$, а $5/(2\sqrt{7})$ — в $5\sqrt{7}/14$. Такой приём не меняет значение дроби, но делает ответ аккуратным, привычным и удобным для дальнейшей работы.



Сравнение исходного и упрощённого вида выражений

На графике показано, что после преобразования записи становятся заметно короче и дают точный результат без лишних действий.

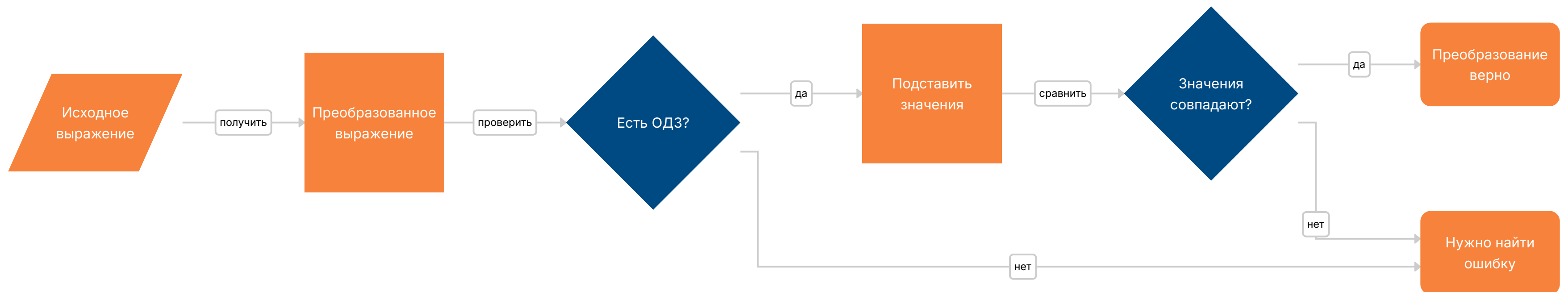
Упрощение часто уменьшает число символов и шагов вычисления, поэтому выражение легче читать, сравнивать и проверять.

Примеры из школьных заданий по теме арифметических квадратных корней



Как проверить преобразование выражения

Последовательность проверки равенства исходного и полученного выражения при допустимых значениях переменных.



Примеры из геометрии и измерений



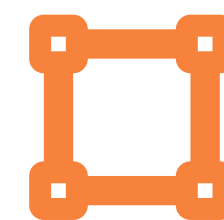
Диагональ квадрата

Если сторона квадрата равна 7 см, его диагональ выражается как $7\sqrt{2}$ см. Корень здесь помогает получить точное значение, а не приближённый результат.



Расстояние на плоскости

При нахождении расстояния между точками часто используют теорему Пифагора. Из-за этого в ответе появляются квадратные корни, которые затем удобно упрощать.



Связь с измерениями

В задачах на площадь, длину и координаты корни позволяют перейти от чертежа к числу. Это делает алгебру полезной для реальных вычислений и геометрических построений.

Задания для закрепления темы

I

Упростить $\sqrt{32}$

В этом примере нужно выделить полный квадрат под корнем. После разложения числа 32 на множители выражение можно привести к более короткой записи.

2

Преобразовать $5\sqrt{12}$

Здесь полезно вынести множитель из-под корня и отдельно упростить подкоренное число. Такое задание проверяет умение работать с полными квадратами.

3

Сложить $\sqrt{45} + \sqrt{20}$

Сначала оба корня приводят к одинаковому виду, а затем складывают однотипные слагаемые. Это упражнение показывает, умеешь ли ты объединять похожие корни.

4

Упростить $6/\sqrt{2}$

В этом случае нужно рационализировать знаменатель. После преобразования дробь должна иметь обычный числовой знаменатель и быть записана в стандартной форме.

Корни становятся понятнее через преобразования

Тождественные преобразования с корнями помогают упростить запись, сохранить точность и избежать ошибок. Если помнить свойства корня и проверять условия, любые выражения становятся понятнее и удобнее для решения.