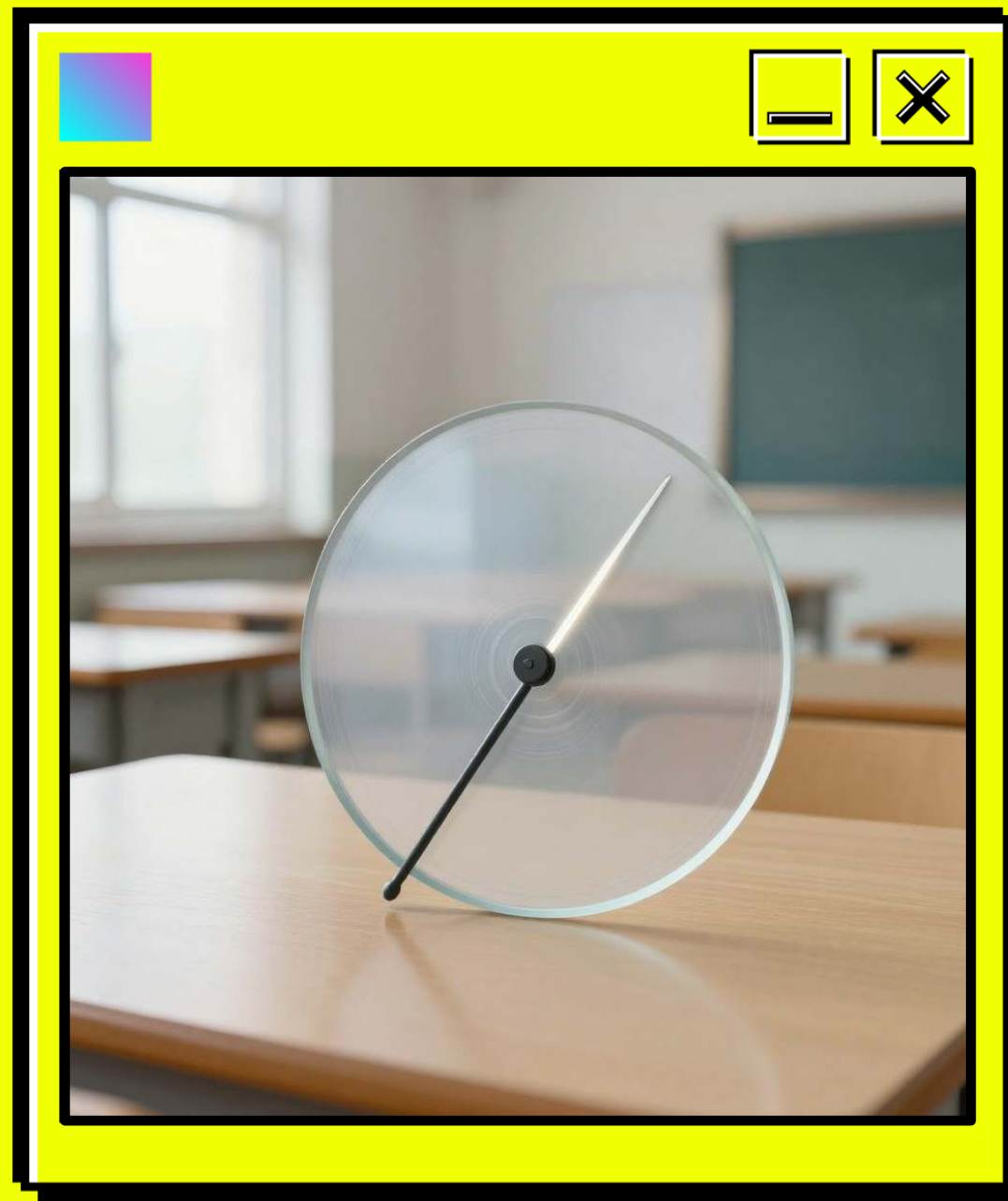


Тригонометрические функции произвольного угла

Синус, косинус и тангенс для любого поворота.



Зачем нужны любые углы

В задачах угол часто выходит за пределы острого: так описывают поворот колеса, стрелки часов, направление луча и движение точки. Чтобы работать с такими ситуациями, используют единичную окружность и рассматривают угол как поворот.



От острого угла к любому углу

1 Ограничение треугольника

В прямоугольном треугольнике тригонометрические функции удобно определять только для острых углов, поэтому такой способ не подходит для углов больше 90° или отрицательных поворотов.

2 Поворот луча

Для произвольного угла берут луч в начальном положении и поворачивают его вокруг начала координат. Конечное положение луча помогает связать угол с точкой на окружности.

3 Любая четверть

Если точка на окружности лежит в первой, второй, третьей или четвертой четверти, значения синуса и косинуса можно найти для любого угла, даже превышающего полный оборот.

4 Положительные и отрицательные углы

Угол может отсчитываться против часовой стрелки или по часовой стрелке. Поэтому одна и та же идея работает для положительных, отрицательных углов и поворотов больше 360° .

Едини́чная окру́жность как основа определения

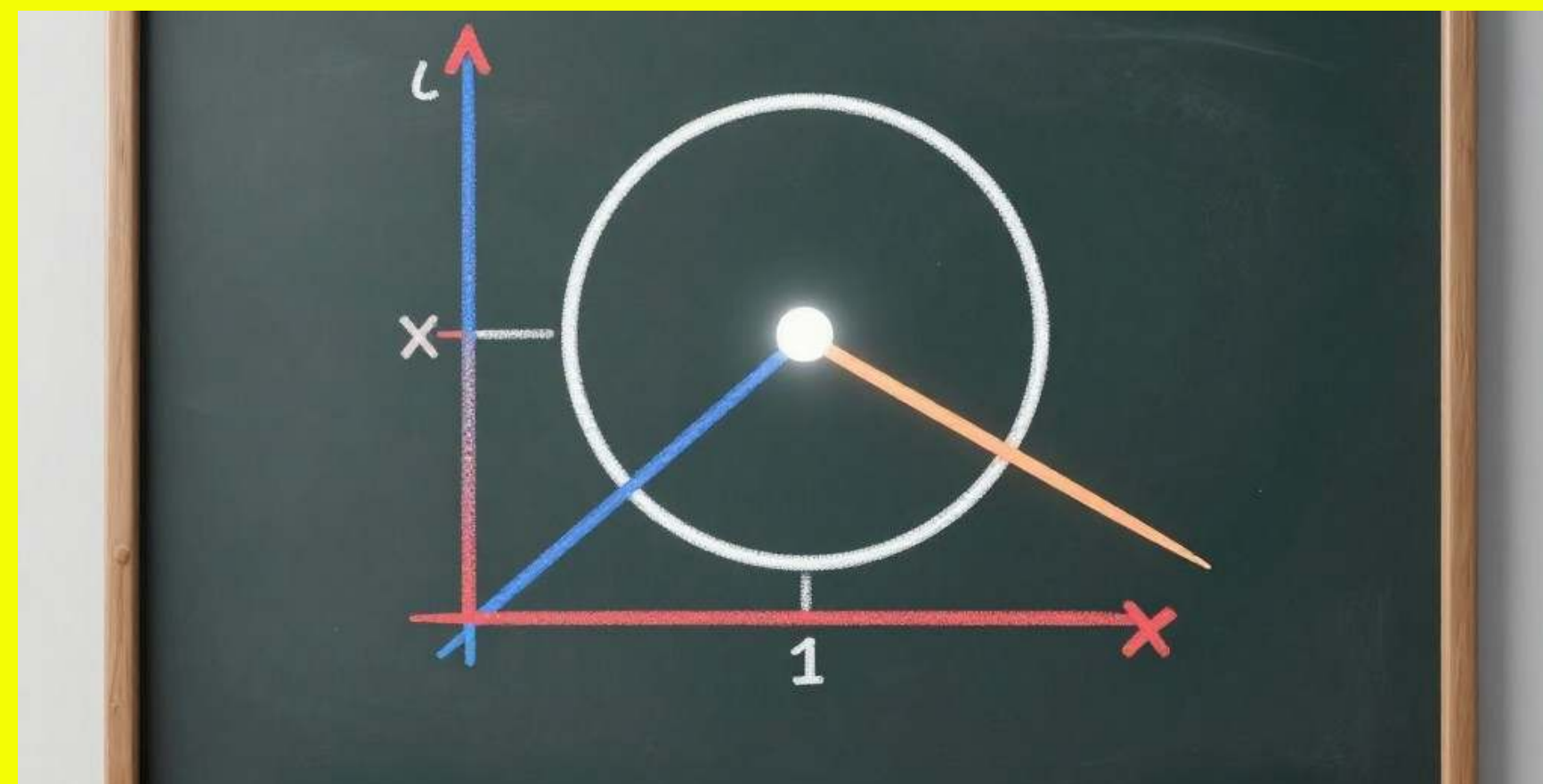
- ▼

Окружность радиуса 1
 Едини́чная окру́жность имеет радиус 1 и центр в начале координат. Она служит удобной моделью, потому что координаты точки на ней сразу связаны со значениями функций.
- ▼

Начальное направление
 Угол откладывают от положительного направления оси Ox . После поворота луч пересекает окружность в одной точке, и именно ее положение важно для вычислений.
- ▼

Координаты точки
 Если конечная точка имеет координаты (x, y) , то $\cos \alpha$ равен x , а $\sin \alpha$ равен y . Так тригонометрические функции становятся понятными через положение точки.
- ▼

Наглядность схемы
 На рисунке удобно показать оси координат, окружность, луч в стандартном положении и подписи координат. Такая схема помогает быстро видеть, где находятся синус и косинус.



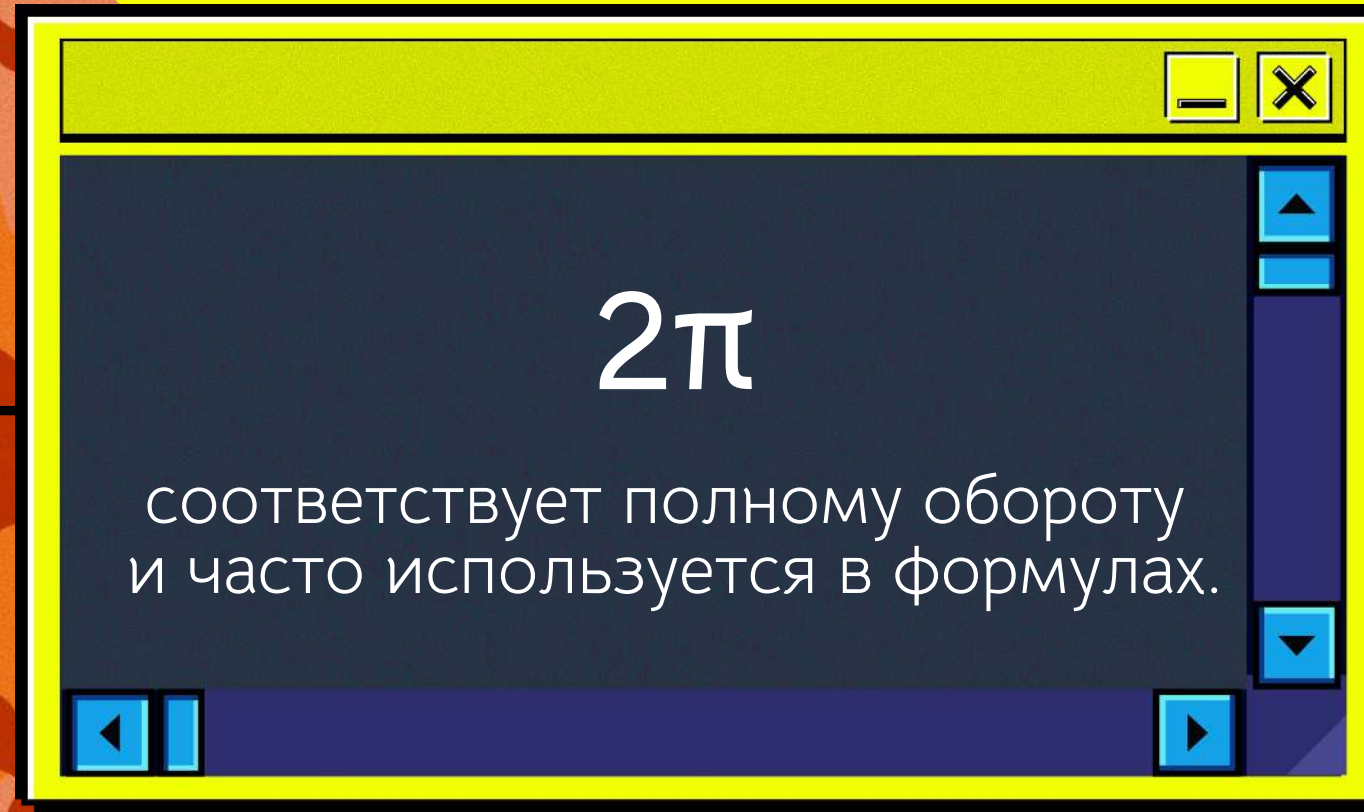
Знаки синуса и косинуса по четвертям

Знак функции зависит не от самого угла, а от того, в какой части координатной плоскости находится луч.

Синус и косинус меняют знак по-разному, а тангенс зависит от их отношения. Поэтому сначала нужно определить четверть, а уже потом записывать ответ.

Знаки определяются положением точки на единичной окружности в каждой четверти.

Четверть	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
I	+	+	+
II	+	-	-
III	-	-	+
IV	-	+	-



Стандартные соотношения между градусной и радианной мерой угла.

Основные точки единичной окружности

Эти точки показывают, как значения функций меняются при повороте на четверть и на полный оборот.

На основных углах легко увидеть повторение значений и смену знаков. Это опорные точки для всех дальнейших вычислений.

Значения синуса и косинуса на углах 0° , 90° , 180° , 270° и 360° .

Основные значения синуса и косинуса



Нулевая точка

При 0° синус равен 0, а косинус равен 1. Это точка старта на положительной полуоси Ох, откуда начинается отсчет всех поворотов.



Поворот на четверть

При 90° синус равен 1, а косинус равен 0. Точка оказывается на положительной полуоси Оу, поэтому видно максимальное значение синуса.



Пол-оборота

При 180° синус снова равен 0, но косинус становится -1 . Это показывает, что точка перешла на левую сторону окружности.

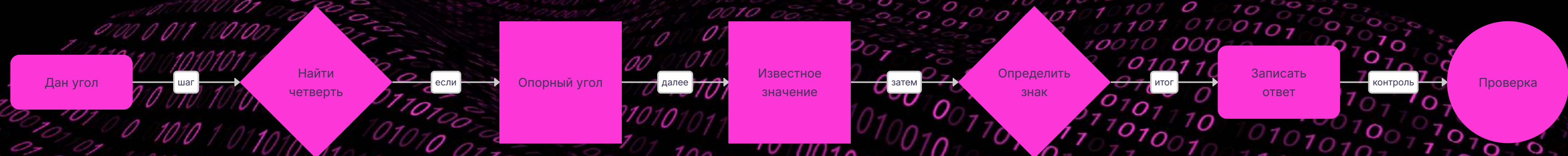


Три четверти оборота

При 270° синус равен -1 , а косинус снова 0. Значения здесь симметричны случаю 90° , но расположены ниже оси Ох.

Как находить значение функции

Алгоритм основан на четверти, опорном угле и знаке функции.



Опорный угол

▼ Что это такое

Опорный угол — это острый угол между конечной стороной данного угла и осью Ox . Он помогает перейти от сложного поворота к знакомому острому углу.

▼ Зачем он нужен

Если угол находится во второй, третьей или четвертой четверти, сначала находят опорный угол, а потом используют известные значения синуса или косинуса для острого угла.

▼ Примеры

Для 150° опорный угол равен 30° , для 225° — 45° , а для 300° — 60° . Так проще вспомнить нужные значения по таблице.

▼ Связь со знаком

Опорный угол дает только модуль значения. Правильный знак выбирают по четверти, в которой лежит конечная сторона угла.



Углы с известными значениями

Угол	$ \sin \alpha $	$ \cos \alpha $
30° и 150°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45° и 135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60° и 120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Для опорных углов удобно помнить не только сами значения, но и их знаки в разных четвертях.

Модуль значения зависит от опорного угла, а итоговый ответ определяется четвертью, где расположен луч.

Стандартные значения на единичной окружности для углов 30° , 45° и 60° .

Тангенс произвольного угла

1

Определение

Тангенс угла находят по формуле $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$. Это отношение показывает, как связаны координаты точки на единичной окружности, если $\cos \alpha$ не равен нулю.

2

Когда не существует

Значение тангенса не определено при углах $90^\circ + 180^\circ k$, где k — целое число. В этих положениях точка лежит на оси Oy , поэтому $\cos \alpha = 0$.

3

Как меняется знак

В разных четвертях тангенс может быть положительным или отрицательным. Его знак зависит от знаков $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, поэтому его удобно проверять после нахождения опорного угла.



13



Периодичность синуса, косинуса и тангенса

На одной схеме удобно видеть, что синус и косинус повторяют значения после полного оборота, а тангенс — уже после половины оборота.

Период синуса и косинуса равен 360° (2π), а тангенса — 180° (π); в точках 90° и 270° он не определён.

Табличные значения на единичной окружности; 2025.



XX%

Отрицательные углы

1 Направление поворота

Отрицательный угол откладывают по часовой стрелке от положительного направления оси Ox . Это просто поворот в противоположную сторону, но с тем же правилом отсчёта на окружности.

2 Синус при смене знака

Для синуса верно равенство $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$. На единичной окружности это связано с отражением точки относительно оси Ox : ордината меняет знак, а значит меняется и синус.

3 Косинус не меняется

Косинус при отрицательном угле остаётся таким же: $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$. Абсцисса точки не изменяется при отражении относительно оси Ox , поэтому значение косинуса сохраняется.

4 Тангенс меняет знак

Тангенс тоже меняет знак: $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$. Это удобно использовать, когда известен ответ для положительного угла и нужно быстро найти значение для поворота в другую сторону.

Симметрия точек на единичной окружности



Отражение относительно Oy

Если точка переходит в симметричную относительно оси Oy , её абсцисса меняет знак, а ордината остаётся прежней. Значит, меняется косинус, а синус сохраняется.



Отражение относительно Ox

При отражении относительно оси Ox меняется знак ординаты, но абсцисса не изменяется. Поэтому синус меняет знак, а косинус остаётся таким же, как у исходной точки.



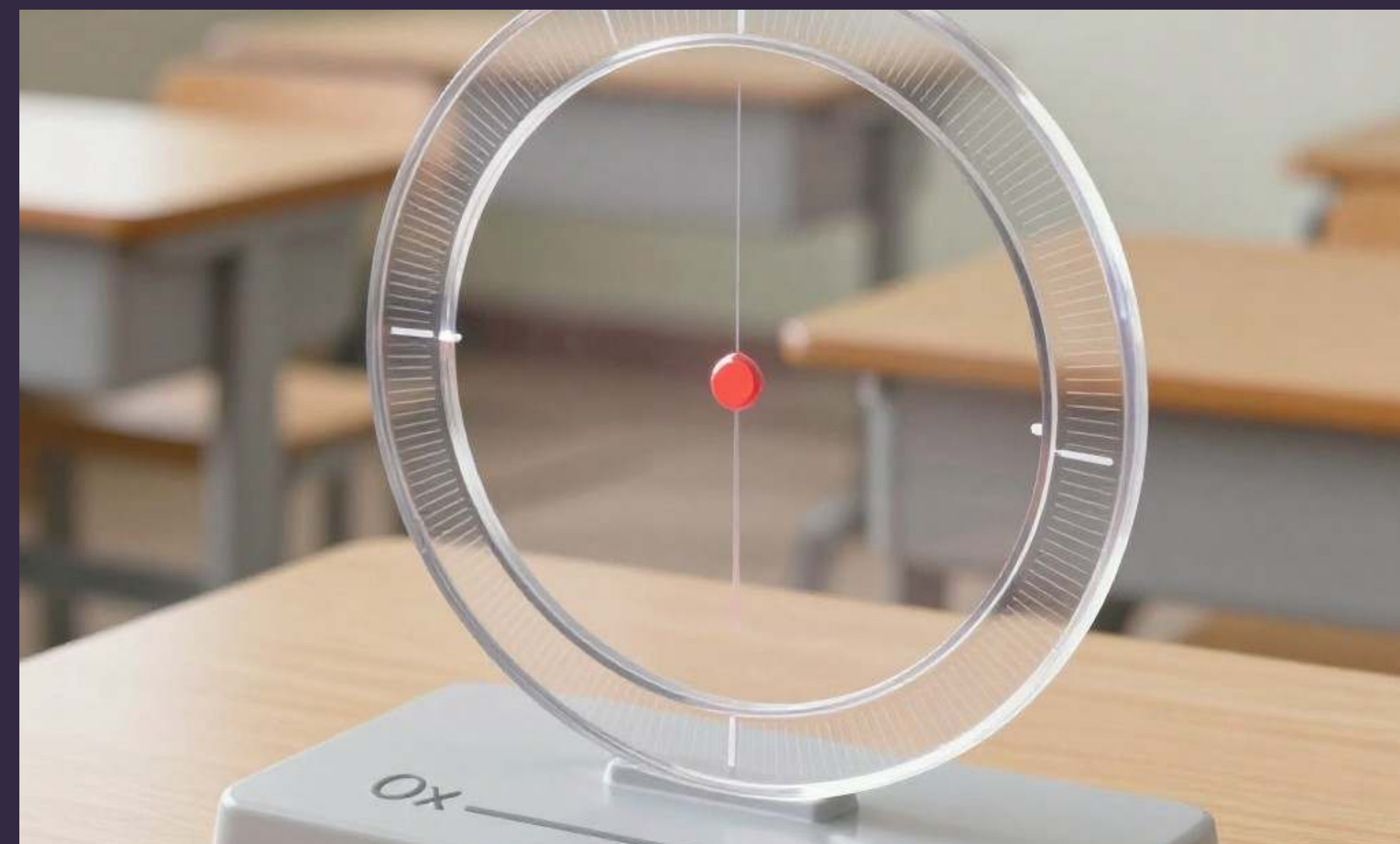
Левые и правые точки

Точки слева и справа на окружности имеют одинаковые по модулю значения функций, но могут отличаться знаками. Это помогает быстро находить ответы без полного пересчёта.



Связь с четвертями

Симметрия объясняет, почему в разных четвертях одни и те же числа появляются со знаком «плюс» или «минус». Достаточно знать положение точки относительно осей.



Формулы приведения для основных симметрий

Формулы приведения позволяют заменить угол во II, III или IV четверти на острый опорный угол и сразу определить знак ответа.

Все записи сводят сложный угол к острому; остаётся только правильно выбрать знак по четверти и виду симметрии.

Формулы приведения для углов, симметричных относительно осей и центра окружности.

Преобразование	sin	cos
$180^\circ - \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
$180^\circ + \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
$360^\circ - \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$

Основные области применения



Колебания и волны

Тригонометрические функции описывают повторяющиеся процессы: звук, свет, движение маятника и другие колебания. Они помогают показывать, как величина меняется во времени.



Вращение и поворот

При описании вращения удобно задавать положение через угол. Так легче понимать работу колёс, стрелок, рычагов и любых объектов, которые движутся по окружности.



Геометрические задачи

В геометрии тригонометрия помогает находить высоты, расстояния и углы, когда прямоугольный треугольник неудобен. Особенно полезна единичная окружность и связь координат с функциями.



Типичные ошибки при работе с произвольным углом

Чем сложнее угол, тем важнее идти по шагам: четверть, опорный угол, значение и знак. Это снижает число ошибок.

Чаще всего ошибаются в знаке, потому что он зависит не от числа, а от положения луча на окружности.

Учебные наблюдения по теме «Тригонометрические функции произвольного угла»; 2025.



19



Краткая памятка для вычислений

1



1. Определить четверть

Сначала нужно понять, где расположен угол на единичной окружности. От этого зависит знак ответа и выбор подходящей формулы.

2



2. Найти опорный угол

Затем выделяют острый угол между конечной стороной и осью Ox . Именно по нему удобно вспоминать известные значения.

3



3. Вспомнить базовое значение

После этого берут значение синуса или косинуса для острого угла из известных чисел 30° , 45° или 60° .

4



4. Поставить знак

Теперь остаётся учесть четверть и правильно поставить плюс или минус. Это самый важный шаг при ответе для произвольного угла.

5



5. Проверить тангенс

В конце нужно убедиться, что $\cos \alpha$ не равен нулю, если требуется тангенс. Такая проверка защищает от неверного ответа.

XX%

Что важно запомнить

Единичная окружность превращает тригонометрию в понятную систему: синус и косинус показывают координаты точки, а тангенс выражает их отношение. Если помнить четверти, симметрию и периодичность, любой угол становится вычислимым.