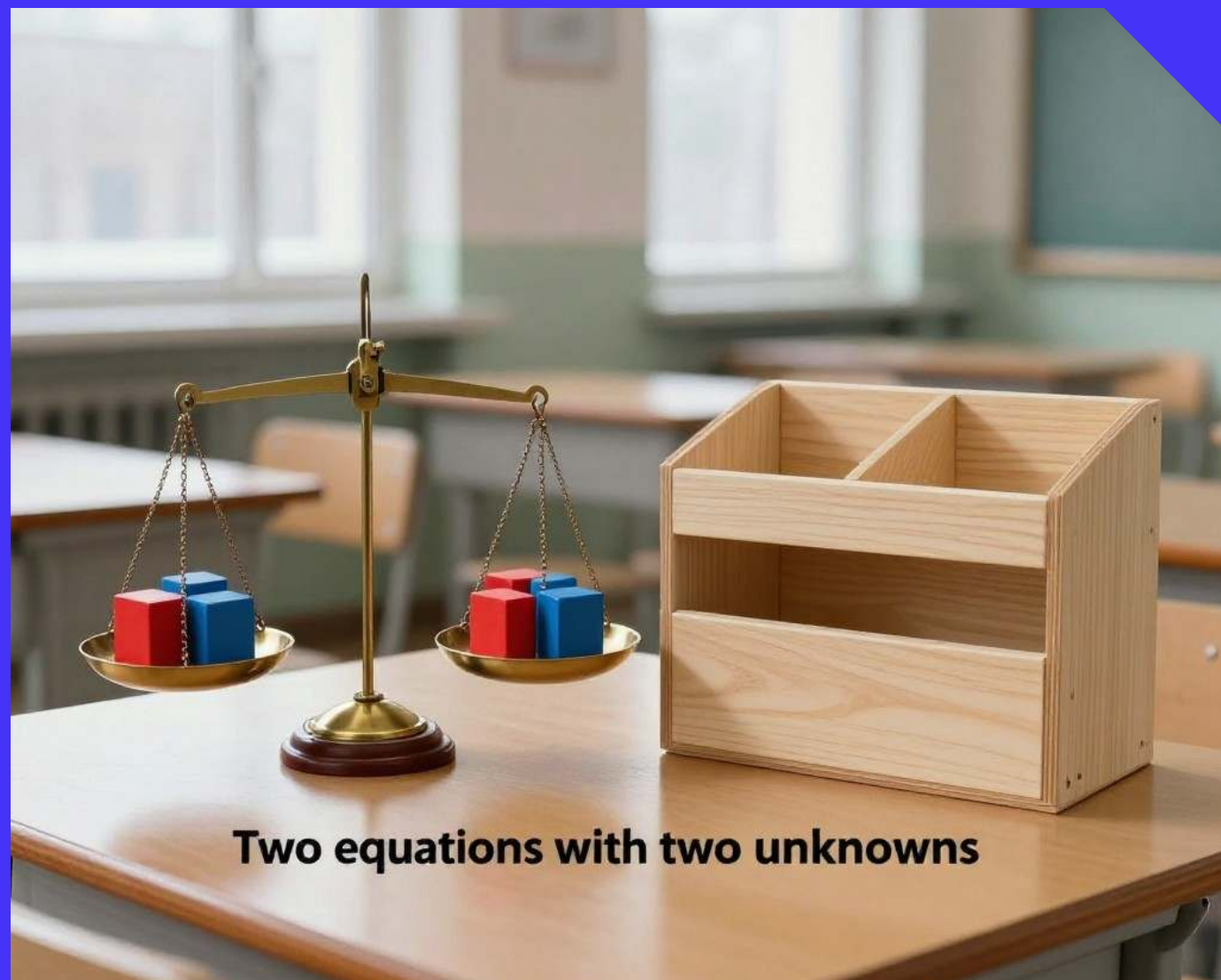


Уравнения с двумя неизвестными и системы уравнений

Две переменные, одно равенство, много идей.





Two equations with two unknowns

Такие уравнения помогают описывать реальные связи между величинами, работать с координатами и находить точные ответы по условию. Системы учат связывать два условия и проверять, существует ли решение, а если да — то только одно или несколько сразу.

Почему эта тема важна в 7 классе

Линейное уравнение первой степени

Только первая степень

В таком уравнении неизвестные не возводятся в квадрат и не входят в другие степени. Поэтому его запись остаётся простой и удобной для анализа.

Общий вид

Обычно его записывают так: $ax + by = c$. Буквы a , b и c обозначают числа, а x и y — неизвестные значения, которые нужно подобрать.

Связь с прямой

Если хотя бы один коэффициент при неизвестных не равен нулю, уравнение задаёт прямую на координатной плоскости и множество её точек.

Роль коэффициентов

Коэффициенты показывают, как изменяются x и y относительно друг друга, а свободный член c определяет положение прямой среди других линий на плоскости.

Пара чисел как решение уравнения

Ответ — пара

Для уравнения с двумя неизвестными ответом является не одно число, а упорядоченная пара значений $(x; y)$, которая делает равенство верным.

Проверка подстановкой

Чтобы убедиться в правильности, найденную пару подставляют вместо букв и вычисляют значение левой части. Затем сравнивают его с правой частью.

Много решений

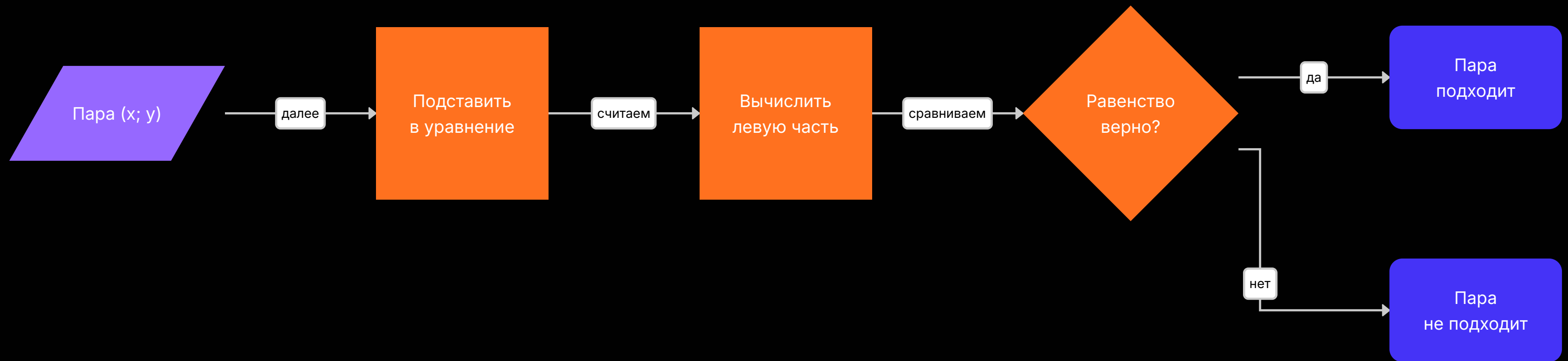
Одно линейное уравнение обычно имеет не одно, а множество решений, поэтому его удобно изображать как набор точек на координатной плоскости.

Связь с графиком

Каждая подходящая пара соответствует точке на плоскости. Если отметить несколько таких точек, можно увидеть, что они лежат на одной прямой.

Проверка пары чисел подстановкой

Последовательность действий при проверке найденного решения.



Что такое система уравнений

01

Несколько уравнений

Системой называют два или больше уравнений, в которых используются одни и те же неизвестные. Решать систему значит искать общую пару значений для всех условий сразу.

02

Общий ответ

Подходит только такая пара чисел, которая обращает в верные равенства каждое уравнение системы. Если хотя бы одно условие нарушается, ответа нет.

03

Геометрический смысл

На координатной плоскости каждое линейное уравнение изображается прямой. Решение системы — это общая точка двух прямых, если она существует.

04

Возможные случаи

Для линейной системы с двумя неизвестными бывают три варианта: одно решение, ни одного решения или бесконечно много решений.

Три случая для системы линейных уравнений

Диаграмма показывает, что результат зависит от взаимного положения двух прямых, а не только от самих уравнений.

Пересечение даёт одно решение, параллельность — ни одного, совпадение — бесконечно много решений.

Содержательная схема по теме «системы линейных уравнений»

Способ подстановки



Выразить переменную

Одно уравнение преобразуют так, чтобы x или y было выражено через вторую переменную. Это делает дальнейшие действия более удобными и понятными.



Найти значение

После подстановки вычисляют одну переменную, аккуратно соблюдая порядок действий и знаки. Здесь особенно важно не допустить ошибки в скобках и дробях.



Подставить во второе уравнение

Полученное выражение заменяют во втором уравнении. Так система превращается в одно уравнение с одной неизвестной, которое уже можно решить обычным способом.



Записать пару

Затем находят вторую переменную и записывают ответ как упорядоченную пару. Этот способ особенно удобен, если коэффициент равен 1 или -1 .

Сравнение основных способов решения

Три способа отличаются тем, как именно находят неизвестные и в какой ситуации каждый из них удобнее.

Подстановка и сложение чаще подходят для точных вычислений, а графический способ удобен для понимания смысла решения.

Способ	Главная идея	Когда удобно
Подстановка	Выразить переменную	Легко выразить
Сложение	Устранить переменную	Коэффициенты похожи
Графический	Найти пересечение	Нужна наглядность

Сравнение способов решения систем линейных уравнений

Способ сложения

Сделать коэффициенты удобными

Сначала смотрят, можно ли получить одинаковые или противоположные коэффициенты при одной из переменных. Иногда для этого одно из уравнений приходится умножить на число.

Сложить или вычесть

Затем уравнения складывают или вычитают. Одна переменная исчезает, и остаётся более простое уравнение с одной неизвестной.

Найти вторую переменную

После вычисления находят значение второй неизвестной, подставляя результат в любое исходное уравнение. Это позволяет восстановить всю пару чисел.

Проверить ответ

В конце найденную пару обязательно проверяют в обоих уравнениях. Такая проверка помогает заметить ошибки в знаках и вычислениях.

Графический способ решения системы

Две прямые

Каждое линейное уравнение строят как прямую на координатной плоскости. Если прямые пересекаются, их общая точка и есть решение системы, потому что она подходит обоим уравнениям сразу.

Точки для построения

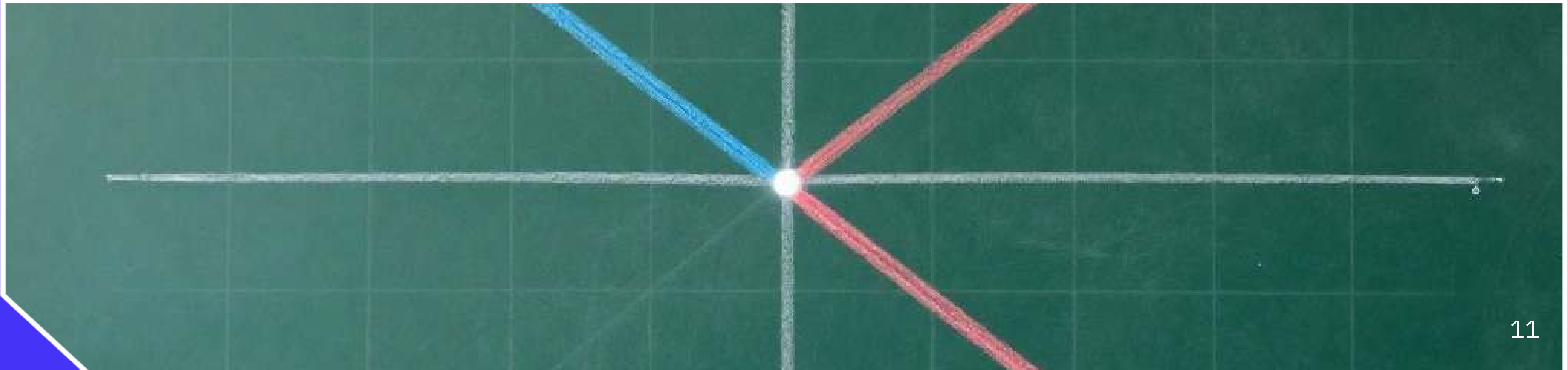
Чтобы начертить прямую, достаточно найти две удобные точки. Их обычно получают по таблице значений или выбирают так, чтобы координаты были целыми и легко проверялись.

Пересечение как ответ

После построения прямых нужно определить точку пересечения и записать её координаты. Если линии не пересекаются, система не имеет решений; если совпадают, решений бесконечно много.

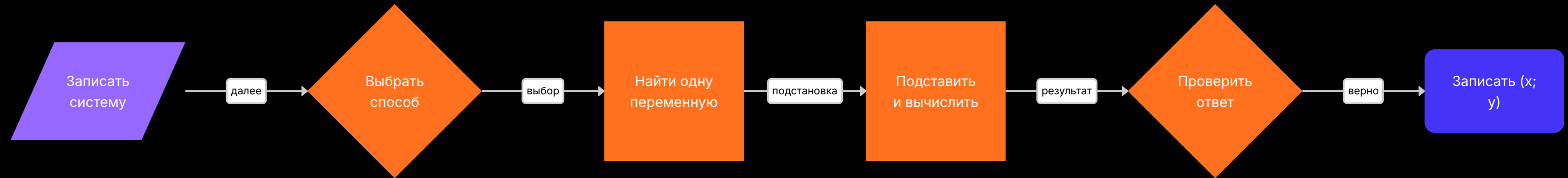
Что помогает увидеть

График наглядно показывает связь между алгебраической записью и геометрией. По нему удобно сравнивать уравнения, проверять результат и лучше понимать, почему система имеет именно такое число решений.



Алгоритм решения системы уравнений

Последовательность действий при решении линейной системы с двумя неизвестными



Как записывают ответ

01

Сначала x

Ответ записывают в виде упорядоченной пары: сначала указывают значение x , затем значение y . Такой порядок одинаков для всех задач и позволяет точно определить точку на координатной плоскости.

02

Пара должна подходить

Если найденные числа подходят только одному уравнению, это ещё не решение системы. Верной считается только та пара, которая одновременно делает оба равенства истинными.

03

Порядок важен

Пары $(2; 5)$ и $(5; 2)$ обозначают разные точки, поэтому менять числа местами нельзя. Ошибка в порядке сразу приводит к неверному ответу, даже если оба числа найдены правильно.

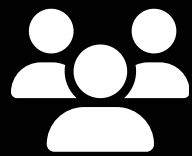
Частые ошибки при решении систем

Диаграмма показывает не только вычислительные, но и организационные ошибки. Чаще всего проблемы возникают на шаге записи и проверки, а не только при самом решении.

Наглядно видно, что отсутствие проверки и ошибки со знаками встречаются чаще остальных. Значит, аккуратность записи и контроль ответа особенно важны.

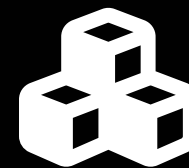
Учебная иллюстрация по типичным ошибкам
при решении линейных систем

Текстовые задачи, которые решаются системой



Возраст и числа

При задачах на возраст, количество предметов или числа система выражает связь между двумя величинами. Это позволяет перевести словесное условие в понятные алгебраические равенства.



Состав и количество

Когда речь идёт о предметах разных видов, неизвестные показывают, сколько каждого из них есть. Система уравнений помогает найти оба значения сразу и проверить их по смыслу.



Покупки и цена

Если нужно найти стоимость двух видов товаров, удобно ввести две неизвестные: цену и количество. Два условия из текста превращаются в уравнения, а решение даёт точный денежный ответ.



Движение по дороге

В задачах на движение неизвестными часто становятся скорость и время или два расстояния. Система помогает связать эти величины через одно и то же условие пути, которое дано в задаче.

Связь с координатной плоскостью

Каждое уравнение — прямая

- Линейное уравнение с двумя неизвестными задаёт множество точек, которые лежат на одной прямой. Любая точка этой прямой удовлетворяет уравнению, если её координаты подставить вместо x и y .

Общая точка

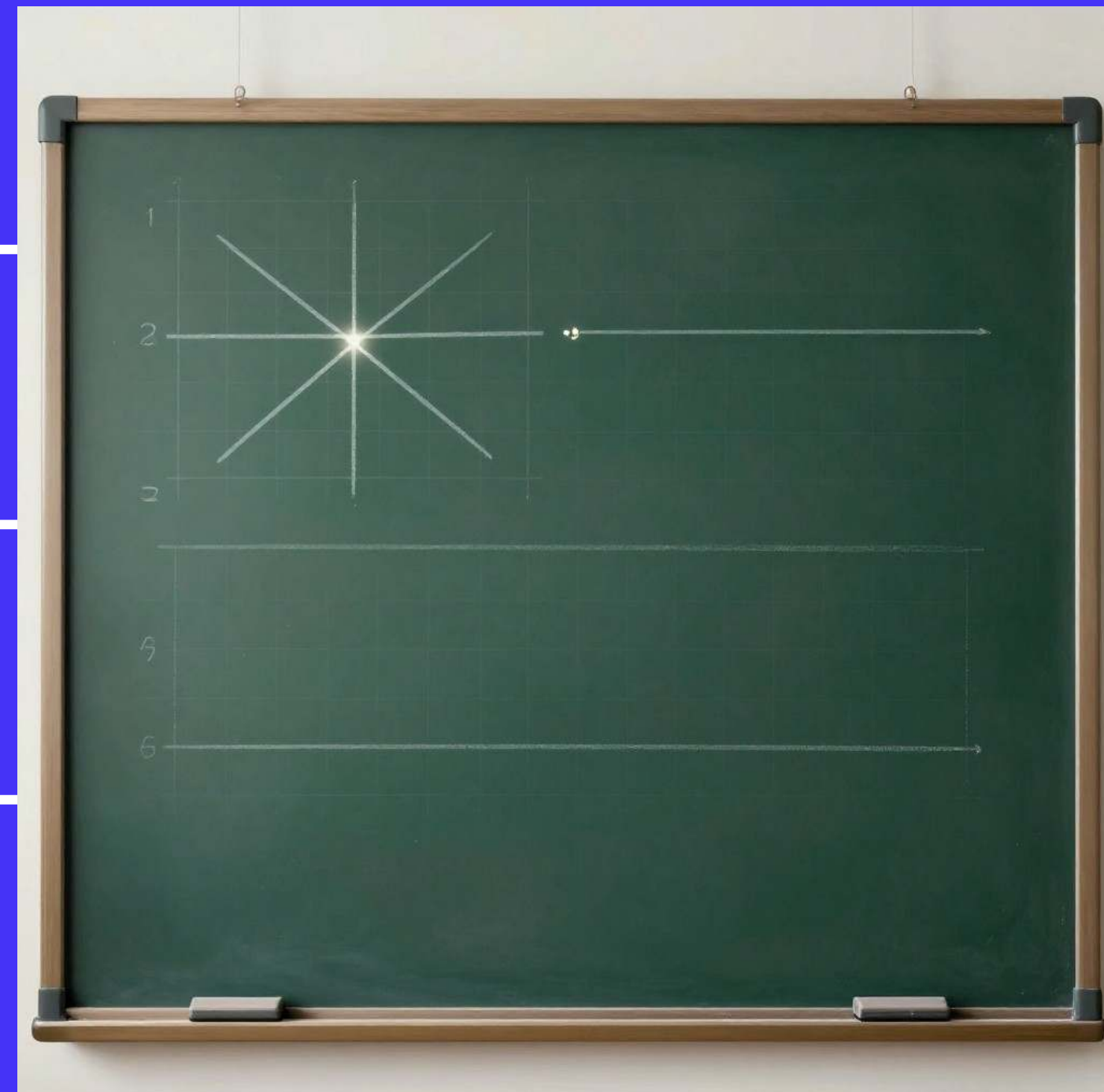
- Если две прямые пересекаются, их общая точка подходит сразу обоим уравнениям. Именно эта точка является решением системы, потому что она одновременно удовлетворяет обоим условиям.

Нет или много решений

- Параллельные прямые не имеют общей точки, поэтому решений нет. Совпадающие прямые содержат одинаковые точки, и тогда система имеет бесконечно много решений.

Геометрический смысл

- Координатная плоскость помогает увидеть систему не только как набор формул, но и как рисунок. Это делает решение наглядным и помогает лучше понять связь между алгеброй и геометрией.



Как коэффициенты влияют на число решений

Таблица показывает, как вид коэффициентов связан с взаимным положением прямых и количеством решений системы.

По таблице видно: достаточно сравнить коэффициенты, чтобы заранее определить тип системы и ожидаемое число решений.

Ситуация	Прямые	Решений
Разные углы	Пересекаются	Одно
Параллельны	Не встречаются	Нет
Совпадают	Одна прямая	Бесконечно много

Свойства линейных уравнений с двумя неизвестными

Проверка найденной пары чисел

01

Подставить в оба уравнения

После решения системы найденные x и y подставляют в каждое уравнение отдельно. Если оба равенства становятся верными, значит, пара действительно является решением.

02

Искать скрытую ошибку

Проверка помогает заметить неверный знак, арифметическую неточность или перепутанные координаты. Такие ошибки часто остаются незамеченными до финального шага, поэтому проверка особенно полезна.

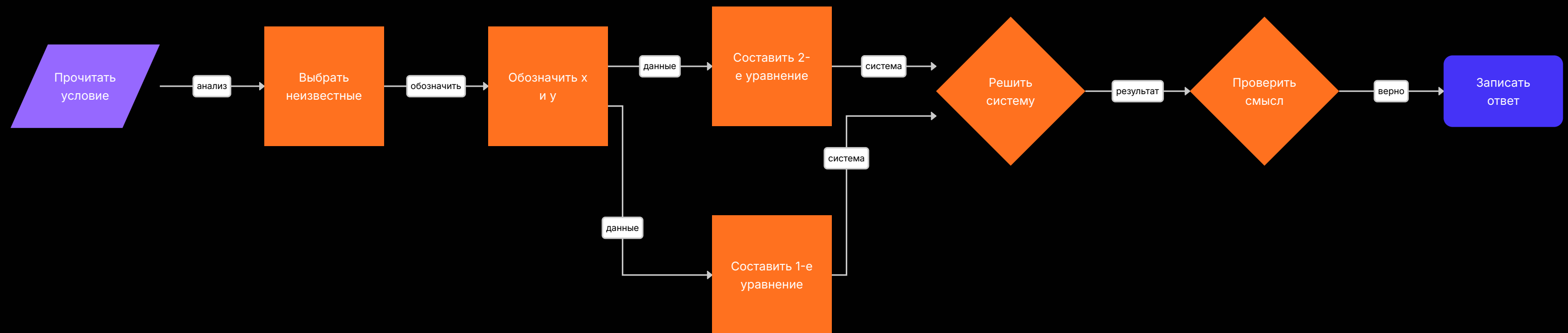
03

Не пропускать шаг

Даже если ответ кажется правильным, его нужно проверить обязательно. В школьных задачах одна ранняя ошибка меняет весь результат, а проверка позволяет вовремя её исправить.

От условия задачи к системе уравнений

Преобразование текстовой задачи в алгебраическую модель и обратно





Линейные уравнения с двумя неизвестными связывают две величины, а система помогает найти общую пару значений. Подстановка, сложение и график — три удобных пути к ответу.

Системы уравнений: от формулы к ответу