

Многоугольники: углы, правильные фигуры и площади

Многоугольники помогают вычислять углы и площади и связываются с окружностями.



Где в жизни встречаются многоугольники

Многоугольники встречаются в плитке, дорожных знаках, узорах, чертежах, архитектуре и компьютерной графике. Треугольники, четырёхугольники, пятиугольники и шестиугольники часто служат основой конструкций и орнаментов. В школьной геометрии это связывает углы, построения и площади.



180°

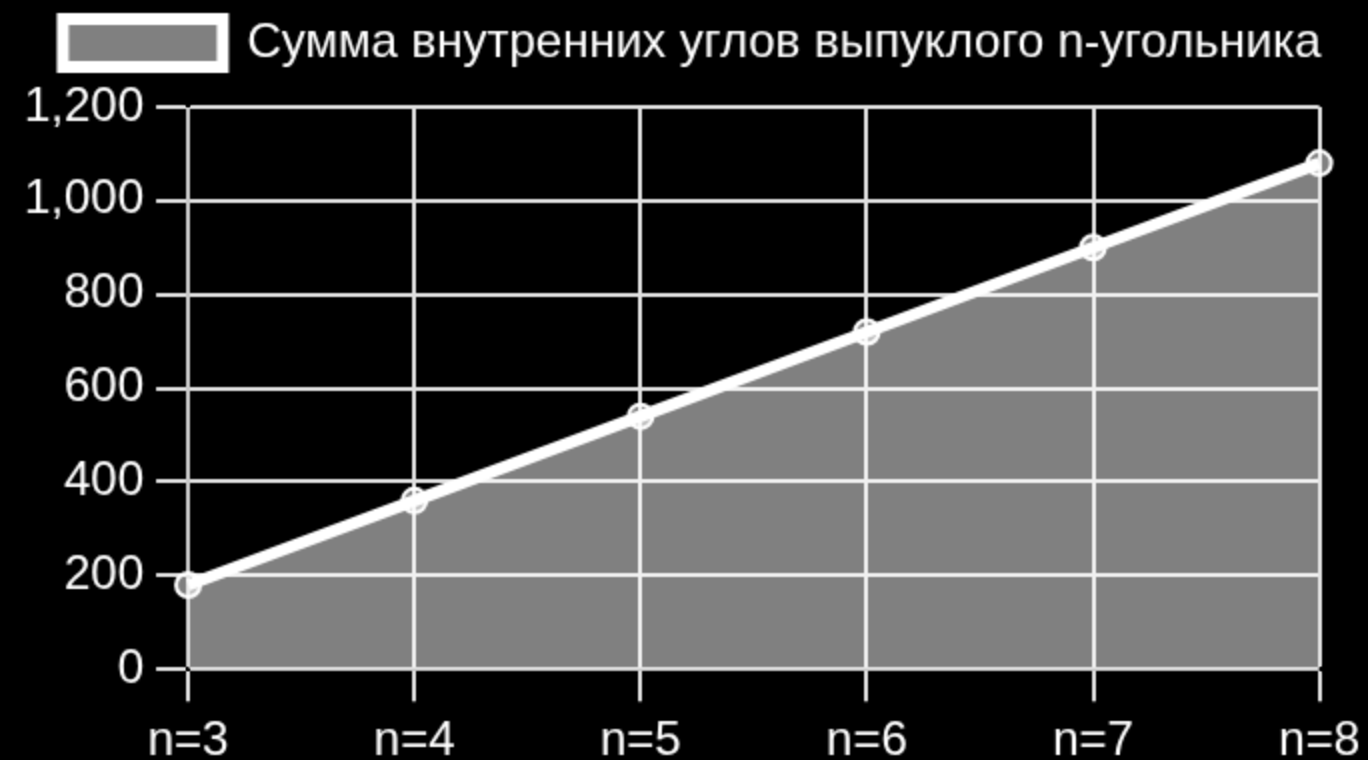
**При разбиении на
треугольники сумма углов
каждого равна 180°.**

Многоугольник — это замкнутая ломаная без самопересечений. У него есть стороны, вершины, внутренние углы и диагонали. Выпуклый многоугольник лежит по одну сторону от каждой стороны, а вогнутый имеет внутренний угол больше 180°.

Вывод формулы суммы внутренних углов

Мысленно проведите диагонали из одной вершины и разбейте многоугольник на треугольники.

Сумма внутренних углов для разных многоугольников



Линейный рост удобно проверять на примерах: каждая новая сторона добавляет один треугольник в разбиение.

По графику видно правило: при увеличении числа сторон на 1 сумма внутренних углов растёт на 180° . Это приводит к общему выражению $(n-2) \cdot 180^\circ$.

Данные по формуле суммы внутренних углов, используемой в школьной геометрии.

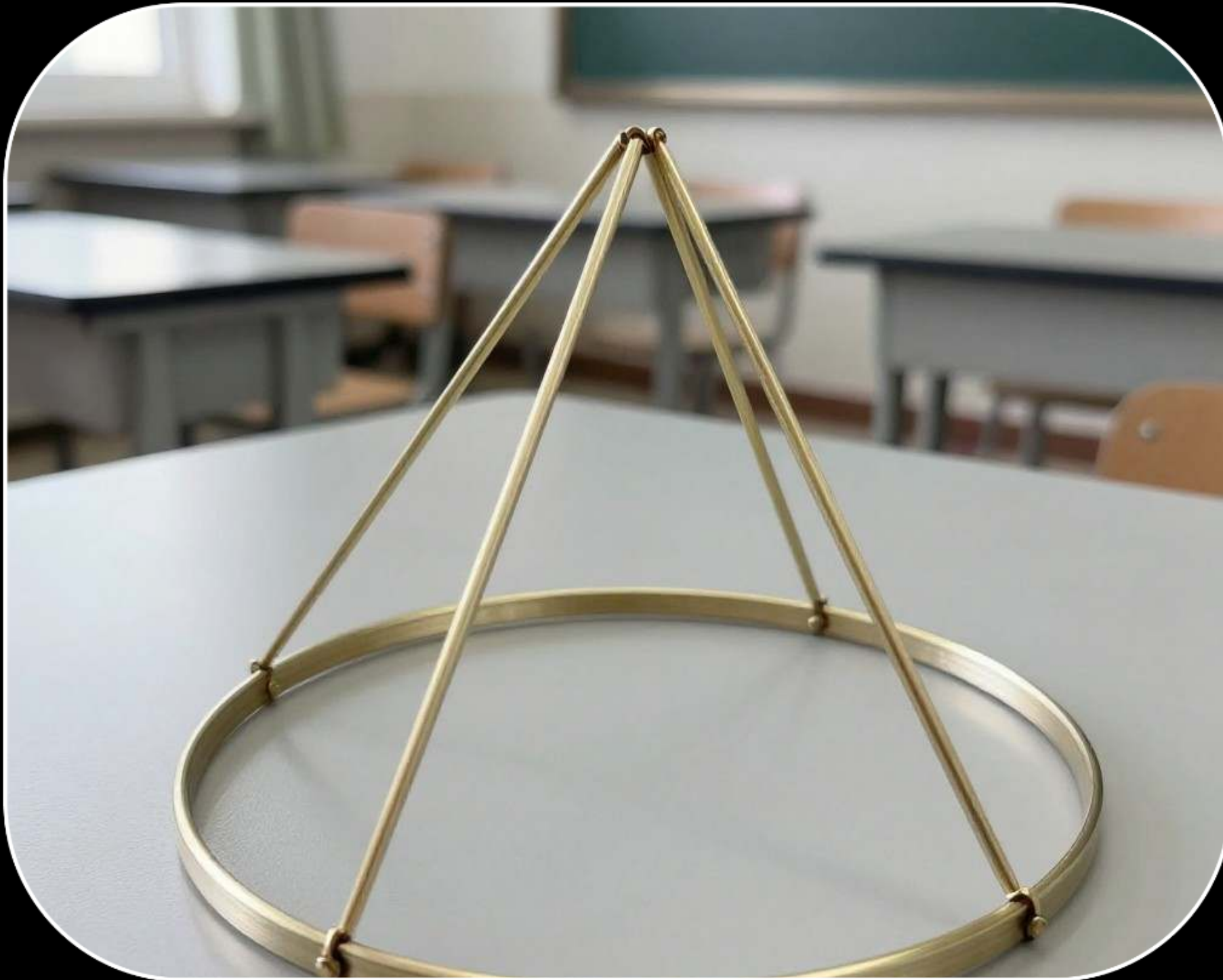
Примеры суммы внутренних углов

n	Многоугольник	Сумма углов
3	треугольник	180°
4	четырёхугольник	360°
5	пятиугольник	540°
6	шестиугольник	720°
8	восьмиугольник	1080°
n	любой прост.	$(n-2) \cdot 180^\circ$

Соотношение между числом сторон и суммой внутренних углов дополняется общим видом формулы.

Формула согласуется с частными случаями: подстановка $n=3,4,5$ даёт 180°, 360°, 540° без дополнительных вычислений.

Правильные многоугольники



Признаки правильной фигуры

Правильный многоугольник — это многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны. Поэтому его внешний вид «ровный» и симметричный: он не имеет перекосов или неравных участков.

Связь с окружностью

У правильного многоугольника вершины лежат на одной окружности. Её центр одинаково удалён и от вершин, и от всех сторон — это помогает строить фигуры и удобно связывает их с радиусами.

180°

**Чем больше сторон, тем
внутренний угол ближе к 180° и
форма становится более «круглой».**

Каждый внутренний угол правильного n -угольника равен $((n-2) \cdot 180^\circ) / n$. Для правильного треугольника это 60° , для квадрата — 90° , для правильного шестиугольника — 120° .

Внешние углы и их сумма

Сумма внешних углов любого выпуклого многоугольника равна 360° . Это работает независимо от числа сторон, главное — рассматривать именно выпуклую фигуру.

У правильного n -угольника каждый внешний угол равен $360^\circ/n$. Тогда, например, у треугольника внешний угол 120° , у квадрата — 90° , у шестиугольника — 60° .

Эта закономерность помогает при построениях: по одному известному внешнему углу легко находить остальные и проверять правильность чертежа.

Вписанная окружность в многоугольник



- Вписанная окружность касается всех сторон многоугольника. Её центр расположен на одинаковом расстоянии от каждой стороны, поэтому окружность «подходит» к границам фигуры ровно.
- Для правильного многоугольника вписанная окружность существует всегда. Радиус такой окружности называют вписанным радиусом или апофемой; именно он нужен в формулах площади правильных многоугольников.

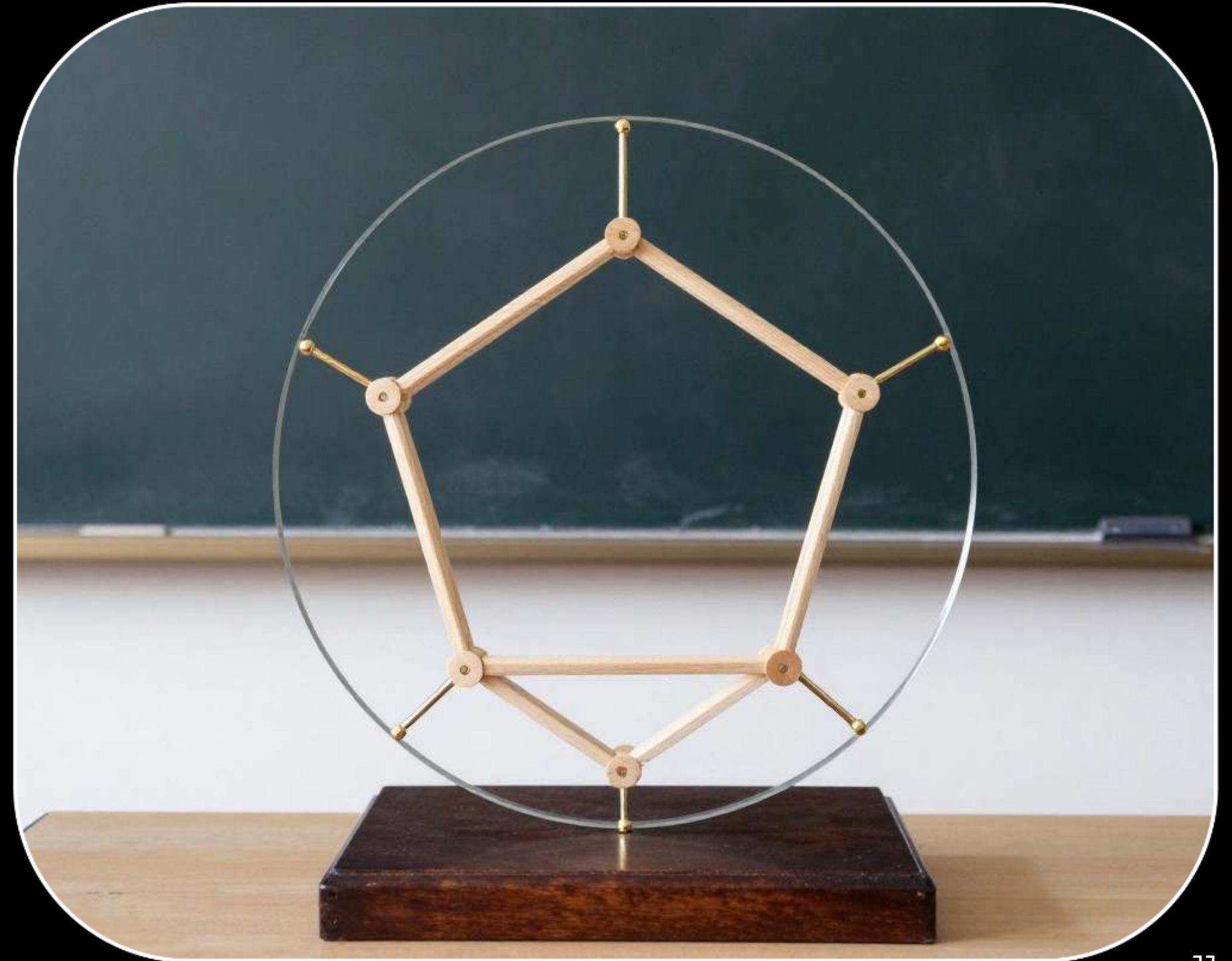
Описанная окружность около многоугольника

1

Описанная окружность проходит через все вершины многоугольника и лежит так, что её центр равноудалён от каждой вершины. Для правильного n -угольника такая окружность существует всегда и помогает связать фигуру с окружностью.

2

Радиус описанной окружности важен при построениях: он позволяет восстановить правильную фигуру по стороне, центральным углам или по числу сторон. Поэтому в задачах удобно переходить от углов и расстояний к окружности.

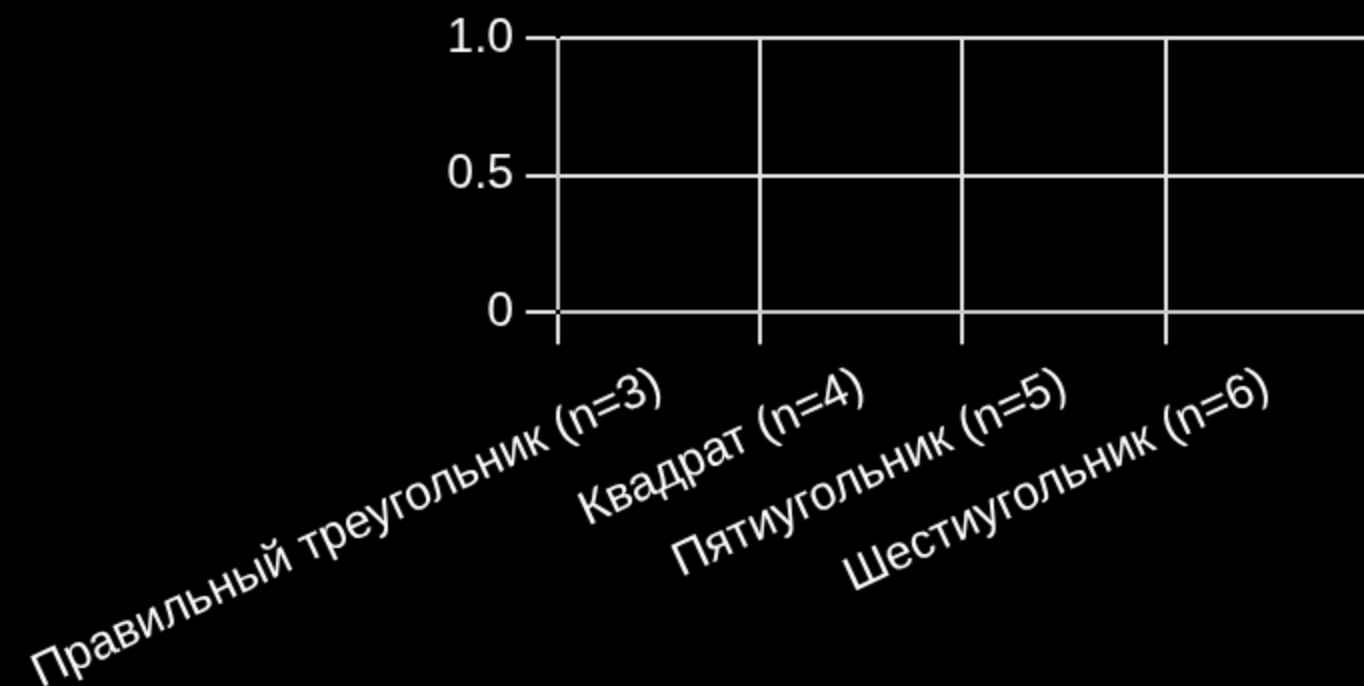


Как понять, связана ли фигура с окружностью

Проверка идёт по данным о сторонах, углах и взаимном расположении вершин и сторон.

Площадь, периметр и радиус вписанной окружности

Связь площади с периметром и апофемой (радиус вписанной окружности)



Для правильных многоугольников апофема — это радиус вписанной окружности. Из-за формулы $S = 1/2 \cdot P \cdot r$ площадь возрастает, когда при том же периметре увеличивается r .

При фиксированном периметре рост числа сторон делает фигуру «ближе к кругу», а соответствующая апофема, как правило, увеличивается, поэтому площадь становится больше.

$1/2$

Итоговая площадь получается ровно наполовину произведения периметра на радиус вписанной окружности.

Формула связывает площадь с двумя величинами — периметром P и радиусом r вписанной окружности. Она появляется, когда правильный многоугольник удобно разбить на одинаковые треугольники.

Основные формулы по теме

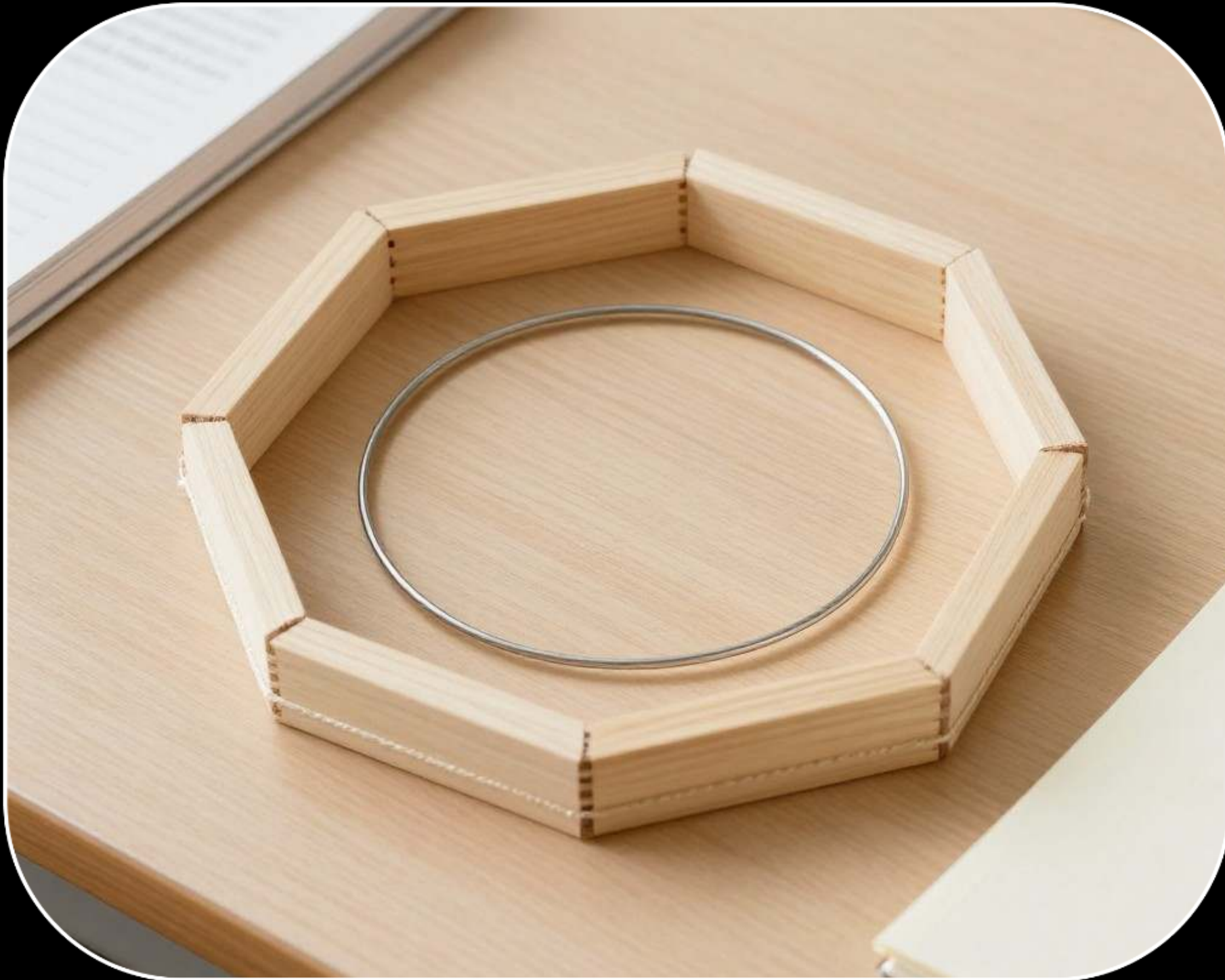
Ключевые соотношения помогают находить суммы углов, внешний угол, периметр и площадь правильных многоугольников, а также связывают фигуру с окружностью.

Эти формулы дают «набор инструментов»: сначала находят нужные углы, затем периметр, после чего по радиусу вписанной окружности получают площадь.

Параметр	Формула
Сумма внутренних углов	$(n-2) \cdot 180^\circ$
Внутренний угол правильного n-угольника	$((n-2) \cdot 180^\circ) / n$
Сумма внешних углов (выпуклый)	360°
Внешний угол правильного n-угольника	$360^\circ / n$
Периметр правильного n-угольника	$n \cdot a$
Площадь правильного (описанного около окружности)	$S = 1/2 \cdot P \cdot r$

Школьная геометрия.

Пример вычисления площади

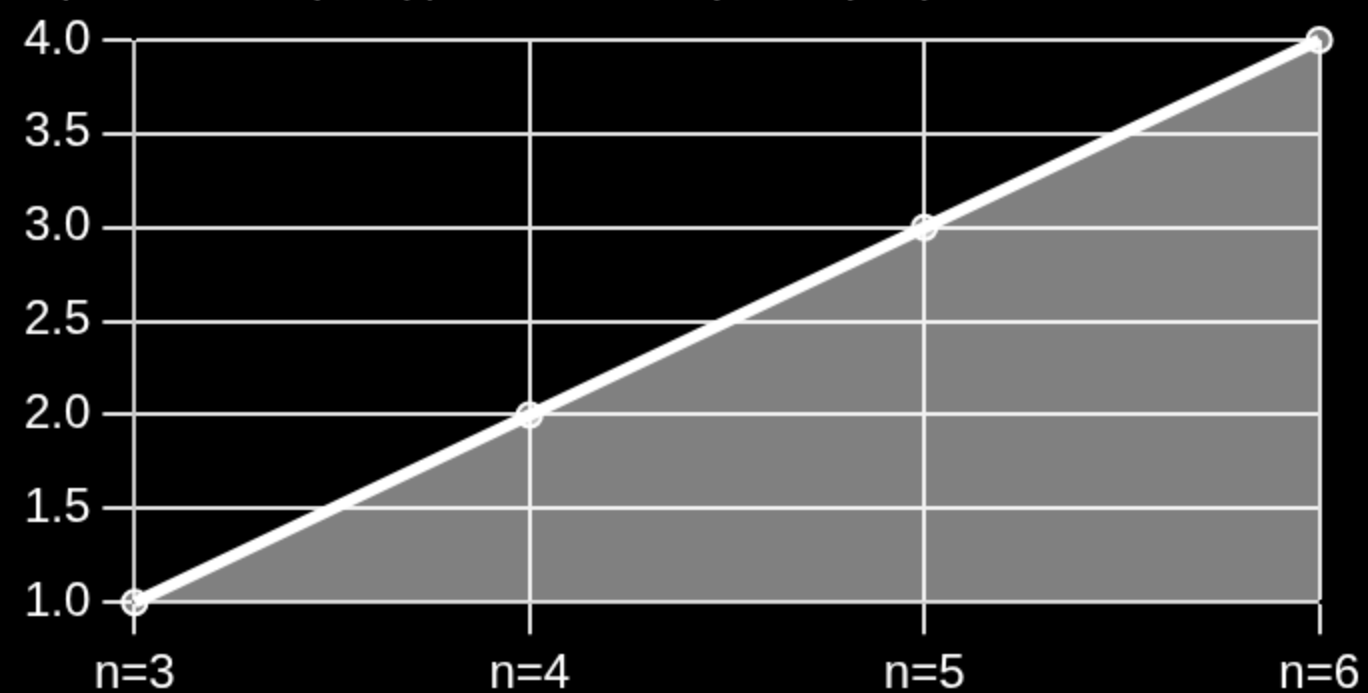


- Правильный шестиугольник со стороной 6 см имеет периметр 36 см. Если радиус вписанной окружности равен 5,2 см, используем формулу площади: $S = 1/2 \cdot P \cdot r$.

- Получаем $S = 1/2 \cdot 36 \cdot 5,2 = 93,6 \text{ см}^2$. Этот пример показывает, что площадь можно найти по периметру и радиусу, не разрезая фигуру на отдельные треугольники.

Сравнение правильных многоугольников

Сравнение при одинаковом периметре (качественная зависимость)



При одном и том же периметре разные значения n дают разные радиусы вписанной окружности и, следовательно, разные площади. Чем больше сторон, тем «круглее» становится форма.

График отражает общий вывод: увеличение числа сторон у правильного многоугольника при фиксированном P приводит к увеличению площади, потому что растёт эффективный радиус вписанной окружности.

Школьная геометрия: свойства правильных многоугольников и формула $S = \frac{1}{2} \cdot P \cdot r$.

Типичные ошибки в задачах по теме

Частая ошибка — путать сумму внутренних углов многоугольника с величиной одного внутреннего угла. Формула $(n-2) \cdot 180^\circ$ относится именно к сумме, а не к отдельной величине.

Другая распространённая ошибка — подставлять $(n-2) \cdot 180^\circ$ вместо внутреннего угла правильного n -угольника. Чтобы получить один угол, нужно дополнительно разделить сумму на n .

Нередко путают вписанную и описанную окружности: при описанной окружности через вершины проходят точки круга, а при вписанной окружности стороны касаются окружности.

Также забывают условие применимости формулы площади $S = 1/2 \cdot P \cdot r$: она используется для правильных многоугольников, где радиус r — радиус вписанной окружности, а P — периметр.

Алгоритм решения задач по теме

Последовательность действий помогает не пропускать нужные проверки и формулы.

Итог: углы, окружности и площадь одной формулой

Сумма внутренних углов n -угольника равна $(n-2) \cdot 180^\circ$, а внешние углы выпуклого многоугольника в сумме дают 360° . Для правильных фигур связь с окружностями определяет и площадь: $S = 1/2 \cdot P \cdot r$.