

Неравенства с двумя переменными, содержащие модуль

Области решений на плоскости: модуль задаёт расстояние и симметрию.

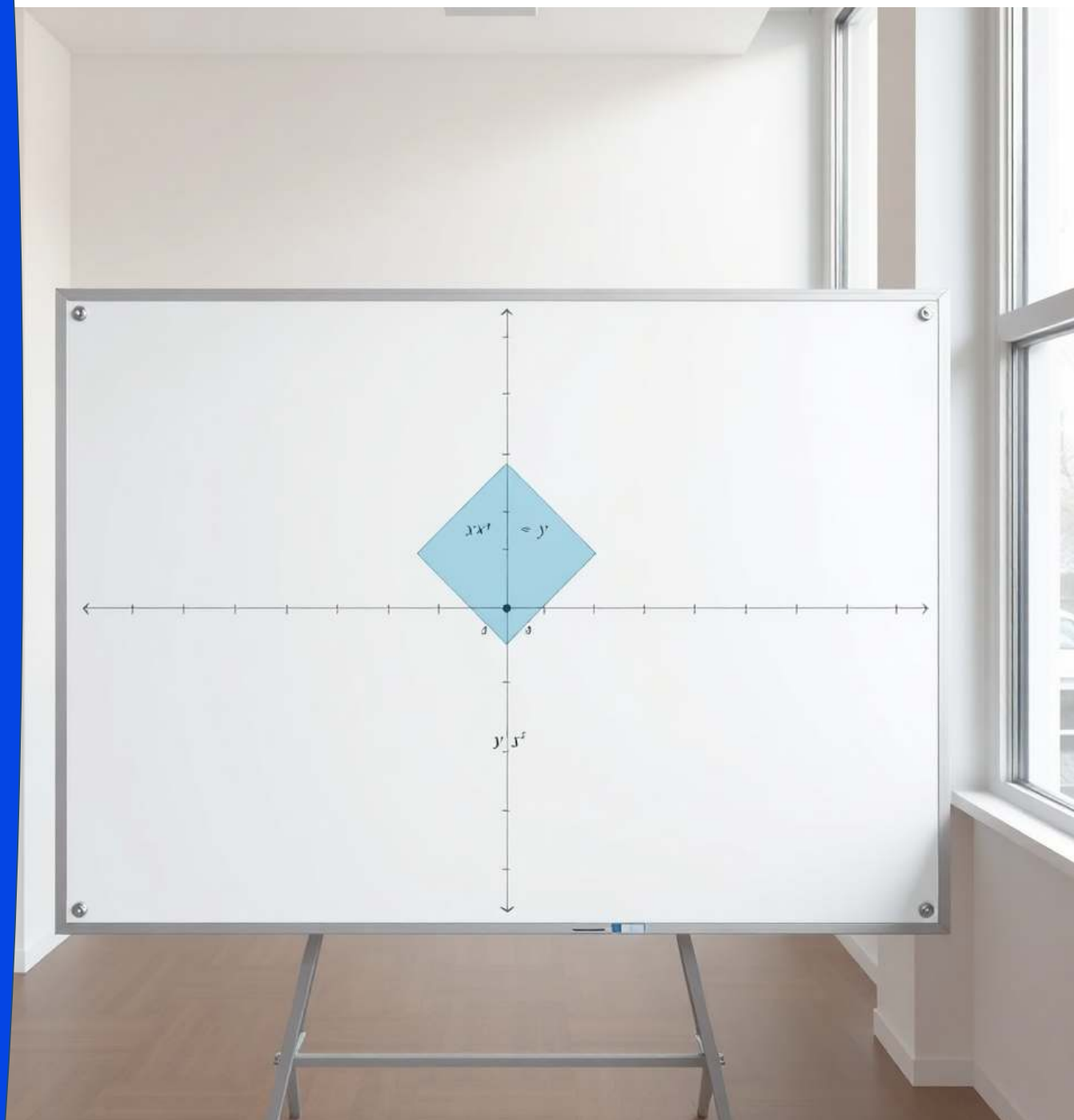


Почему это важно в 9 классе



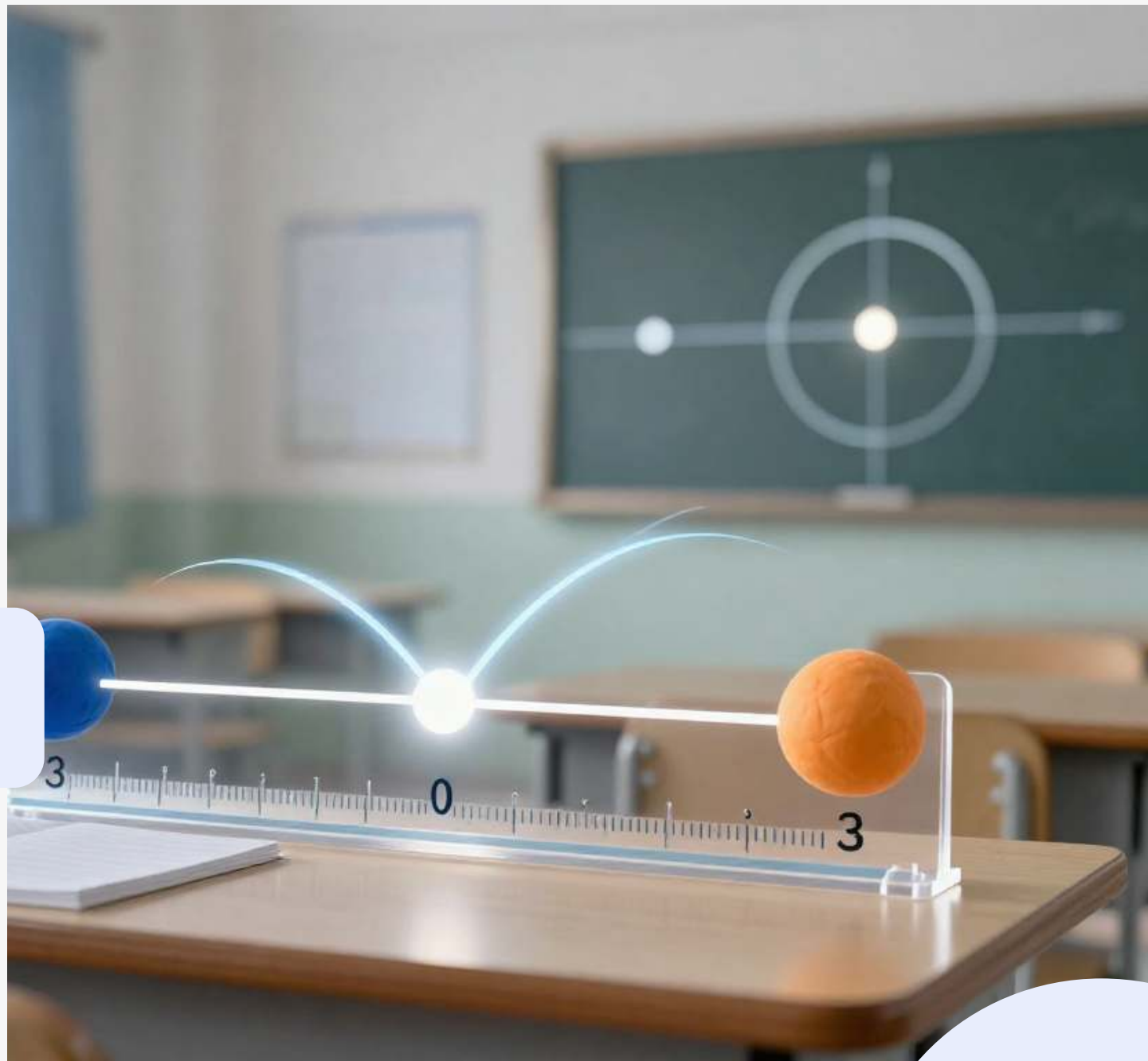
Эта тема соединяет алгебру и геометрию: мы проверяем точки, строим границы и читаем области решений на координатной плоскости.

Что такое неравенство с двумя переменными



- **Две переменные**
В таком неравенстве есть две неизвестные, чаще всего x и y . Подходящей считается пара чисел, при которой запись становится верной.
- **Точка на плоскости**
Каждая подходящая пара координат соответствует точке на координатной плоскости. Поэтому решение удобно показывать не числом, а местом на рисунке.
- **Много решений**
Обычно решений не одно и не два, а целая область точек. Она может быть ограниченной или бесконечной, в зависимости от знака неравенства.
- **Примеры записи**
Подходящими примерами служат $x + y \leq 5$, $y > 2x - 1$ и $|x| + |y| < 4$. Все они описывают множество точек, а не одно значение.

Смысл модуля в алгебраических выражениях



01

Расстояние до нуля

Модуль числа показывает, насколько число удалено от нуля на числовой прямой. Поэтому $|3|$ и $|-3|$ равны 3, а результат всегда неотрицателен.



03

Модуль переменной

В неравенствах с двумя переменными модуль может стоять у x , у или у линейного выражения $ax + by + c$. Тогда важно понять, что именно измеряется.



02

Расстояние до точки

В выражениях $|x|$ и $|x - 2|$ модуль показывает расстояние числа x до 0 или до 2. Это удобно для описания ограничений и допустимых отклонений.



04

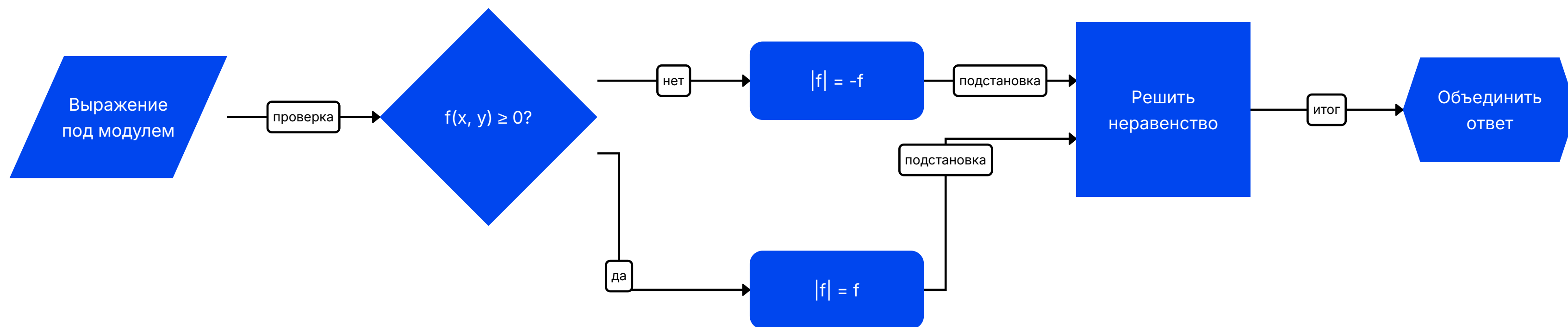
Связь с графиком

Когда модуль входит в неравенство, границы и область решений часто становятся симметричными. Это помогает по записи сразу



Как раскрывается модуль в неравенстве

Алгоритм применения модуля к выражению с двумя переменными.



Геометрический смысл простейших модулей

Вертикальная полоса

Неравенство $|x| < a$ означает, что x находится между $-a$ и a . На плоскости это полоса между двумя вертикальными прямыми, параллельными оси Oy .

Горизонтальная полоса

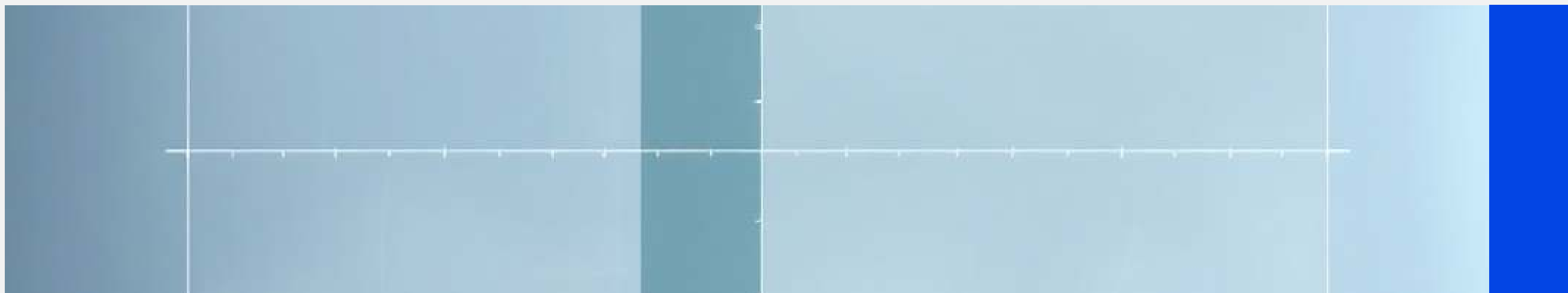
Если записано $|y| < b$, то ограничение касается только координаты y . Тогда область решений лежит между двумя горизонтальными прямыми и имеет вид полосы.

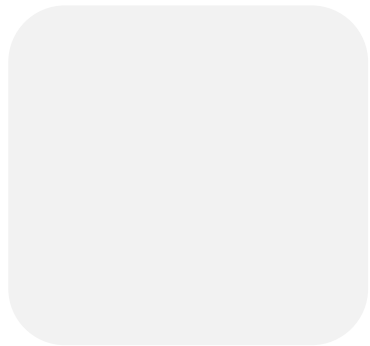
Сдвиг границы

В записи $|x - x_0| < a$ полоса смещается относительно прямой $x = x_0$. Центр области переносится, но сама форма остаётся той же.

Удобство рисунка

Такие неравенства легко показывать на координатной сетке: две параллельные прямые и выделенная между ними область сразу делают смысл записи понятным.

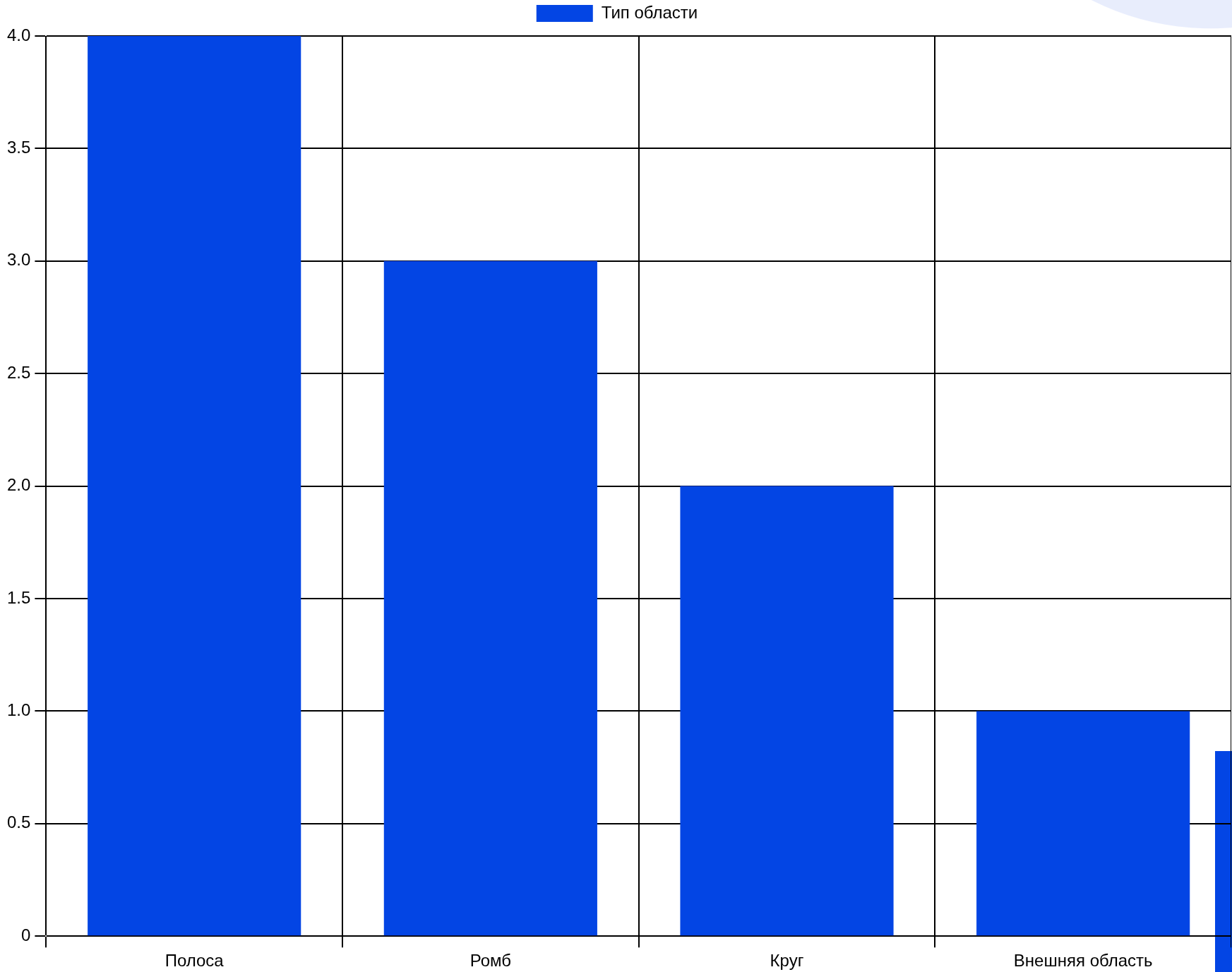




Формы областей решений в неравенствах с модулем

Сравнение показывает, что форма области зависит от записи: один модуль даёт полосу, сумма модулей — ромб, а знак неравенства меняет расположение области.

Во всех случаях модуль помогает получать симметричные границы и легко читать решение по графику.



Схематическая классификация по теме урока

Один модуль и двойное неравенство

01

Запись с модулем

Если в неравенстве стоит $|ax + by + c| \leq d$, сначала важно понять, что модуль ограничивает выражение с двух сторон, а не только сверху.

02

Двойная граница

Из записи сразу получается неравенство $-d \leq ax + by + c \leq d$. Значит, выражение внутри модуля должно попасть в промежуток между двумя числами.

03

Две прямые

Граница области задаётся двумя параллельными прямыми. Они ограничивают полосу, внутри которой находятся все точки, удовлетворяющие условию.

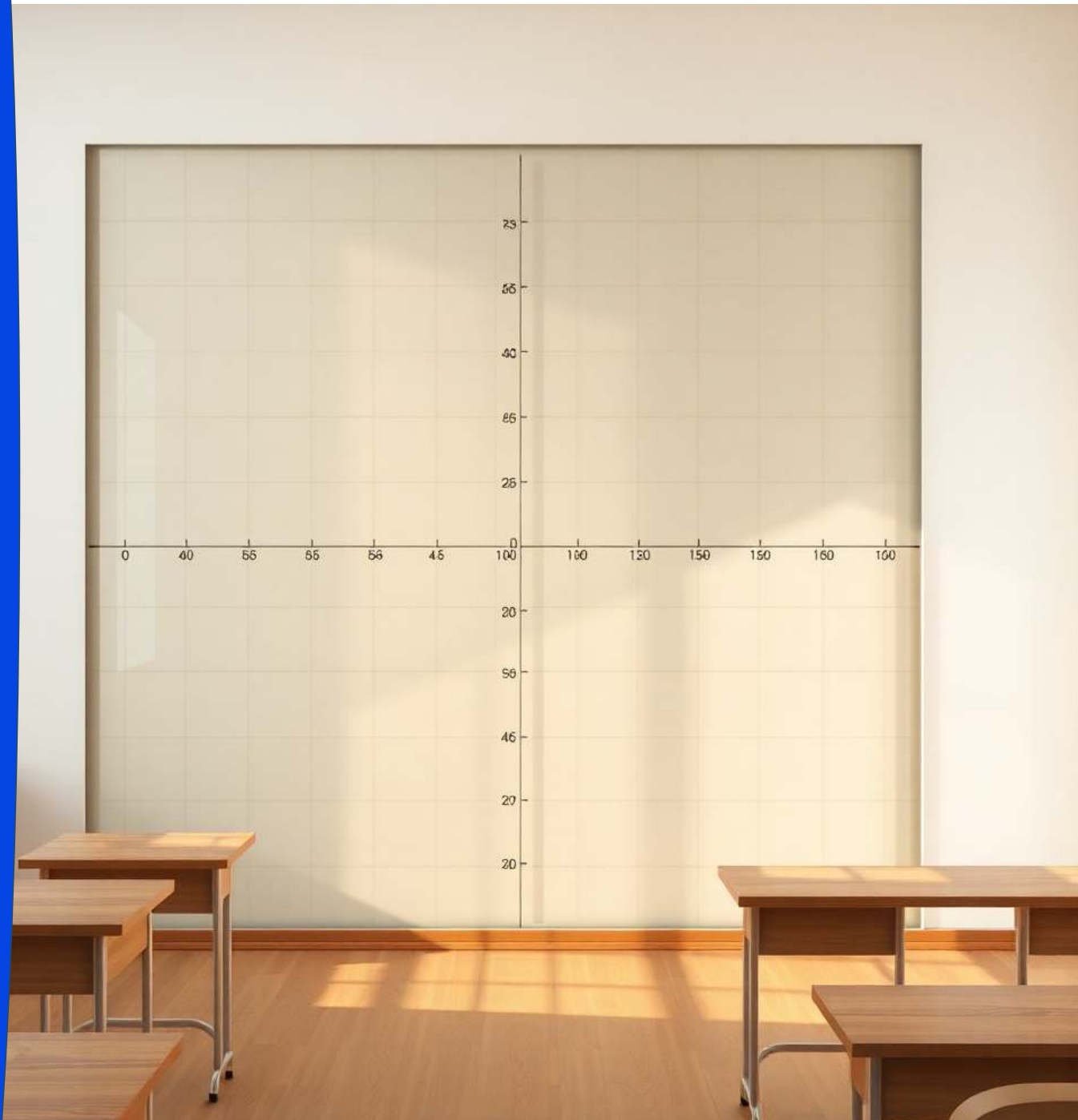
04

Включение границы

При знаке $\leq$ обе линии входят в ответ, а при знаке $<$ границы не входят. На чертеже это различают сплошной и пунктирной линией.



Два модуля в одной записи



- **Разбиение плоскости**

В неравенствах вида $|f(x, y)| + |g(x, y)| \leq c$ сначала выделяют области, где знаки выражений f и g не меняются. Тогда модуль раскрывается по-разному в каждой части.

- **Простые выражения**

В школьных задачах чаще встречаются x , y , $x - 1$, $y + 2$. Такие записи удобно анализировать, потому что границы легко построить на координатной плоскости.

- **Работа по частям**

После разбиения плоскости каждую область рассматривают отдельно, а затем объединяют все подходящие части. Так решение получается точным и понятным по рисунку.



Основные формы неравенств с модулем

Таблица помогает быстро связать запись неравенства с видом области и примером границы.

Запись с модулем почти всегда даёт симметричную область с чёткой границей; меняется лишь её положение и то, входит ли граница в ответ.

Тип	Область	Пример
$ x < a$	полоса	между $x = \pm a$
$ x - x_0 + y - y_0 \leq r$	ромб	центр $(x_0; y_0)$
$ ax + by + c \geq d$	внешние полуплоскости	за двумя прямыми
$ x + y < r$	внутри ромба	область около начала

Строгие и нестрогие неравенства

Строгие знаки

Знаки $<$ и $>$ говорят, что граничные точки в ответ не входят. На чертеже такую границу обычно показывают пунктиром, чтобы сразу было видно: линия только ограничивает область, но не принадлежит ей.

Нестрогие знаки

Знаки $\leq$ и $\geq$ означают, что точки на границе считаются решениями. Поэтому границу рисуют сплошной линией, а затем отмечают всю область, которая ей соответствует, вместе с самой линией.

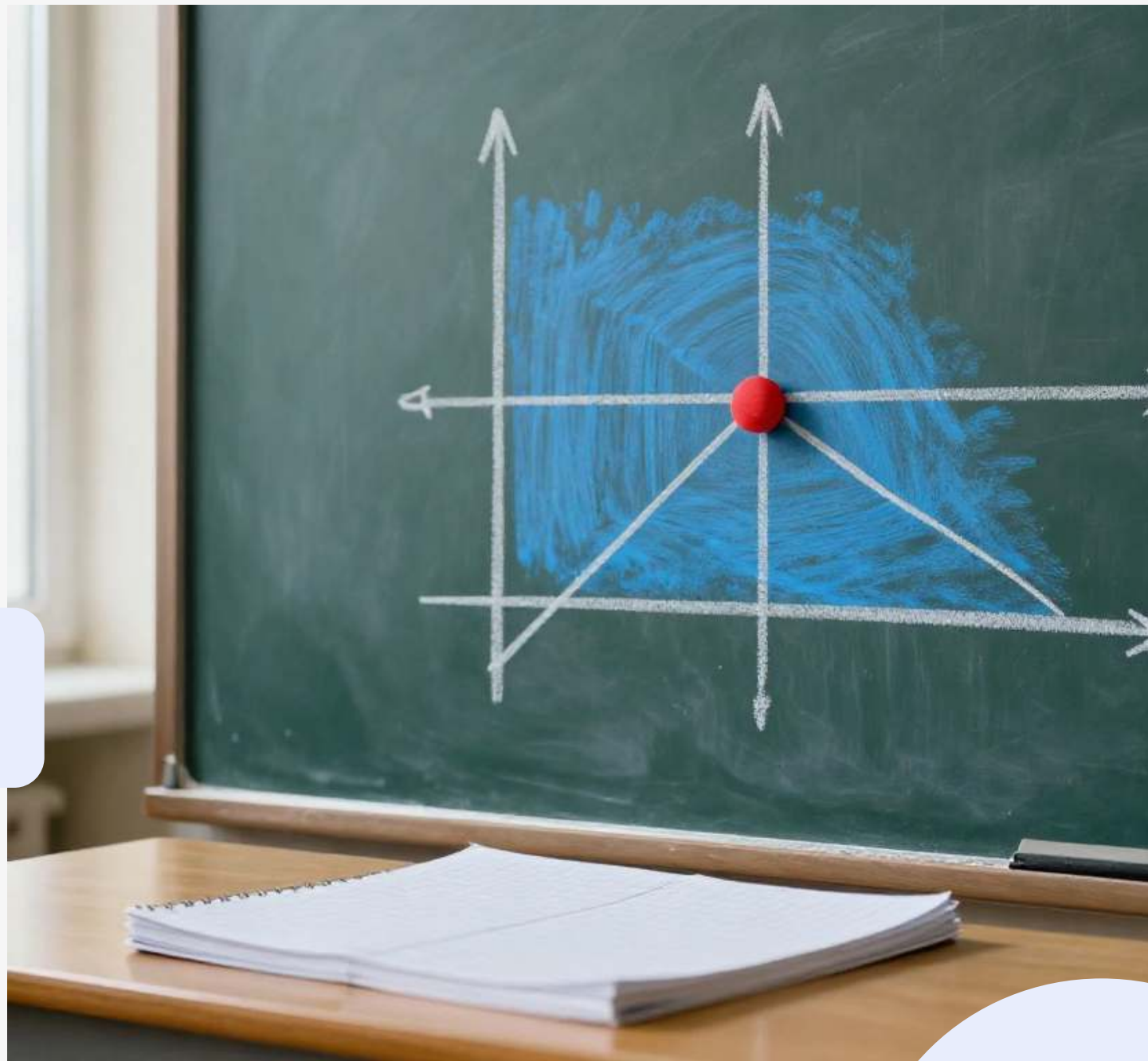
Роль границы

Граница помогает отделить допустимые точки от недопустимых. Если не понять, входит ли она в решение, можно неверно закрасить рисунок или ошибиться при записи ответа в координатной плоскости.

Проверка точки

При проверке точки важно смотреть, лежит ли она на границе или строго внутри области. Именно знак неравенства подсказывает, считать ли такую точку подходящей при решении задачи.

Проверка точки на принадлежность области



01

1. Подставить координаты



Сначала записывают координаты точки вместо x и y в исходное неравенство. Это превращает буквенную запись в обычное числовое выражение, которое уже можно проверить на истинность.

02

2. Вычислить значение



Затем аккуратно считают модуль, сумму или разность, не пропуская скобки. Для точки $(1; 2)$ важно подставить обе координаты сразу, иначе получится неверный результат.

03

3. Сделать вывод

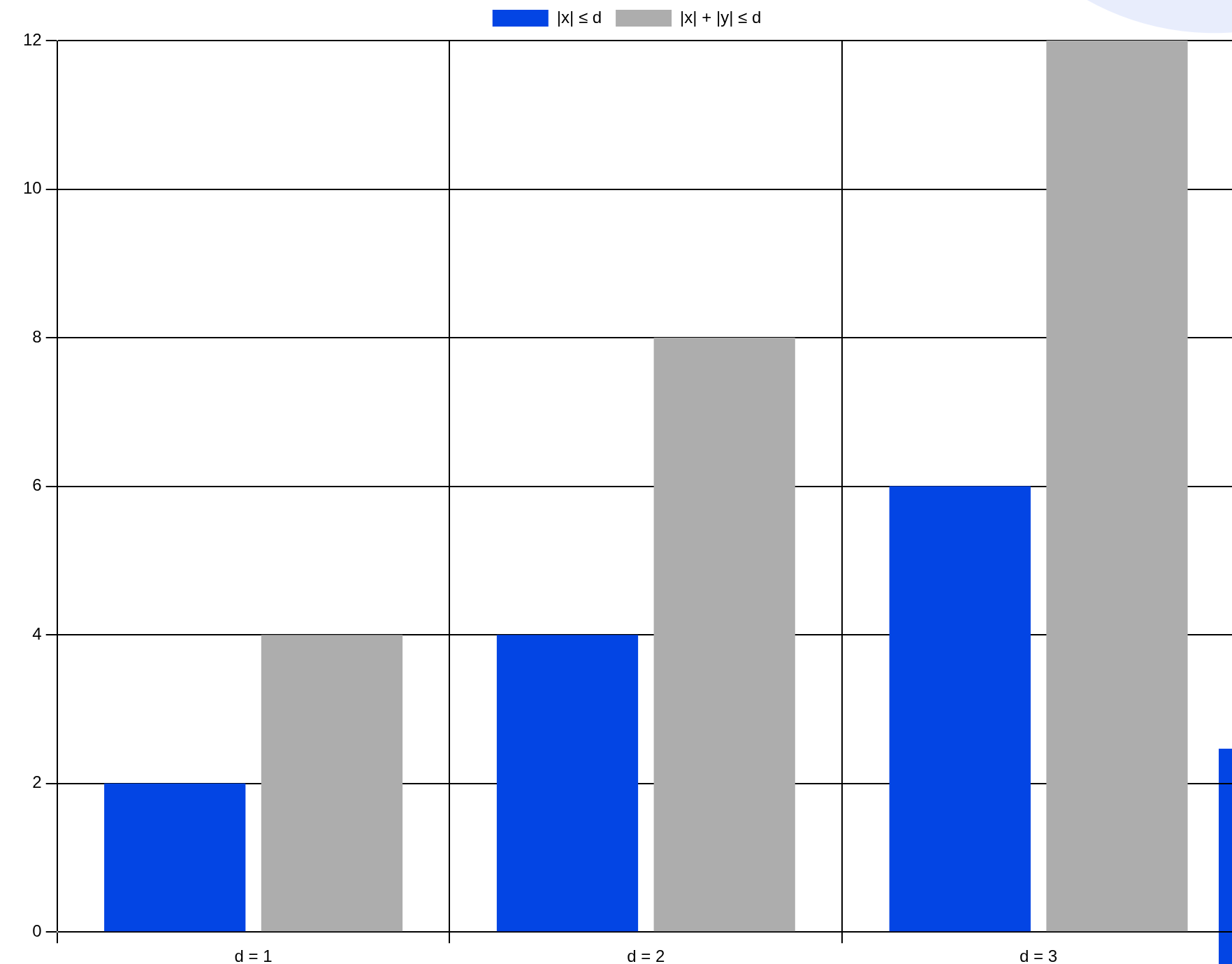


Если получившееся числовое неравенство верно, точка принадлежит области решений. Если оно неверно, точка находится вне области и не подходит по условию задачи.

Как меняется область при росте числа справа

На графике сравнивается не форма, а размер допустимой области. Увеличение параметра делает решение шире и оставляет ту же симметрию относительно осей.

Чем больше число справа, тем больше область решений. Граница сохраняет тип, но отодвигается дальше от начала координат.



Иллюстративная схема по правилам раскрытия модулей и построения областей решений

Типичные ошибки при решении

Неверное раскрытие модуля

Часто забывают проверить знак выражения внутри модуля и сразу пишут одну формулу. Из-за этого теряется второй случай, а значит, часть решений просто не попадает в ответ.

Путаница со знаком неравенства

Знак $<$ или $>$ требует пунктирной границы, $\leq$ и $\geq$ — сплошной. Если перепутать их, можно ошибочно включить или исключить граничные точки из решения.

Проверка только одной координаты

В неравенствах с двумя переменными нужно подставлять и x , и y одновременно. Если проверить только одну координату, результат будет неполным и не покажет, принадлежит ли точка области.

Неверный выбор области

Иногда путают внутреннюю и внешнюю часть фигуры, особенно когда модуль задает область вне линии или ромба. Помогает контрольная точка: она быстро показывает, где находится нужная область.

Правило раскрытия модуля по знаку выражения

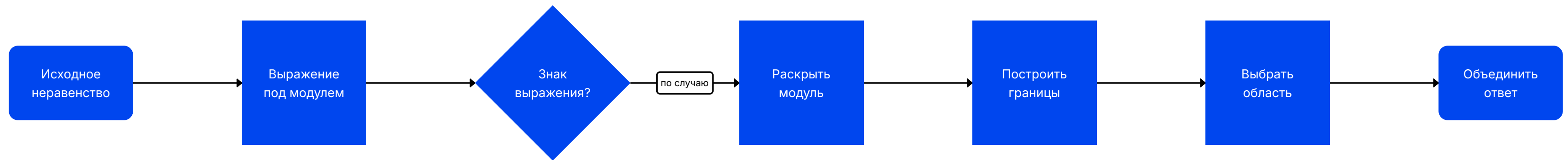
Сравните два основных случая раскрытия модуля и посмотрите, как меняется запись неравенства после замены.

Условие	Модуль	Результат
$f(x, y) \geq 0$	$ f = f$	без знака
$f(x, y) < 0$	$ f = -f$	со знаком минус

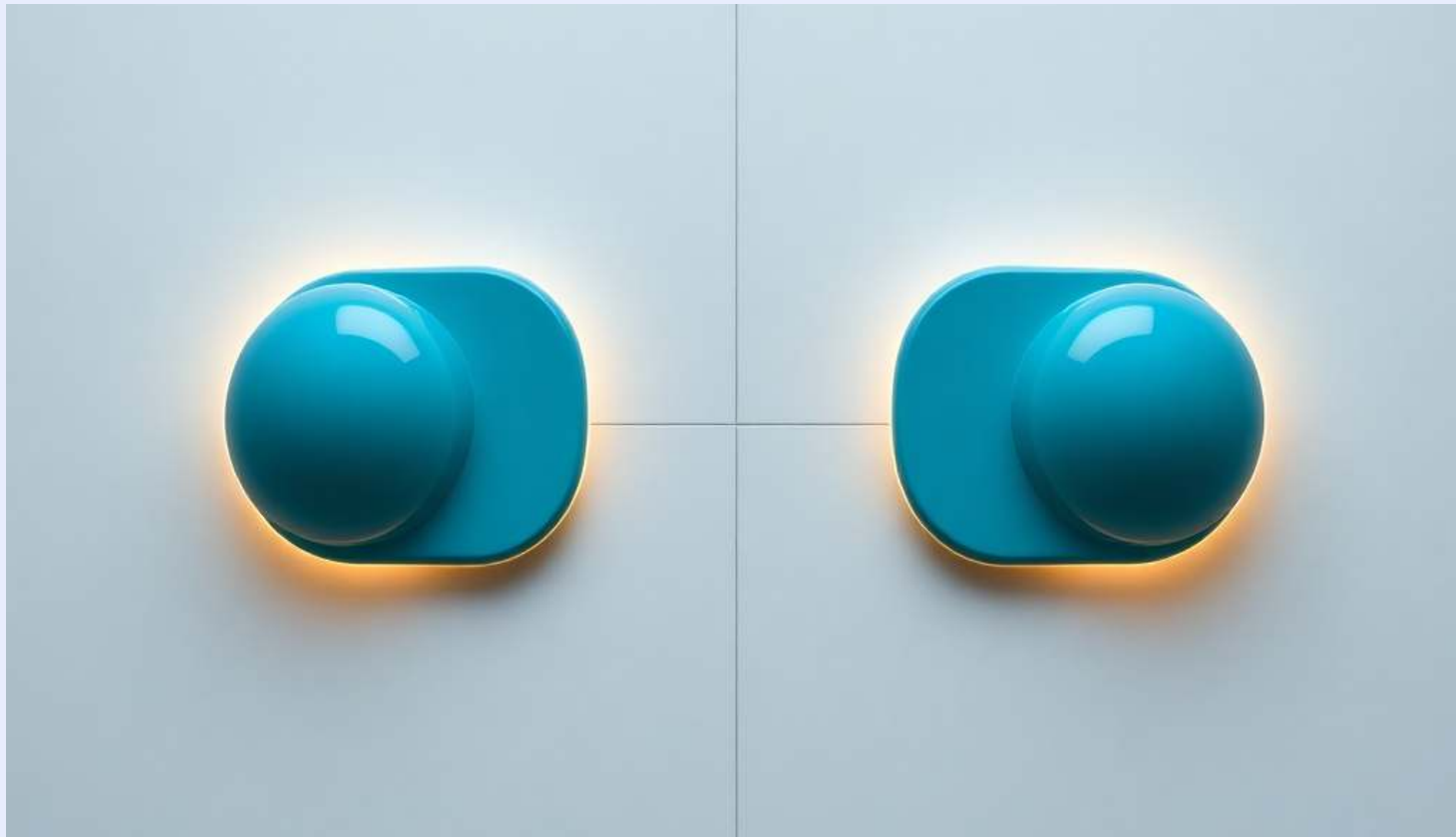
Знак выражения внутри модуля полностью определяет, какую замену нужно сделать. После этого исходное неравенство решают как обычное.

Алгоритм построения области решений

Последовательность действий при решении неравенств с модулем и двумя переменными

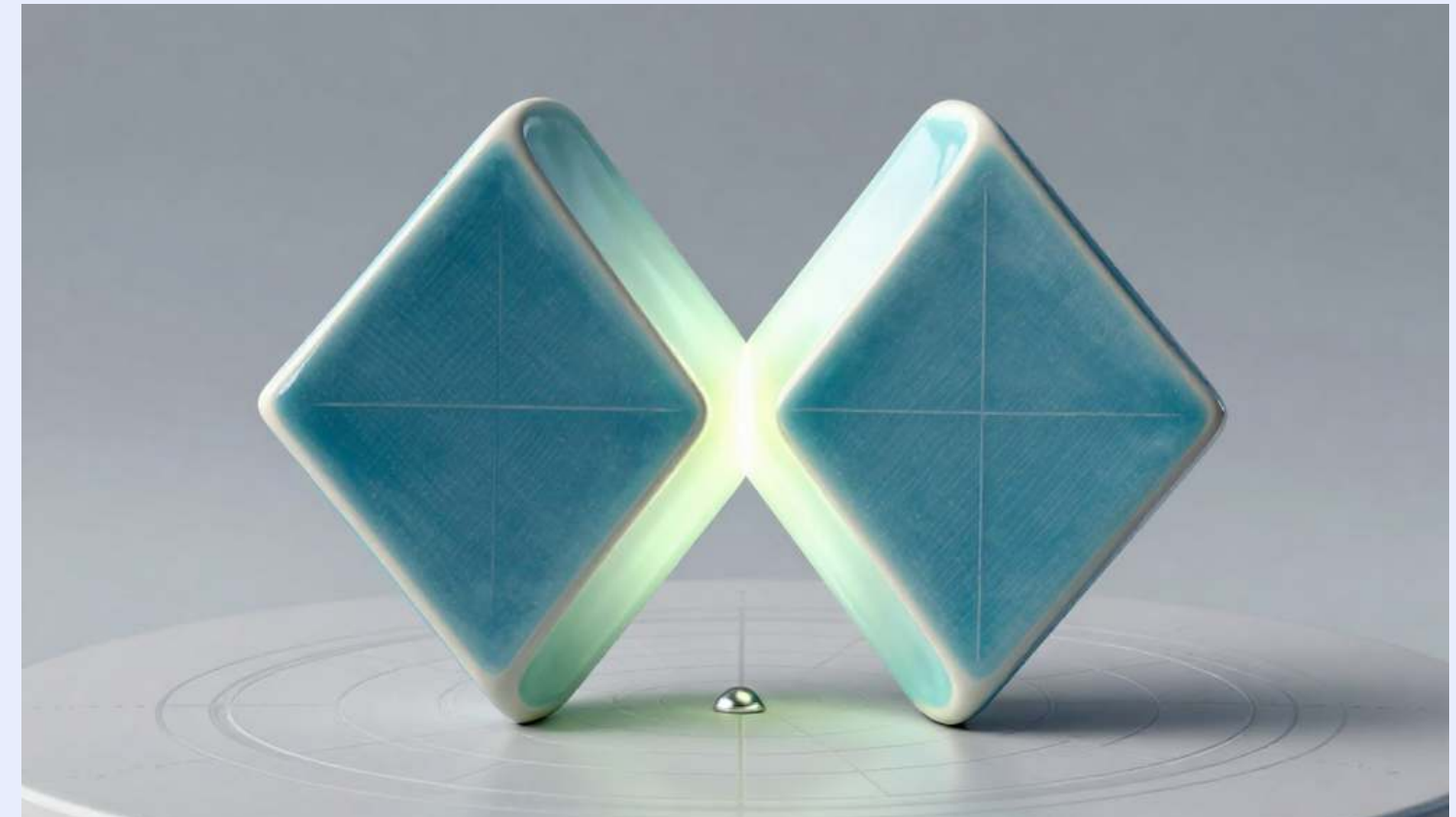


Симметрия области решений



Одинаковые части по обе стороны осей

Когда в записи стоят только $|x|$ и $|y|$, левая и правая части рисунка совпадают, как и верх и низ. Поэтому область удобно строить сразу в одной четверти, а затем отражать её в остальные.



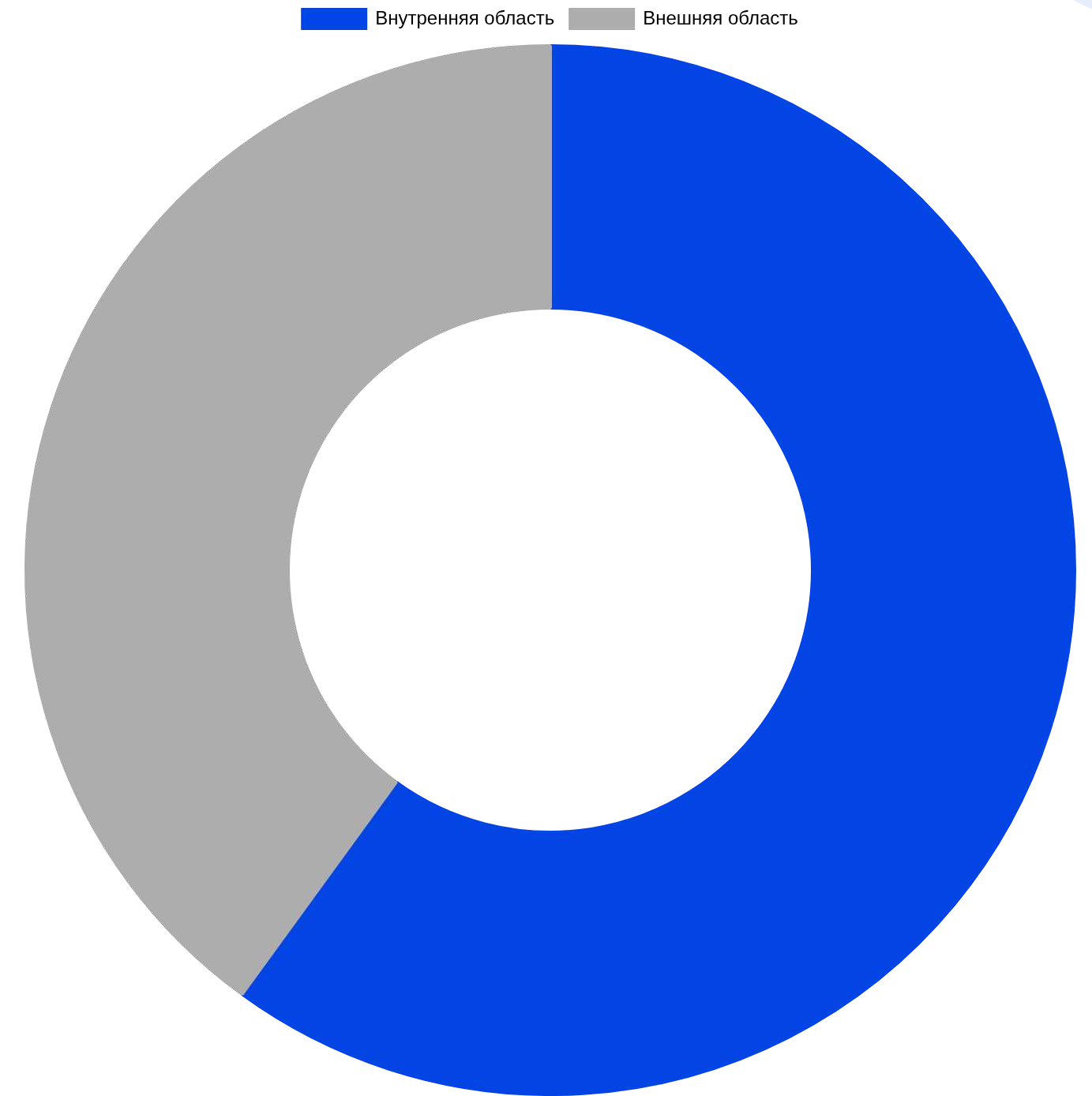
Симметрия относительно начала координат

Если неравенство не меняется при замене x на $-x$ и y на $-y$, фигура выглядит одинаково вокруг начала координат. Это особенно заметно у ромбов и полос, где все стороны повторяют друг друга.

Внутренняя и внешняя область

Один и тот же модуль может описывать либо область внутри границы, либо все точки вне неё. Всё зависит от знака неравенства и числа справа.

Знаки $\leq$ и $<$ чаще связаны с внутренней областью, а $\geq$ и $>$ — с внешней. Поэтому сначала важно понять смысл границы, а потом закрашивать рисунок.



Учебная схема по видам областей решений

Где используется тема в реальных задачах



Погрешность измерений

Неравенства с модулем показывают, насколько измерение может отклоняться от нужного значения. Так задают допустимую ошибку и проверяют, укладывается ли результат в пределы.



Расстояние до точки

Модуль помогает описывать расстояние до заданной точки или прямой. Это полезно, когда нужно найти все положения, находящиеся не дальше указанной границы.



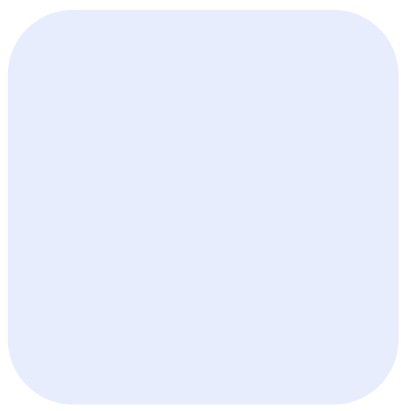
Зона на плоскости

На координатной плоскости такие неравенства задают безопасные или допустимые зоны. По рисунку легко понять, куда может попасть объект и какие точки подходят.



Границы допуска

В задачах с ограничениями модуль помогает отделить разрешённые значения от запрещённых. Это делает условие наглядным и связывает алгебру с реальными правилами.



Что важно запомнить

Неравенства с модулем задают не одно число, а целую область точек.
Если помнить про знак неравенства, границу и раскрытие по случаям, такие задачи становятся понятными и аккуратными.

