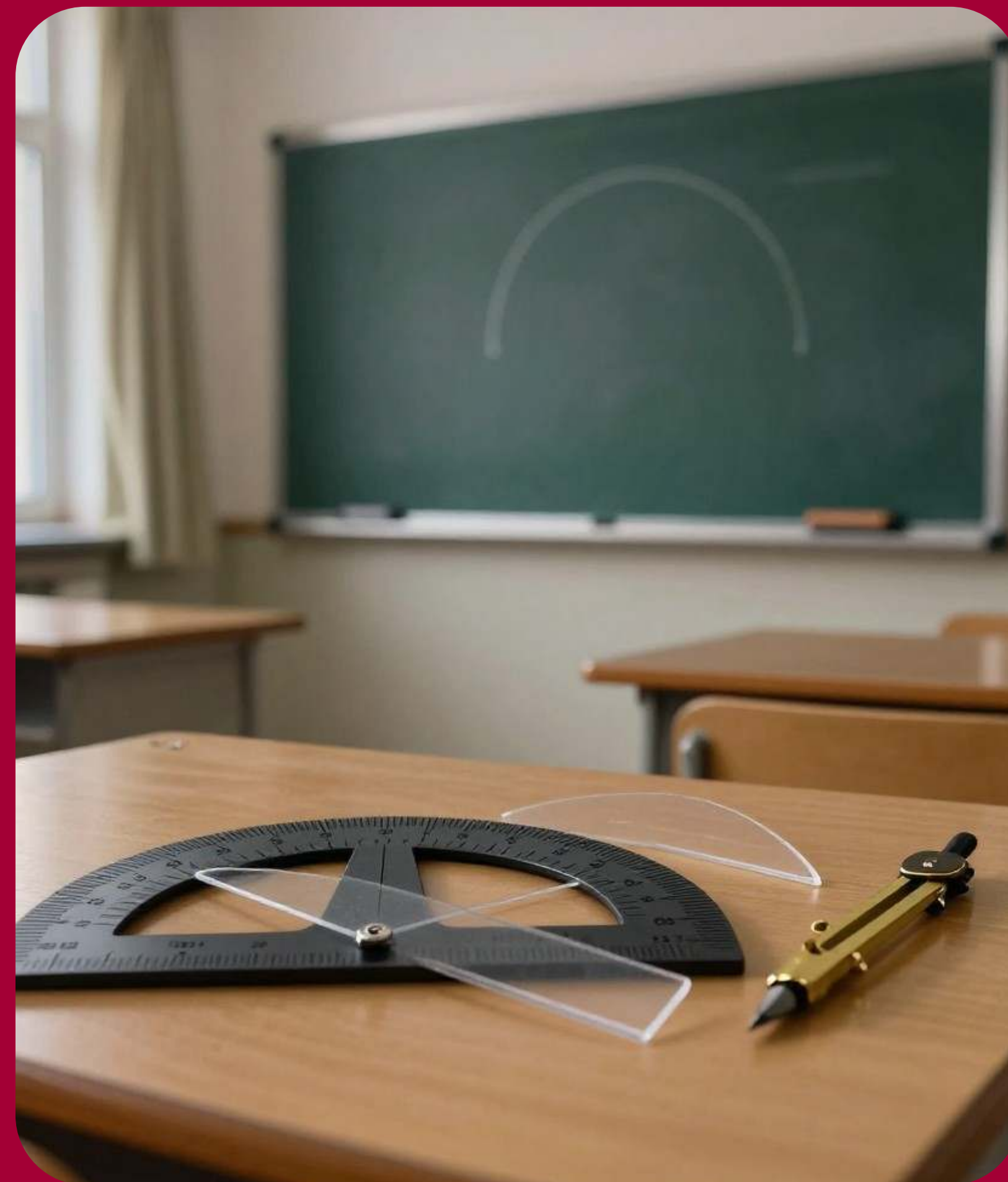


Арккосинус и уравнение $\cos t = a$

Разберём, как по значению косинуса
находить угол и записывать все
решения.



Почему возникает обратная задача для косинуса

Функция $\cos t$ периодична и на всей числовой прямой не взаимно однозначна. На отрезке $[0; \pi]$ она убывает от 1 до -1 , поэтому там удобно задать единственный угол для каждого a и построить $\arccos a$.



Определение арккосинуса

1

$\arccos a$ — это единственный угол t из отрезка $[0; \pi]$, для которого выполняется равенство $\cos t = a$. Такой «единственный» характер обеспечивается именно выбранным промежутком.

2

Запись $\arccos a$ имеет смысл только при $-1 \leq a \leq 1$, потому что косинус принимает действительные значения лишь в этих пределах. При $|a| > 1$ действительных углов не существует.

3

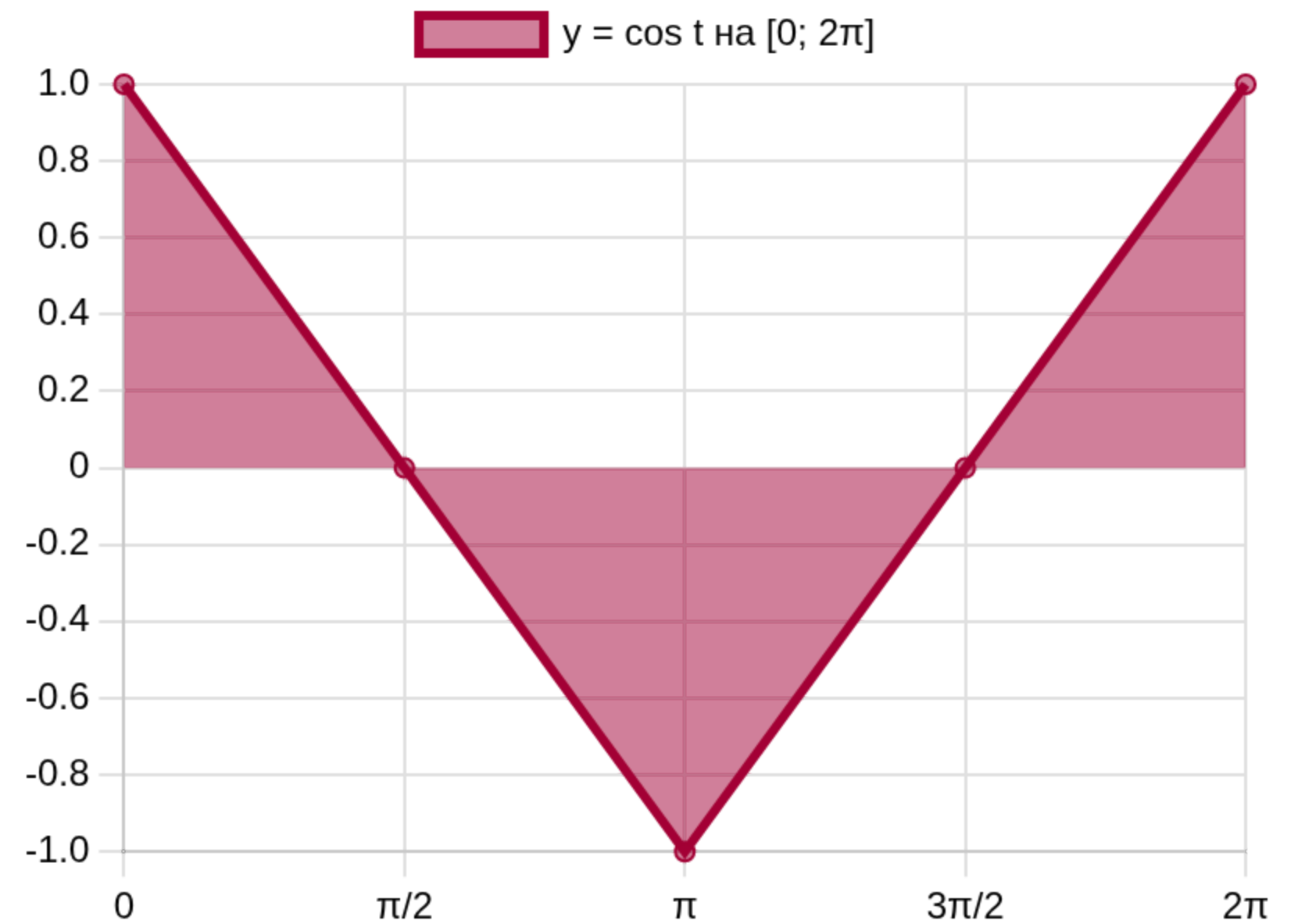
Опорные точки помогают быстро проверять результаты: $\arccos 1 = 0$, $\arccos 0 = \pi/2$, $\arccos(-1) = \pi$. Их удобно держать в памяти для устного контроля и ошибок по знакам.

График $y = \cos t$ и его диапазон

На промежутке $[0; \pi]$ косинус принимает все значения от 1 до -1 без повторов, поэтому там существует обратная функция.

Повторяемость на периоде 2π объясняет, почему для $\arccos$ выбирают именно $[0; \pi]$: иначе каждому a отвечало бы несколько t .

Построение по значениям $\cos t$ и определению периода функции косинус.



Ключевые значения arccos a

a	arccos a
1	0
1/2	$\pi/3$
0	$\pi/2$
-1/2	$2\pi/3$
-1	π
$ a >1$	нет решений

Таблица задаёт быстрые ориентиры и проверку ответов: arccos берётся из диапазона $[0; \pi]$.

Если a выходит за пределы $[-1; 1]$, уравнение $\cos t = a$ не имеет действительных решений; иначе arccos a всегда лежит в $[0; \pi]$.

Определение arccos и базовые значения $\cos t$ для углов 0, $\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/3$, π .

$$-1 \leq a \leq 1$$

указывает, когда уравнение $\cos t = a$ имеет действительные ответы

Для функции $\arccos a$ это условие задаёт границу существования угла: если a не попадает в него, соответствующий угол в действительных числах не определяется.

Определение $\arccos a$ как обратной к $\cos t$ на $[0; \pi]$ и диапазон значений косинуса.

Алгоритм решения уравнения $\cos t = a$

Последовательность: проверка допустимости a , вычисление главного угла и учёт периода $2\pi k$.



Геометрический смысл на единичной окружности



Точка на единичной окружности соответствует углу t и имеет координаты $(\cos t, \sin t)$. Поэтому равенство $\cos t = a$ означает, что мы ищем пересечение окружности с вертикальной прямой $x = a$.



Число точек пересечения зависит от положения прямой: при $-1 < a < 1$ прямая режет окружность в двух точках, а при $a = \pm 1$ — касается в одной. Отсюда появляются два симметричных угла или один.



Общее решение уравнения

1

Если $-1 \leq a \leq 1$, то для главного значения $t_0 = \arccos a$ получаются два угла на одном периоде: t_0 и $2\pi - t_0$. Затем добавляется периодичность косинуса.

3

В эквивалентной форме удобно помнить симметрию: $t = \pm \arccos a + 2\pi k$. Она объединяет разные диапазоны a в одной записи и помогает не потерять ветвь.

2

Все решения записываются так: $t = \arccos a + 2\pi k$ и $t = -\arccos a + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Второе равенство эквивалентно $t = 2\pi - \arccos a + 2\pi k$.

4

Отдельные крайние случаи: при $a = 1$ получаем только $t = 2\pi k$, а при $a = -1$ — только $t = \pi + 2\pi k$. Здесь второй угол совпадает с первым, поэтому решений на период меньше.

Сравнение числа решений по значению a

По положению прямой $x = a$ относительно единичной окружности видно: при выходе за пределы $[-1; 1]$ пересечений нет.

Графическая модель связывает алгебраическое условие на a с количеством решений: $-1 < a < 1$ даёт две точки на период, а $|a|=1$ — одну.

Точки пересечения вертикальной прямой $x = a$ с единичной окружностью и периодичность $\cos t$ (период 2π).



Частные случаи и контроль ответа

1

При $a = 1$ уравнение $\cos t = 1$ обращается в условие, что t соответствует точкам единичной окружности с координатой $x = 1$. Тогда $t = 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$ — одно решение на каждом периоде.

2

При $a = -1$ аналогично получаем единственную точку с $x = -1$: $t = \pi + 2\pi k$. Такая форма подчёркивает, что на период приходится ровно один угол, а не два.

3

Чтобы избежать ошибок, выполняйте подстановку: вычисляете $\cos t$ найденного вида и проверяете равенство с исходным a . Особенно важно не «потерять» множитель $2\pi k$ и не принять частный ответ за общий.

Типовые ошибки при решении

Ошибка	Как выглядит	Правильное действие
$ a \leq 1$	Указали $\arccos$ при $ a >1$	Сначала проверьте условие $-1 \leq a \leq 1$
Только одно решение	Игнорируют парность при $-1 < a < 1$	Добавьте симметричный угол и период $2\pi k$
путаница аркфункций	$\arccos$ заменяют на $\arcsin$	Используйте арккосинус: $t_0 = \arccos a$
забыли период	Не учли $2\pi k$	Запишите общее решение с $+2\pi k$
неправильный диапазон	Оставили t_0 вне $[0; \pi]$	Главное значение $\arccos$ всегда в $[0; \pi]$

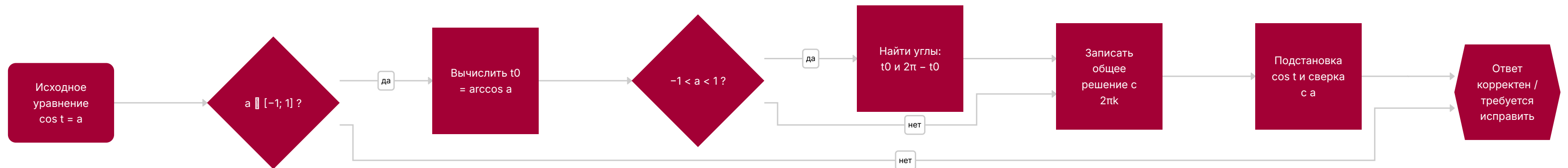
Таблица помогает быстро диагностировать частые промахи при решении $\cos t = a$ и сразу увидеть, как правильно действовать в каждом случае.

Большинство ошибок связано с игнорированием области допустимых значений и с неполным учётом симметрии и периодичности косинуса.

Учебная практика и типовые критерии оценивания решений

Проверка корректности ответа

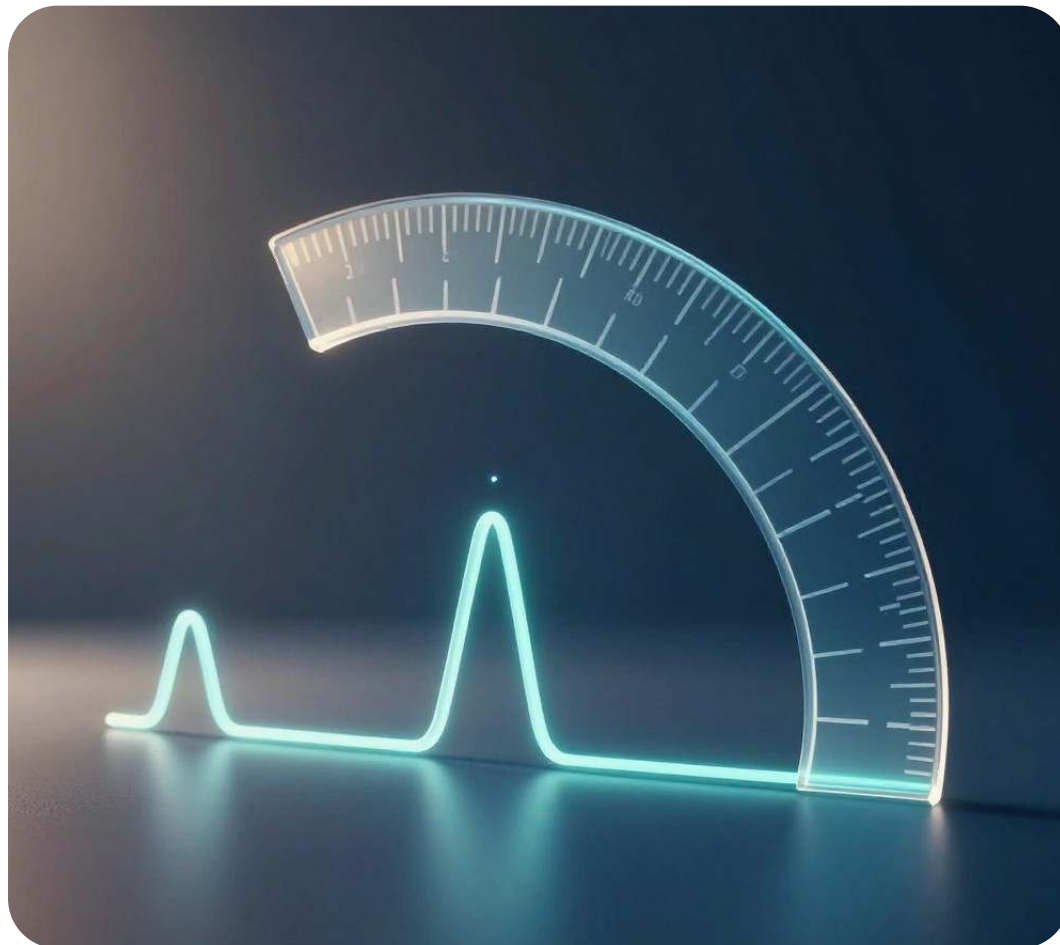
Алгоритм сверки решения для уравнения $\cos t = a$



Связь с графиком функции $y = \arccos x$

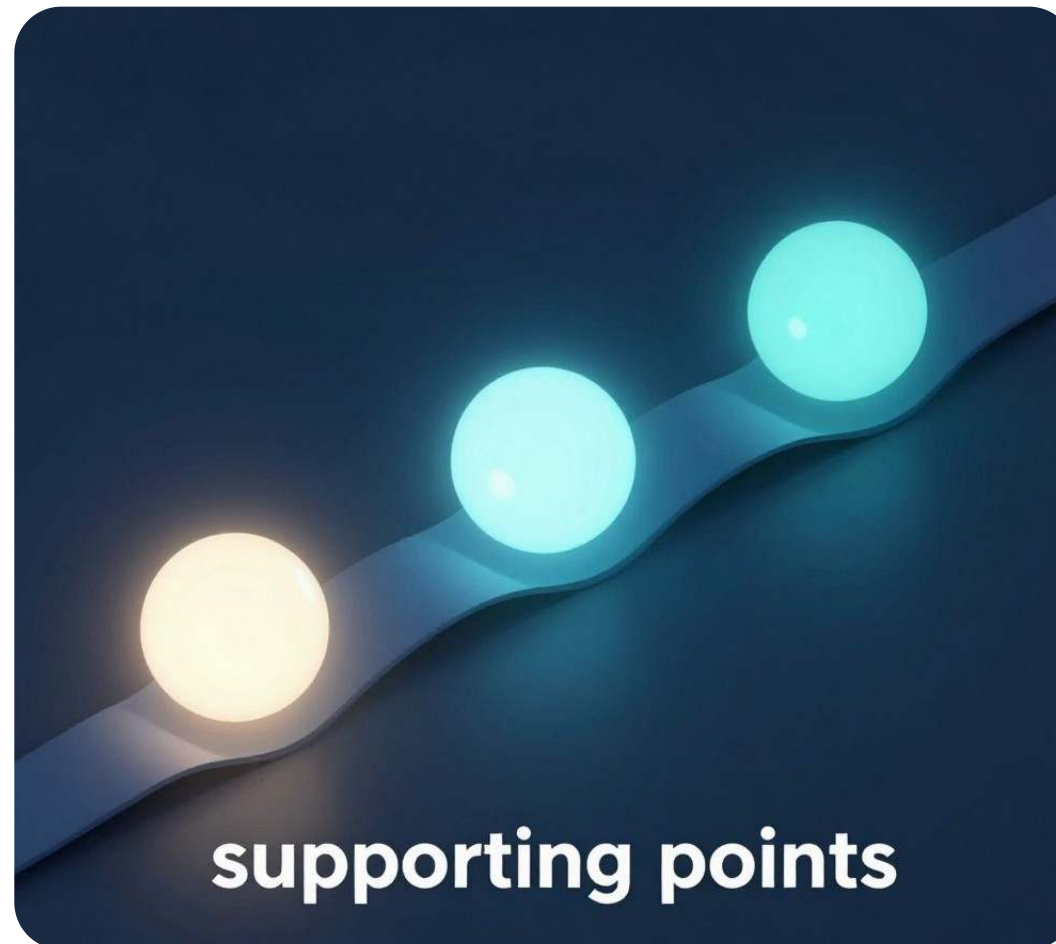
Угол как «возврат» к графику $\cos$

График $y = \arccos x$ определяет, какой угол соответствует данному значению косинуса. Он убывает на отрезке $[-1; 1]$ и помогает перейти от числа a к конкретному значению t из $[0; \pi]$.



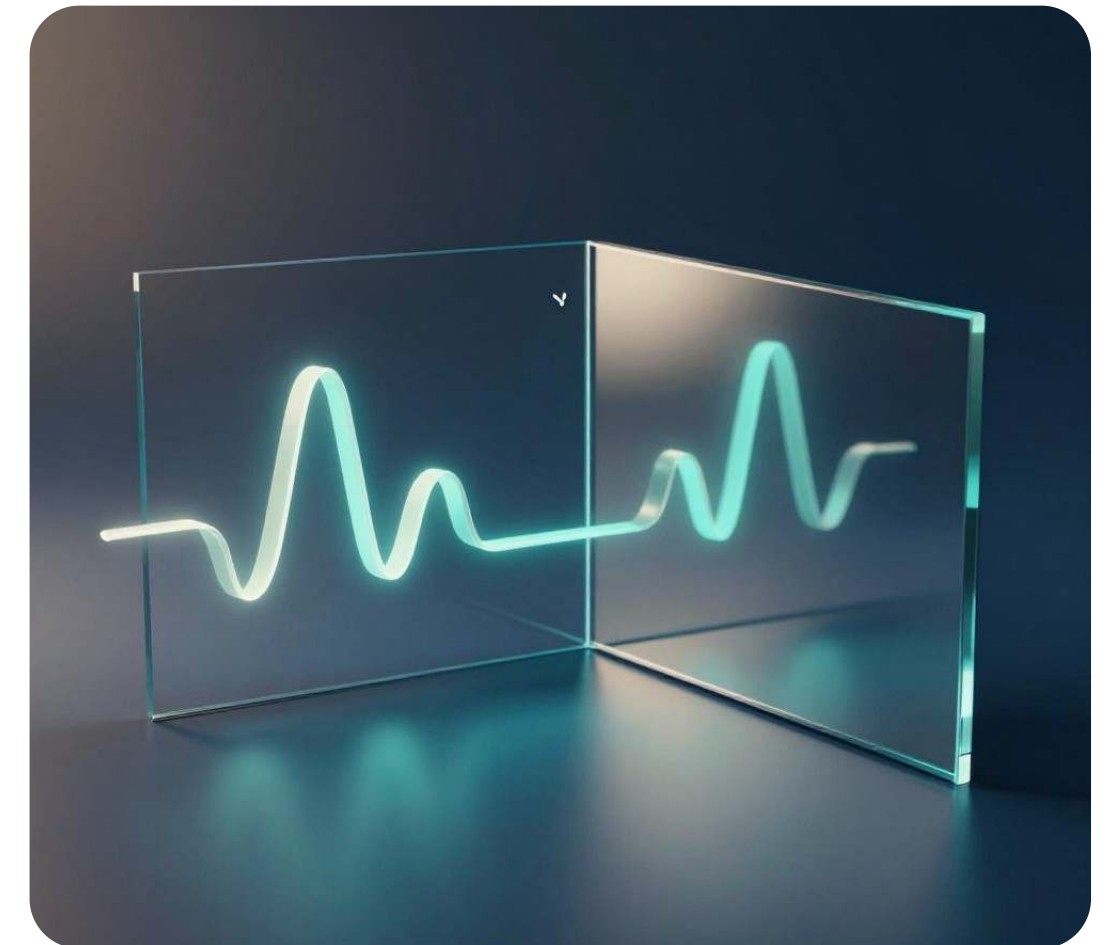
Три опорные точки

Ключевые точки графика: $(-1, \pi)$, $(0, \pi/2)$ и $(1, 0)$. Именно они быстро подсказывают ответы в простейших случаях и позволяют проверять ход решения при подстановках.



Отражение как геометрическая причина

Участок графика $y = \arccos x$ можно получить отражением отрезка графика $y = \cos t$ на $[0; \pi]$ относительно прямой $y = x$. Поэтому арккосинус действительно «возвращает» угол по заданному косинусу.

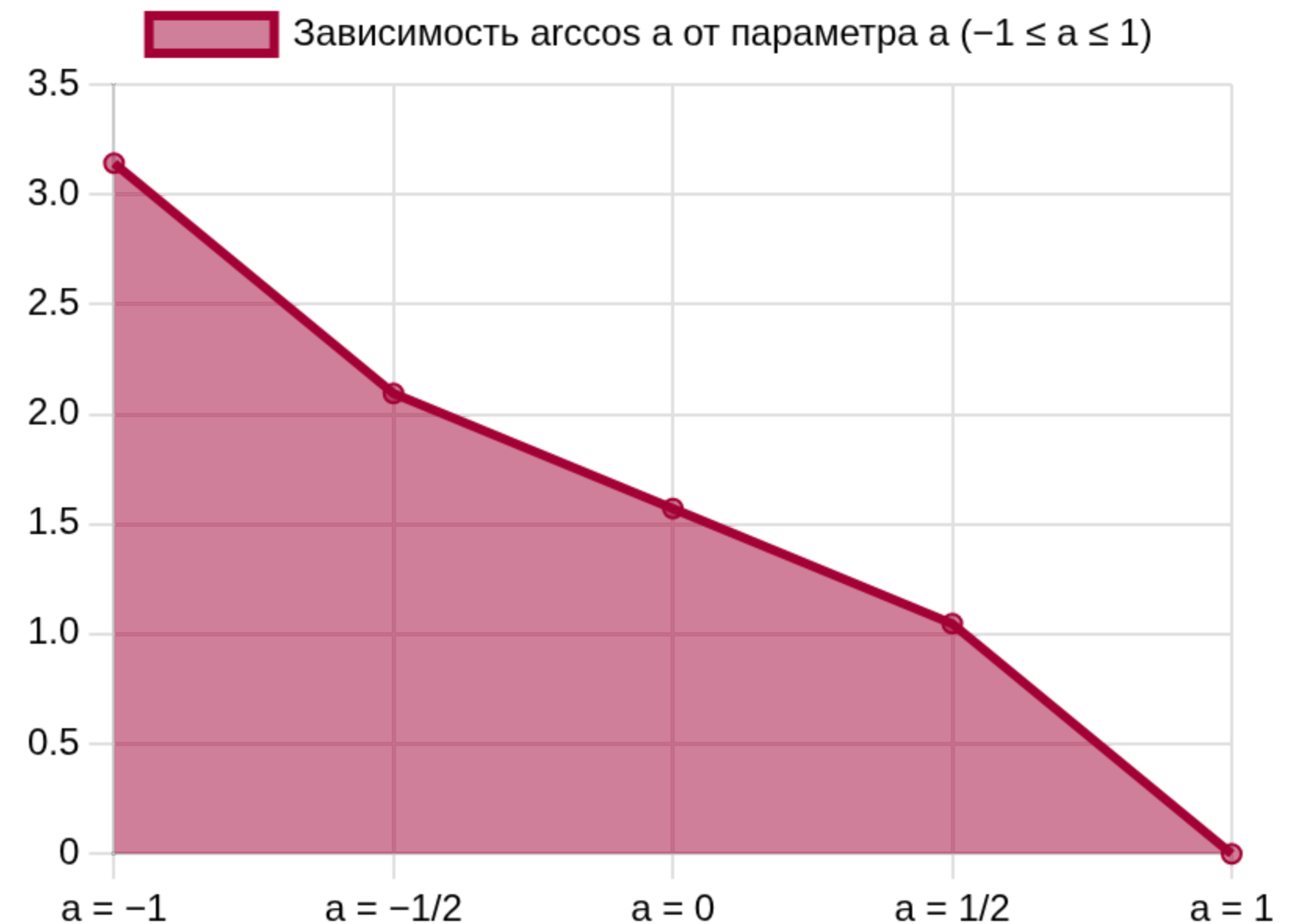


Как меняется $\arccos a$ при росте a

Так как график убывает, каждому допустимому a соответствует ровно один угол θ из $[0; \pi]$. Это снимает сомнения о «неоднозначности» обратной функции.

Монотонность подтверждает корректность построения $\arccos$ как обратной к $\cos$ на $[0; \pi]$: пара углов возникает не в $\arccos$, а в периодическом продолжении косинуса.

Семантика функции $\arccos x$ и значения в опорных точках $(-1, -1/2, 0, 1/2, 1)$



Примеры вычислений



$\cos t = 1/2$

Если $\cos t = 1/2$, то главный угол t_0 равен $\pi/3$. На одном периоде получается пара: $t = \pi/3 + 2\pi k$ и $t = 5\pi/3 + 2\pi k$.



$\cos t = 0$

При $\cos t = 0$ главный угол — $\pi/2$. В общем виде решения выглядят так: $t = \pi/2 + \pi k$, потому что косинус обращается в ноль на половинах периода.



$\cos t = -\sqrt{3}/2$

Когда $\cos t = -\sqrt{3}/2$, получаем $t_0 = 5\pi/6$. Второй угол на окружности даёт $t = 7\pi/6 + 2\pi k$, а первое решение — $t = 5\pi/6 + 2\pi k$.

Переход от значения a к углам

a	$t_0 = \arccos a$	Второе решение	Общий вид
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$	$2\pi - \pi/4$	$t = t_0 + 2\pi k$
0	$\pi/2$	$2\pi - \pi/2$	$t = t_0 + 2\pi k$
$-\sqrt{2}/2$	$3\pi/4$	$2\pi - 3\pi/4$	$t = t_0 + 2\pi k$
-1	π	$2\pi - \pi$	$t = \pi + 2\pi k$

Таблица показывает, как по заданному значению косинуса находят главный угол $t_0 = \arccos a$ и затем дополняют вторым решением $2\pi - t_0$ с учётом периода $2\pi k$.

Для $-1 < a < 1$ появляется пара симметричных углов вокруг оси Oy на единичной окружности; при $a = -1$ остаётся одно решение на период.

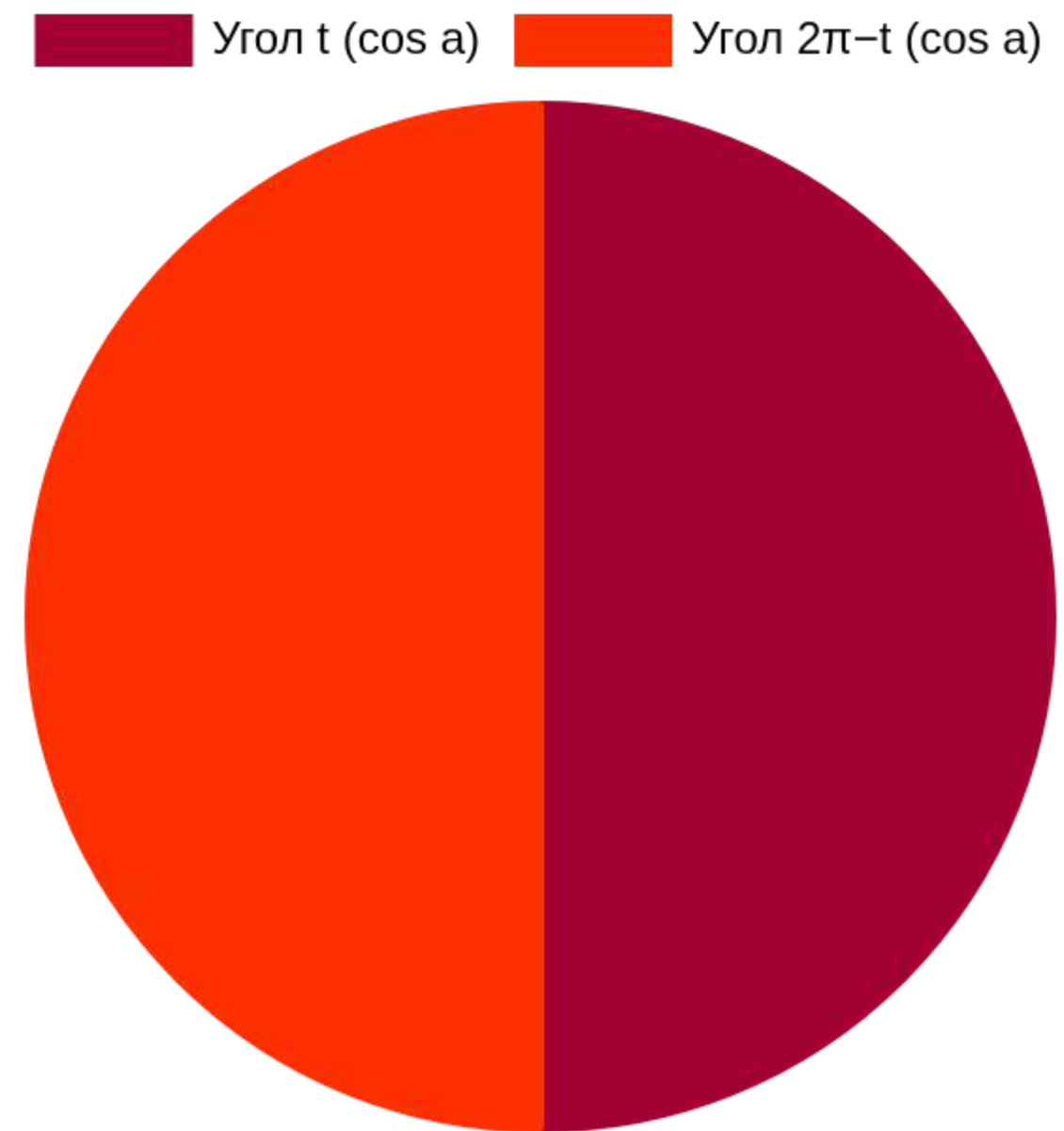
Табличные значения косинуса и определение $\arccos$ на $[0; \pi]$

Симметрия решений относительно оси Ох

С точки зрения уравнения $\cos t = a$ важно, что для пары углов одинаковый косинус обеспечивается симметрией относительно оси Ох.

Эта симметрия объясняет появление двух решений на период при $-1 < a < 1$ и помогает уверенно записывать оба угла в общем виде.

Геометрическая модель единичной окружности
(отражение относительно оси Ох)



Связь с тригонометрическими уравнениями

1

При решении более сложных тригонометрических задач часто сначала приводят выражение к виду $\cos t = a$: выносят общий множитель, раскладывают на множители или выполняют замену переменной.

2

Арккосинус здесь играет роль «моста» между числом и углом: зная значение косинуса, находят главный угол $t_0 = \arccos a$, а затем добавляют второе решение и период $2\pi k$.

3

Такой подход особенно практичен в 10 классе: после преобразований он дополняется основными тождествами и формулами приведения, что позволяет системно находить все корни уравнения.

Итоги: арккосинус как инструмент решения

Функция $\arccos a$ определена только при $-1 \leq a \leq 1$ и принимает значения из $[0; \pi]$. Уравнение $\cos t = a$ имеет 0, 1 или 2 решения на период; общее решение записывают через $\arccos a$ и $2\pi k$. Эти свойства единичной окружности лежат в основе большинства базовых тригонометрических уравнений геометрии 10 класса.