



Усечённый конус: определение, свойства и формулы

Усечённый конус получается сечением конуса плоскостью, параллельной основанию, и описывается через R , r , h , l .



Где усечённый конус встречается в школьной стереометрии

В стереометрии 11 класса усечённый конус связывает темы тел вращения и подобия. Его свойства удобно выводить через параллельные сечения, а применять — к задачам на площадь, объём и развертку, а также в прикладных моделях техники и быта.



Как получается усечённый конус

1

Берут полный конус и проводят плоскость, параллельную основанию. Эта плоскость «отрезает» верхнюю часть, и оставшееся тело уже не имеет вершины.

2

В результате получается фигура с двумя круговыми основаниями разного радиуса: большего R и меньшего r , причём $R > r$. Общая ось задаёт положение симметрии тела.

3

Высота усечённого конуса — это расстояние между плоскостями оснований. Она связывает геометрию с измерениями в задачах и помогает применять формулы объёма.

Основные элементы усечённого конуса

Обозначения помогают быстро выбирать формулы и не путать геометрические величины при решении.

Все ключевые формулы темы строятся через параметры R , r , h и l , а образующая l играет роль «длины наклона» боковой поверхности.

Элемент	Обозначение	Значение/роль
Большое основание	R	радиус
Малое основание	r	радиус
Высота	h	расстояние между основаниями
Образующая	l	наклонная сторона поверхности
Ось симметрии	—	общая линия вращения
Боковая поверхность	$S_{\text{бок}}$	кольцевая часть
Центры оснований	O	точки кругов

Переход от полного конуса к усечённому

Параллельное сечение сохраняет осевую симметрию и даёт возможность опереться на подобие.



Геометрические свойства, которые помогают в решении



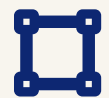
Параллельные основания

Плоскости оснований усечённого конуса параллельны. Благодаря этому удобно рассматривать осевые сечения и переносить соотношения между длинами при выводе нужных формул.



Осевое сечение — равнобедренная трапеция

Если плоскость проходит через ось, получается равнобедренная трапеция. Её стороны и диагонали связывают радиусы R и r с высотой h и образующей l .



Все образующие равны

Боковая поверхность образована вращением прямой, и все образующие имеют одинаковую длину. Это упрощает развёртку и помогает однозначно определить размеры сектора.



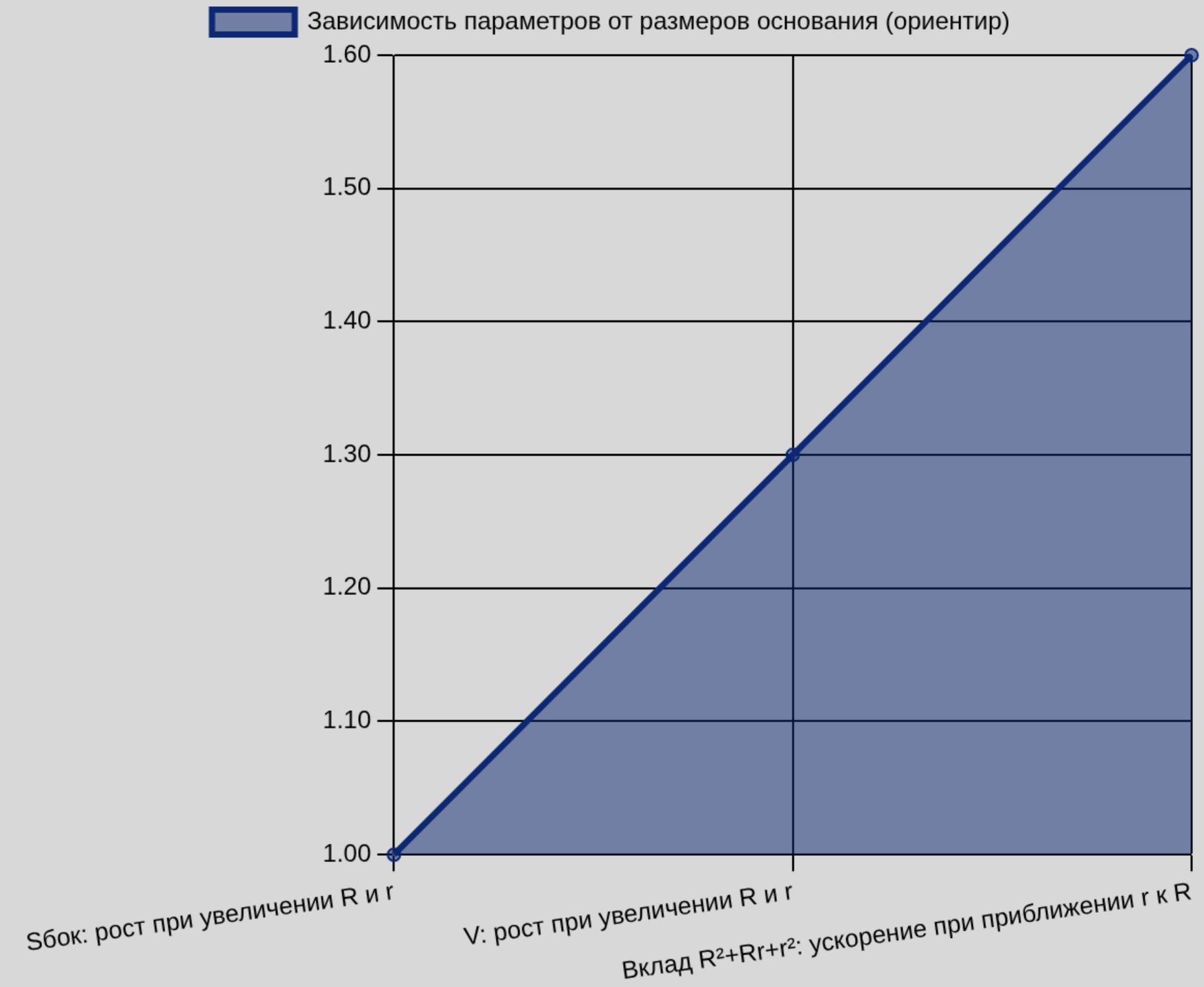
Симметрия и поверхность вращения

У фигуры сохраняется симметрия относительно оси. Поэтому боковая поверхность рассматривается как часть поверхности вращения, что делает расчёты системными, а не «случайными».

Какие величины описывают усечённый конус

Связь параметров выражается через $\pi(R+r)l$ для боковой поверхности и через $\frac{1}{3} \cdot \pi h (R^2 + Rr + r^2)$ для объёма, где радиусы участвуют не только суммой.

Анализ показывает: при фиксированной высоте изменение радиусов заметнее сказывается на объёме, особенно когда малый радиус близок к большому.



Визуальная интерпретация формул Sбок и V; точные численные значения зависят от выбранных R, r и h.

Развёртка боковой поверхности



Сектор, который «раскрывает» конус

Развёртка боковой поверхности усечённого конуса — это кольцевой сектор. Внешняя дуга соответствует окружности большого основания, а внутренняя — окружности малого. Ширина сектора определяется длиной образующей l , поэтому важно точно перенести её на чертёж.



Почему размеры основания превращаются в дуги

При развёртывании каждая «образующая» работает как радиус сектора. Поэтому различие между R и r превращается в разницу между длинами внешней и внутренней дуг. Благодаря этому легко связать геометрию развёртки с исходными радиусами.

Главная идея проста: боковая площадь зависит от двух факторов — «ширины» по радиусам и масштаба наклона через l .

$$S_{\text{бок}} = \pi(R + r)l$$

Эта формула связывает наклонную часть фигуры с суммой радиусов и длиной образующей.

Вывод из геометрии поверхности вращения (школьная формула для усечённого конуса).

Полная площадь поверхности

1

Полная площадь включает боковую поверхность и площади двух круговых оснований: $S_{\text{полн}} = \pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2$. Основания считаются как площади кругов, то есть через радиусы.

2

Когда в задаче спрашивают расход материала или покрытие поверхности, важно не ограничиваться только $S_{\text{бок}}$: обе «торцевые» части тоже участвуют в общей площади.

3

Формула подходит для практических ситуаций, где нужно рассчитать, сколько ткани, краски или листового материала потребуется. В решении дисциплинирует аккуратная замена единиц измерения.

Объём усечённого конуса

1

Формула объёма усечённого конуса имеет вид $V = 1/3 \pi h(R^2 + Rr + r^2)$. Она учитывает вклад большого основания, малого основания и взаимосвязь через высоту.

2

Главный смысл выражения $R^2 + Rr + r^2$ — объём растёт сразу при увеличении R и при увеличении r , причём вклад оснований суммируется не простым сложением площадей.

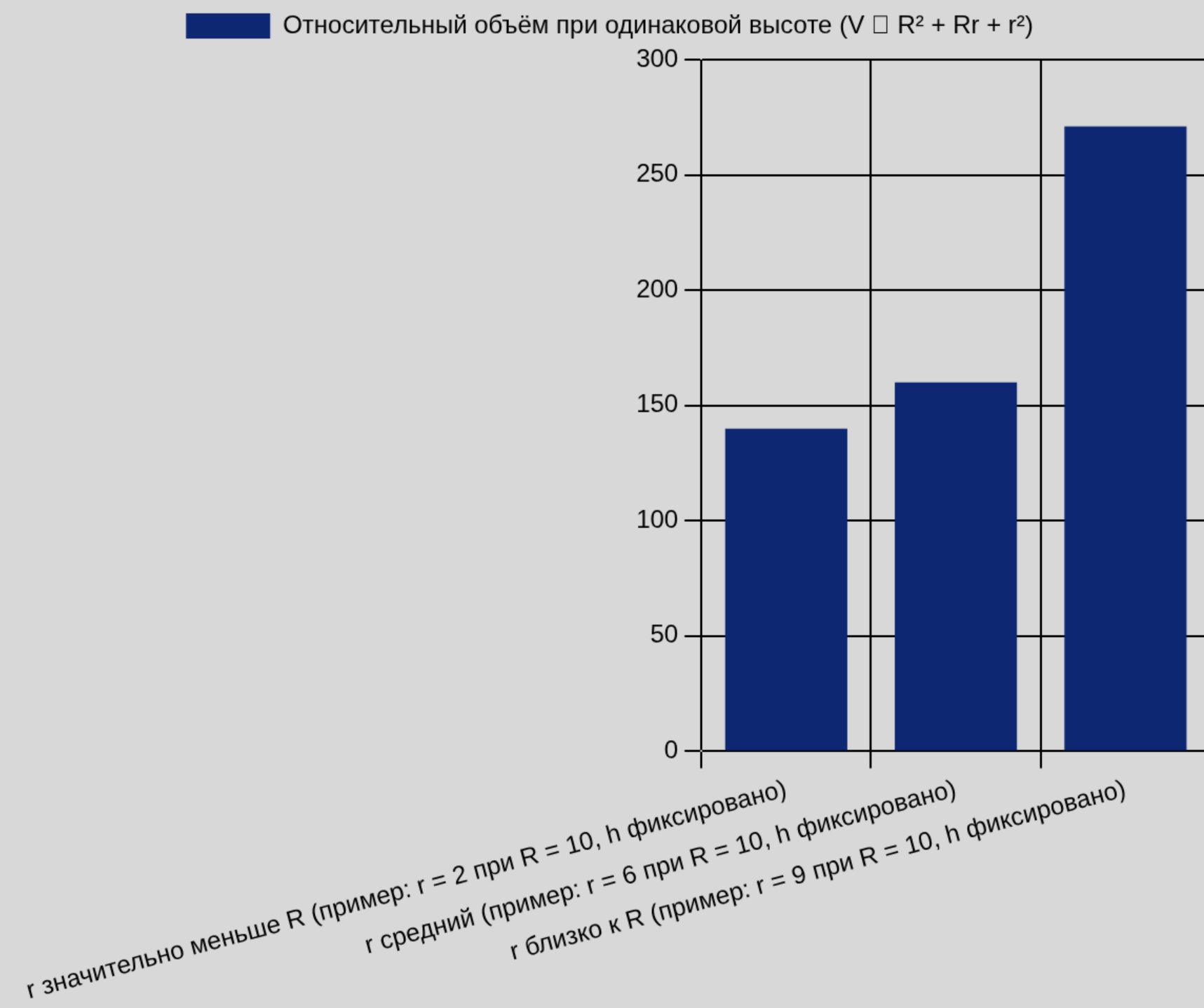
3

В прикладных задачах формула помогает оценивать вместимость сосудов, резервуаров, ведёр, воронок и деталей машин. При $r = 0$ она переходит в объём полного конуса.

Как меняется объём при изменении радиусов

При фиксированной высоте объём пропорционален $R^2 + Rr + r^2$, поэтому рост начинается уже при увеличении малого радиуса, а ускоряется по мере приближения r к R .

Сравнение трёх сценариев показывает: объём увеличивается во всех случаях, но сильнее всего растёт, когда r становится близким к R — тогда растёт сумма $R^2 + Rr + r^2$.



Расчёт по формуле $V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2)$, пример с фиксированными h и $R = 10$ (относительные значения), без привязки к конкретному реальному объекту.

Пример вычисления по формуле

Параметр	Значение
R	6 см
r	3 см
h	8 см
l	$\sqrt{73} \approx 8,54$ см
Sбок	$\approx 241,4$ см ²
Sполн	$\approx 351,8$ см ²
V	$152\pi \approx 477,5$ см ³

Ниже приведён один полный расчёт: сначала находят образующую l по теореме Пифагора, затем подставляют l и исходные радиусы в формулы площадей и объёма.

Даже при умеренных размерах разница между площадью полной поверхности и объёмом существенна, поэтому важно аккуратно соблюдать единицы измерения и порядок вычислений.

Данные из условия примера; численные значения получены по формулам темы.

Типовые задачи для 11 класса



Объём по известным параметрам

Часто требуется вычислить V по данным R , r и h . Учащимся важно не путать формулы: для объёма используется коэффициент $1/3$ и выражение $R^2 + Rr + r^2$.



Образующая по Пифагору

Если известны высота h и радиусы R и r , образующую l находят из соотношения $l^2 = h^2 + (R - r)^2$. После этого переходят к площадям и проверке результата.



Площади боковой и полной поверхности

Встречаются задания на $S_{бок}$ и $S_{полн}$, где нужно правильно собрать сумму: боковая поверхность отдельно, а основания — как площади кругов. Ошибки здесь чаще всего связаны с пропусками слагаемых.



По объёму находят неизвестный радиус или высоту

Отдельный тип заданий — обратная задача: V задан, а требуется найти r или h . Решение опирается на формулы объёма и внимательную алгебраическую работу с выражением под квадратами.

Усечённый конус в окружающих предметах



Кружка и стакан «с характером»

Переход от узкого дна к более широкому верху делает предмет устойчивым на столе и удобным для захвата. В быту легко заметить форму, где «верх» и «низ» имеют разные радиусы. Такая геометрия хорошо согласуется с технологией изготовления.



Воронка и распределение жидкости

Воронки часто делают по форме усечённого конуса: вход обычно шире, а выход сужается, чтобы направлять поток. Это помогает быстрее заполнять ёмкость и уменьшает потери. При такой форме детали достаточно просто изготовить без сложной формовки.

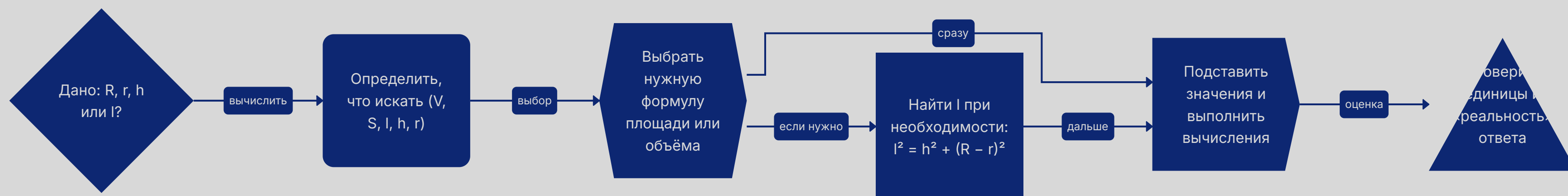


Абажур и цветочный горшок

Стенки абажура или горшка нередко расширяются вверх, создавая аккуратный контур и обеспечивая доступ воздуха растениям. Усечённый конус помогает получить «свет и пространство» внутри, не теряя устойчивости конструкции. Геометрия здесь одновременно эстетична и практична.

Алгоритм решения задач на усечённый конус

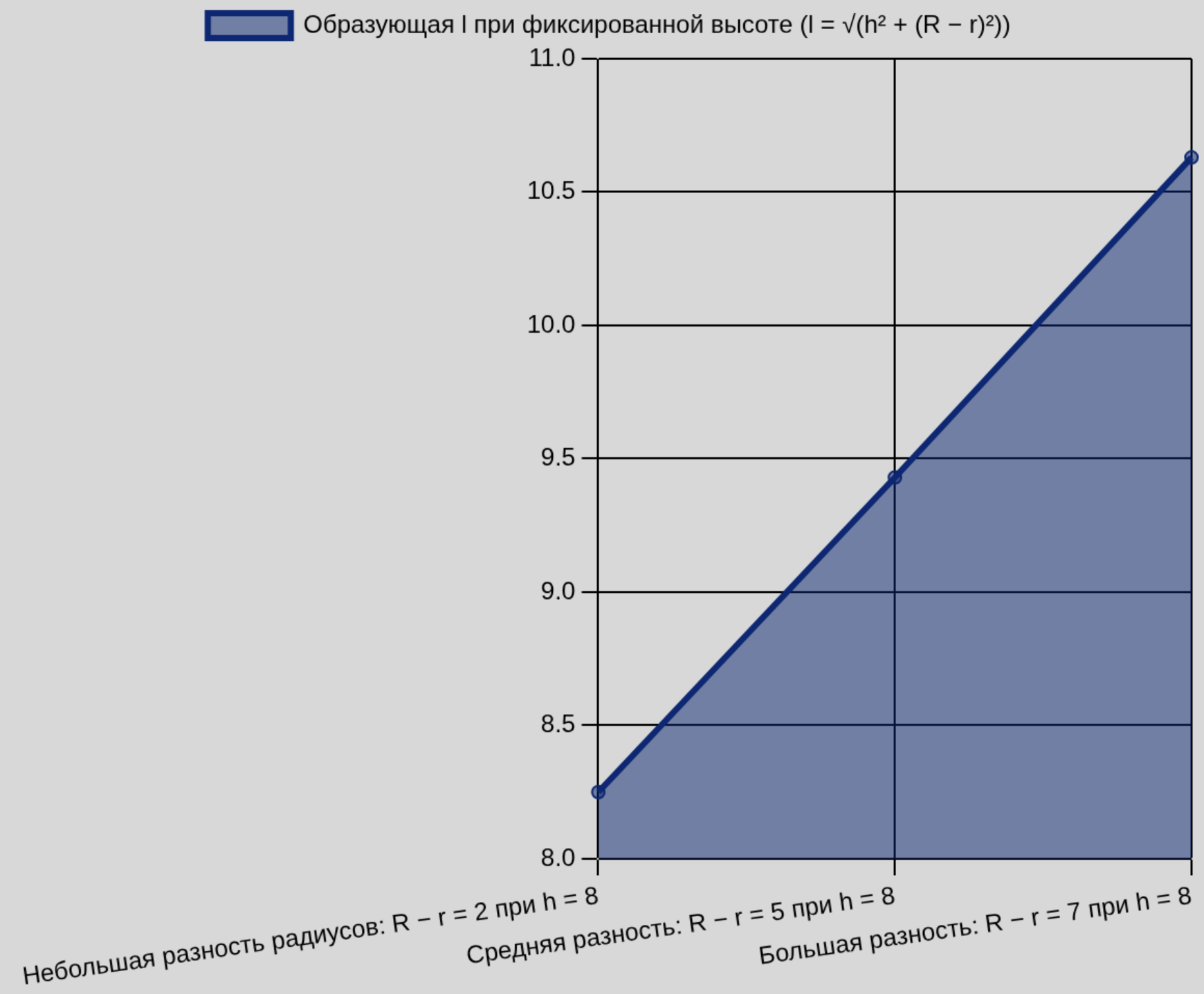
Схема показывает последовательность действий, когда даны R , r , h или l , и требуется найти неизвестную величину.



Связь высоты, образующей и разности радиусов

При одной и той же высоте рост образующей определяется разностью радиусов: чем больше $(R - r)$, тем быстрее растёт l , потому что она зависит от квадрата этой разности.

Линия показывает усиление эффекта: при увеличении $R - r$ образующая увеличивается заметно и боковая поверхность становится «круче». Это важно для чертежей и расчётов модели тела вращения.



Пример расчётов по соотношению $l^2 = h^2 + (R - r)^2$ при $h = 8$ см; значения получены подстановкой выбранных разностей радиусов.

Типичные ошибки при решении задач

1 Частая проблема — подстановка диаметра вместо радиуса. Тогда и формулы для площади оснований, и выражения $R^2 + Rr + r^2$ дают неверный результат, хотя направление ответа может показаться правдоподобным.

2 Другой источник ошибок — путаница между высотой h и образующей l . В заданиях по площади боковой поверхности l участвует напрямую, а h нужен для объёма, поэтому важно не смешивать величины.

3 Нередко допускают пропуск квадратов в объёме или неверно раскрывают скобки. В формуле $V = 1/3 \pi h(R^2 + Rr + r^2)$ каждое слагаемое имеет свою степень, и потеря квадратов меняет порядок ответа.

4 Ошибки встречаются и при вычислении $S_{\text{полн}}$: забывают сложить $S_{\text{бок}}$ и площади обоих оснований. Помогают проверка размерности (см^2 , см^3) и оценка порядка величины до детальных вычислений.

Значение усечённого конуса в математике и практике

● Построение модели

Усечённый конус получается при сечении полного конуса плоскостью, параллельной основанию. Уже на этом этапе геометрия связывает радиусы и высоту через подобие и осевую симметрию.

● Вывод формул

Далее из соотношений между образующей, высотой и разностью радиусов получают выражения для $S_{бок}$, полной площади и объёма. Модель превращает чертёж в вычисляемые параметры.

● Применение

После получения формул усечённый конус используют для расчёта вместимости, расхода материала и выбора размеров деталей. Поэтому он важен и в школе, и при проектировании реальных объектов.

Усечённый конус — компактная геометрия для точных вычислений

Усечённый конус — это часть конуса при сечении плоскостью, параллельной основанию. У фигуры есть два круговых основания, образующая, ось симметрии и формулы площади и объёма через R , r , h и l .