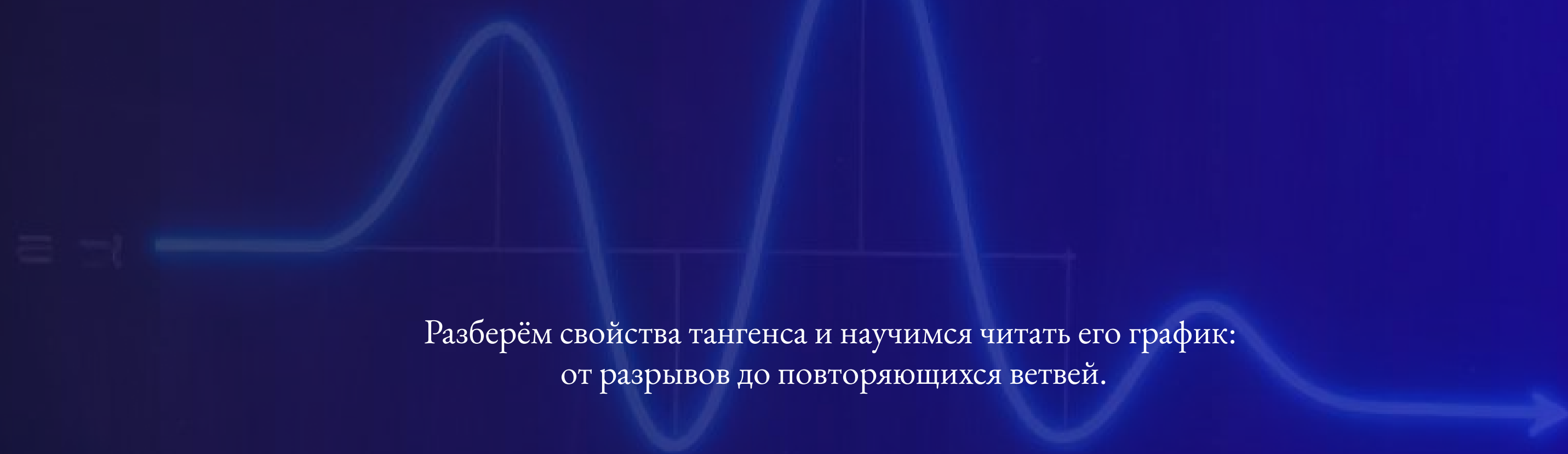


Функция $y = \operatorname{tg} x$: свойства и график



Разберём свойства тангенса и научимся читать его график:
от разрывов до повторяющихся ветвей.

Тангенс в курсе геометрии 11 класса

В прямоугольном треугольнике тангенс угла — это отношение катетов, а в алгебре он становится функцией $y = \operatorname{tg} x$. Она помогает решать уравнения, анализировать углы наклона и уверенно строить графики, связывая формулы с геометрией.



Определение функции $y = \operatorname{tg} x$

Функция $y = \operatorname{tg} x$ задаётся отношением $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$. Это сразу связывает её с основными тригонометрическими функциями и позволяет переносить знания с окружности на график.

Аргументы, для которых $\cos x = 0$, не подходят: в этих точках дробь не определена. Поэтому соответствующие значения x исключаются из области определения.

На единичной окружности тангенс читается как отношение ординаты точки к её абсциссе. Такая геометрическая интерпретация объясняет резкий рост значений около «запретных» углов.

Область определения функции $y = \operatorname{tg} x$ — все действительные числа, кроме $x = \pi/2 + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. В этих точках выражение $\sin x / \cos x$ не имеет смысла.

$$x = \pi/2 + \pi k$$

именно здесь $\cos x$
обращается в ноль, поэтому
значение $\operatorname{tg} x$ не может быть
вычислено.

Область значений функции

Множество значений $y = \operatorname{tg} x$ совпадает с множеством всех действительных чисел: функция может быть как очень большой, так и очень отрицательной.

Если аргумент приближается к $x = \pi/2 + \pi k$, значения тангенса растут без ограничения или убывают без ограничения.

Такое поведение отличается от синуса и косинуса: они ограничены числами от -1 до 1 , а тангенс «уходит» в бесконечность.

Поэтому при построении графика важно учитывать не только среднюю часть, но и поведение около вертикальных асимптот.

Периодичность функции

Период π

Для любых допустимых x выполняется равенство $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$.
Следовательно, график тангенса повторяется через каждые π по оси x .

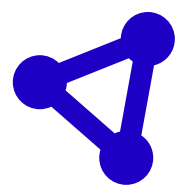
Повтор одной ветви

Чтобы построить всю функцию, достаточно аккуратно изучить поведение на одном промежутке между соседними асимптотами длиной π .

Смещение вдоль оси x

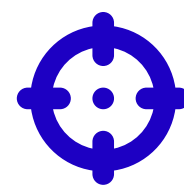
Далее эту ветвь переносят на соседние интервалы, сохраняя форму и направление возрастания, пока не заполнятся нужные диапазоны.

Нечётность и симметрия графика



Нечётность

Тангенс — нечётная функция: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$. Это означает, что значения при противоположных аргументах отличаются только знаком.



Симметрия относительно начала координат

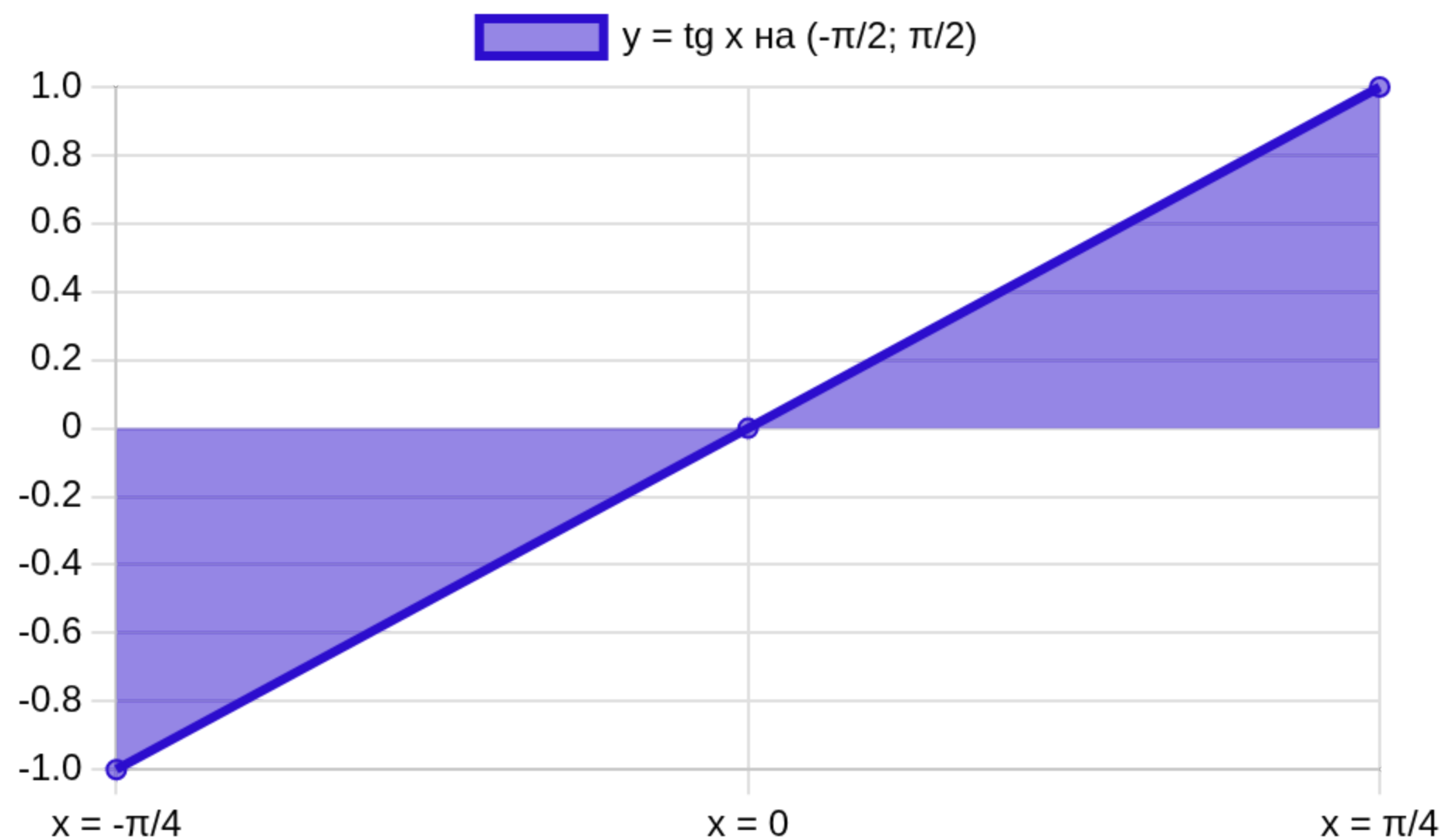
График симметричен относительно точки $(0; 0)$: если есть точка $(x; y)$, то на графике обязательно найдётся $(-x; -y)$.



Практическая проверка

Свойство симметрии помогает контролировать построение: находя одну правильную точку ветви, можно быстро получить ей «зеркальную» пару.

Поведение тангенса на одном промежутке



На выбранном интервале тангенс непрерывен и проходит через начало координат, а рост становится особенно резким по мере приближения к границам.

Три опорные точки показывают устойчивую форму возрастающей ветви, а значения около $\pm\pi/2$ подтверждают разрывный характер функции.

Точки получены из стандартных значений: $\operatorname{tg}(\pm\pi/4)=\pm 1$ и $\operatorname{tg}(0)=0$.

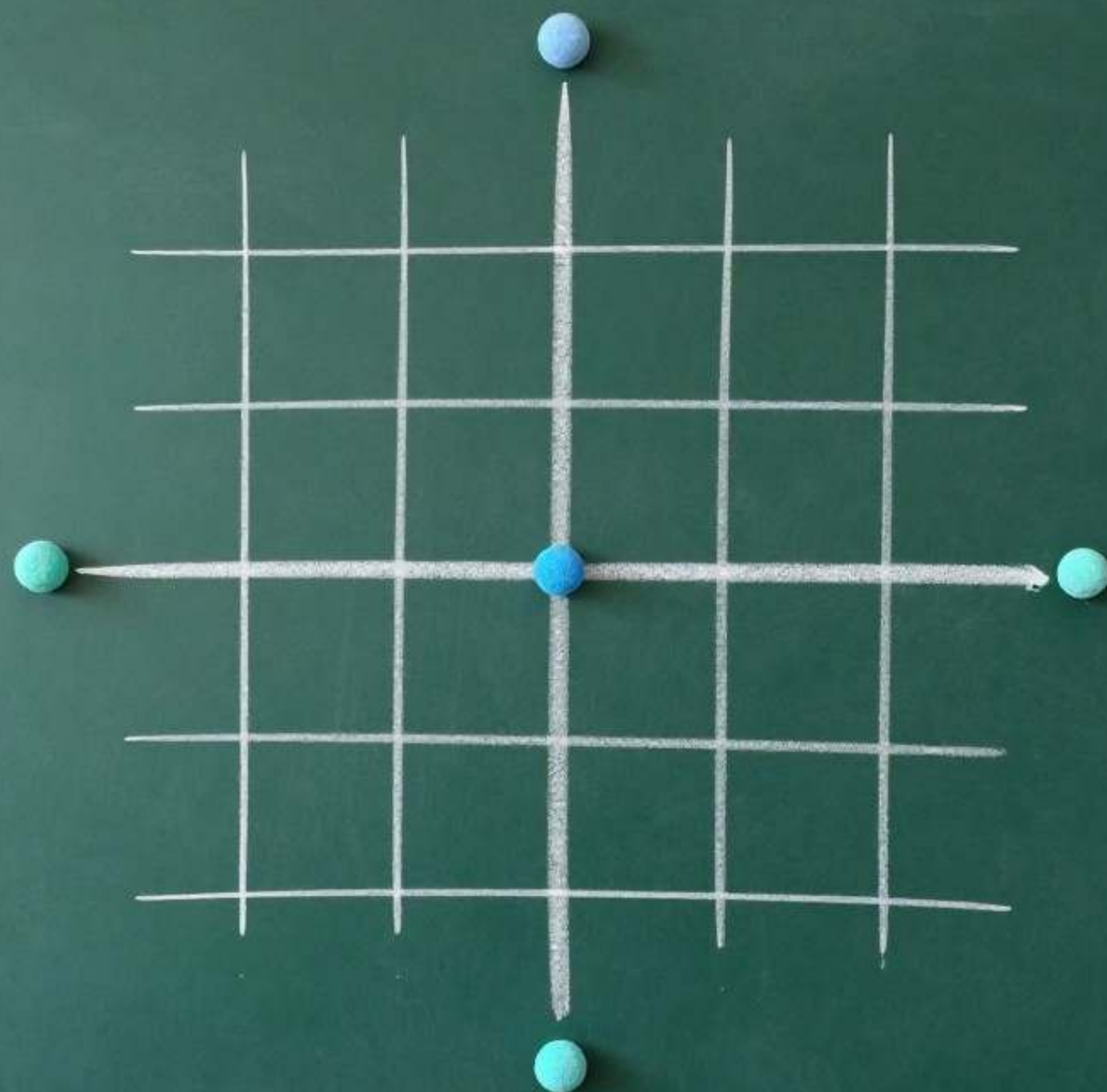
Опорные точки графика

Почему именно эти точки

Для построения ветви $y = \operatorname{tg} x$ удобно брать опорные точки: $(0; 0)$, $(\pi/4; 1)$, $(-\pi/4; -1)$, $(\pi/3; \sqrt{3})$, $(-\pi/3; -\sqrt{3})$. Они часто встречаются в школьных задачах и позволяют быстро сверить форму графика.

Как их использовать при построении

Отметьте оси координат, затем нанесите точки и проведите вертикальные асимптоты. Соединяйте точки плавной возрастающей линией на своём промежутке, чтобы график не пересекал асимптоты.



Основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$

Параметр	Значение/вид
Область определения	$\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + \pi k\}$
Область значений	$\mathbb{R}$
Период	π
Нечётность	$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$
Нули	$x = \pi k$
Вертикальные асимптоты	$x = \pi/2 + \pi k$
Экстремумы	нет (ветви возрастают)

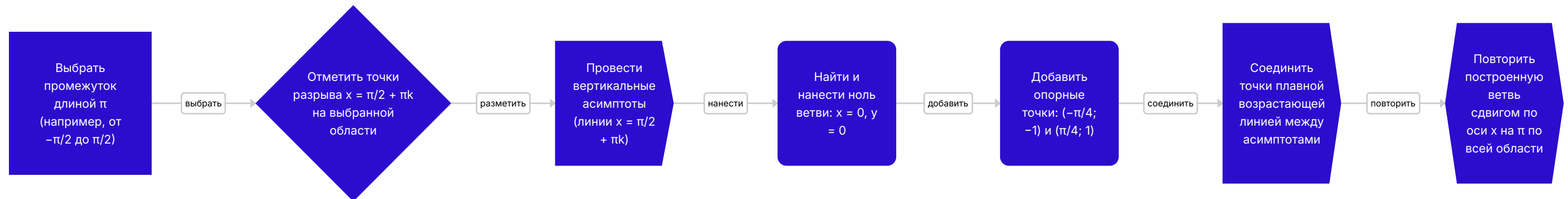
Сравните ключевые характеристики тангенса: что входит в область определения, какие значения функция принимает и как устроены нули, период и асимптоты.

Все перечисленные свойства согласуются с тем, что каждая ветвь тангенса однажды пересекает ось Ox , возрастает на своём промежутке и повторяется с периодом π .

Определение и базовые свойства $\operatorname{tg} x$ ($\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$).

Алгоритм построения графика $y = \operatorname{tg} x$

Логика построения опирается на разрывы при $\cos x = 0$ и повторение ветвей с периодом π .



Нули и знак функции

Нули функции $y = \operatorname{tg} x$ достигаются там, где $\operatorname{tg} x = 0$, то есть при $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. На окружности единичного радиуса это соответствует положению, где значение $\sin x$ обращается в ноль.

Между соседними асимптотами функция возрастает, поэтому знак меняется ровно один раз. Слева от нуля значения отрицательные, справа — положительные, без дополнительных пересечений оси Ox .

Эта закономерность особенно удобна при решении уравнений и неравенств: достаточно определить, в каком промежутке находится корень, и сразу сделать вывод о знаке выражения $\operatorname{tg} x$.

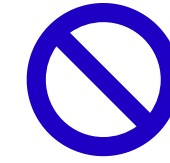
На каждом промежутке вида $(-\pi/2 + \pi k; \pi/2 + \pi k)$ функция $y = \operatorname{tg} x$ строго возрастает. Это означает отсутствие убывающих участков и упрощает анализ графика при решении задач.

π

Из-за этого строгого повторения и предсказуемости знак и поведение тангенса легко контролировать на каждом типовом промежутке.

Базовые свойства функции $\operatorname{tg} x$ в школьном курсе (опора на периодичность и производный/графический характер поведения).

Вертикальные асимптоты и разрывы



Места разрывов

Вертикальные асимптоты имеют вид $x = \pi/2 + \pi k$. В этих точках дробь $\sin x / \cos x$ теряет смысл, поэтому график не может быть «продолжен» через асимптоты как непрерывная кривая.



Бесконечное поведение

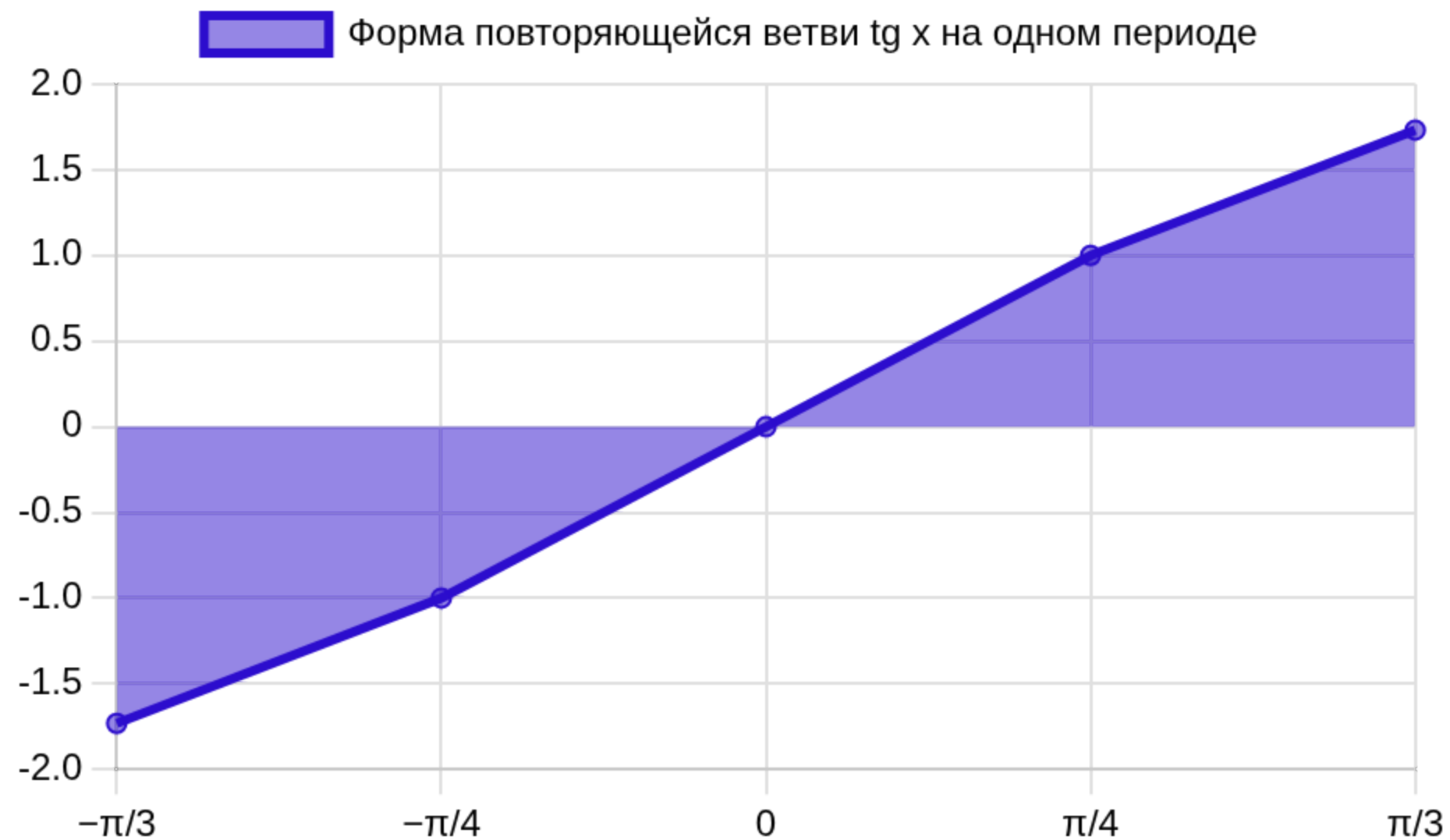
При приближении слева график уходит к $+\infty$, а при приближении справа — к $-\infty$ (и наоборот для соседних асимптот). Это отражает «разворот» ветви и неограниченный рост модуля $\operatorname{tg} x$.



Разрывы без «склеивания»

Разрывы тангенса — бесконечные, поэтому кривая не соединяется через линии асимптот. У устранимых разрывов была бы конечная «точка восстановления», чего здесь не происходит.

Повторяемость ветвей графика



Поскольку ближайшие асимптоты разделяют ось на участки одной длины, форма ветви на каждом из них воспроизводится без изменения направления возрастания.

По данным точкам видно, что каждая ветвь проходит через середину своего промежутка и имеет одинаковый «наклон» роста; разрывы не дают ветвям соединяться между собой.

Рассчитанные значения функции $\operatorname{tg} x$ по опорным углам (учебные соотношения) и последующее обобщение по периоду π .

Связь тангенса с углом наклона

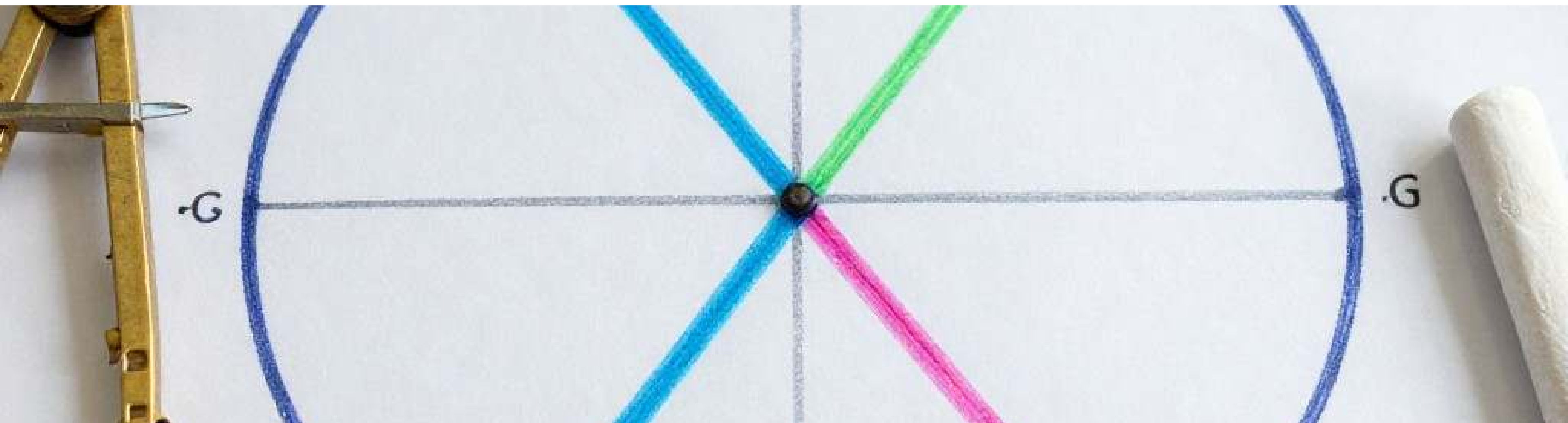
Для прямой, образующей угол наклона α с положительным направлением оси Ox , тангенс этого угла равен $\operatorname{tg} \alpha$. Поэтому величина $\operatorname{tg} \alpha$ служит «числовой мерой» того, насколько линия отклоняется от горизонтали.

Когда угол наклона увеличивается, возрастает и $\operatorname{tg} \alpha$. На графике это согласуется с монотонностью на каждом промежутке определения: рост α приводит к более «крутому» повороту ветви.

В геометрии данное соответствие используют для описания наклонных отрезков и линий, образующих угол с горизонталью: скаты, лестницы, крыши и траектории, где важно связать форму с числом угла.

Тангенс на единичной окружности

- На единичной окружности тангенс выражается как отношение y/x для точки, соответствующей углу: если точка имеет координаты (x, y) , то $\operatorname{tg} \alpha = y/x$. Такая геометрическая запись делает смысл тангенса наглядным для построений.
- Когда $x = \pi/2 + \pi k$, абсцисса соответствующей точки становится равной нулю, поэтому отношение y/x не определено. Отсюда и отсутствие значения $\operatorname{tg} x$ в этих точках, что согласуется с вертикальными асимптотами.



Типичные ошибки при изучении графика

Часто забывают исключать точки $x = \pi/2 + \pi k$: в них $\cos x = 0$, а значит дробь $\operatorname{tg} x$ теряет смысл. В результате график ошибочно «закрашивают» там, где у него разрывы и вертикальные асимптоты.

Иногда путают период π и 2π . Тангенс повторяется через π , поэтому при сдвиге графика на 2π он не «обнуляется», а просто снова проходит через те же значения два раза, что ведёт к неверным выводам о периодичности.

Ошибочно изображают максимум или минимум на ветви: у $\operatorname{tg} x$ на каждом допустимом промежутке нет убывающих участков. Каждая ветвь монотонно возрастает, поэтому горизонтальных «поворотных» точек для экстремумов не возникает.

Невнимательность к опорным точкам тоже мешает построению: без них трудно сохранить правильную кривизну и направление роста. Верный график состоит из возрастающих ветвей, разделённых вертикальными прямыми разрыва.

Формулы и свойства для запоминания

Ключевые равенства и перечень областей изменения помогают быстро переходить от аналитической записи к форме графика и обратно.

Из таблицы видно, что все основные выводы о графике напрямую следуют из формулы $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$, а периодичность и симметрия позволяют быстро восстанавливать ветви на всей числовой оси.

Запись	Что описывает	Период/область	Нули/ асимптоты
$\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$	Определение	—	—
$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$	Повторяемость	период π	—
$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$	Симметрия	—	—
Область определения: $x \neq \pi/2 + \pi k$	Где функция есть	исключить точки разрыва	—
Область значений: $\mathbb{R}$	Диапазон	все действительные	—
Нули: $x = \pi k$	Пересечения с Ox	—	нули

Итоги изучения функции $y = \operatorname{tg} x$

Функция $y = \operatorname{tg} x$ — нечётная периодическая функция с периодом π и областью значений $\mathbb{R}$. Её график составлен из одинаковых возрастающих ветвей, разделённых вертикальными асимптотами $x = \pi/2 + \pi k$; это помогает решать уравнения и применять тригонометрию в задачах геометрии 11 класса.