

Преобразование подобия: основная идея и место в геометрии

Подобие сохраняет форму, но меняет размеры в одинаковое число раз: k задаёт «масштаб судьбы» фигуры.



Почему подобие особенно важно в 10 классе

Подобие связывает геометрию и числа: вы видите, как углы и стороны «подчиняются» единому коэффициенту. Оно помогает находить неизвестные величины, доказывать свойства треугольников и сравнивать фигуры разного масштаба. Идеи подобия возникали ещё в античности и сегодня применяются в графике, архитектуре и картографии.



Определение преобразования подобия

01

Берём центр и коэффициент k : каждая точка исходной фигуры переходит в образ так, что расстояние до центра умножается на одно и то же число k — одинаковое для всех точек.

02

Углы сохраняются: если в исходной фигуре лучи образуют некоторый угол, то соответствующий угол у образа остаётся тем же. Поэтому прямолинейность и направленность сохраняются.

03

Фигура называется подобной исходной, когда соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны. Так появляется количественная связь между «одинаковостью форм» и масштабом.

01

Гомотетия определяется центром O и коэффициентом k . Точки образа лежат на лучах, выходящих из O через исходные точки, а расстояния умножаются на k .

02

Если $k > 1$, фигура увеличивается: все линейные размеры растут в k раз. При $0 < k < 1$ — уменьшается, то есть линейные размеры становятся меньше в k раз.

03

При $k = 1$ фигура совпадает сама с собой. При отрицательном k точки образа смещаются по другую сторону от центра, что придаёт построению дополнительную центральную «перевёрнутость».

Гомотетия как частный случай преобразования подобия

Как меняются основные величины при подобии

Подобие задаёт разные законы изменения: линейные величины — по k , а площади и объёмы — по степеням k .

Чем выше «размерность» величины (линейная, площадь, объём), тем быстрее она растёт или убывает при изменении коэффициента k .

Обобщение свойств подобия (степенные зависимости).

Величина	Изменение	Пример
Длины	$\times k$	5 см при $k=2 \rightarrow 10$ см
Углы	без изменения	45° остаётся 45°
Периметр	$\times k$	18 см при $k=1,5 \rightarrow 27$ см
Площадь	$\times k^2$	8 см^2 при $k=3 \rightarrow 72 \text{ см}^2$
Объём	$\times k^3$	для пространства: сильнее, чем площадь

Подобные фигуры в реальной жизни



Карта и масштаб: измеряйте, не выходя из комнаты

На карте местности удобно сравнивать объекты по пропорциям: улицы, расстояния и контуры «помещаются» на бумагу. Масштаб 1:100 означает, что 1 см на карте соответствует 1 м на местности — это и есть практическое подобие.



Уменьшённые модели зданий: проекция реальности на чертёж

Макеты сооружений сохраняют форму и соотношения частей, только размеры уменьшаются в заданное число раз. Благодаря этому можно заранее проверять планировку и согласовывать детали без сложных натурных измерений.



Фотография с масштабной разметкой: точность по косвенным данным

Построение образа точки и фигуры при гомотетии

Как по центру O и коэффициенту k получить точки образа и собрать фигуру



Признаки подобия треугольников

01

Первый признак опирается на равенство двух углов: если два угла одного треугольника равны двум углам другого, то треугольники подобны.

02

Второй признак использует два условия: пропорциональность двух сторон и равенство угла между ними. Это позволяет «восстановить» форму через частичное соответствие.

03

Третий признак — по пропорциональности трёх сторон: когда три стороны одного треугольника попарно пропорциональны сторонам другого, оба треугольника подобны.

04

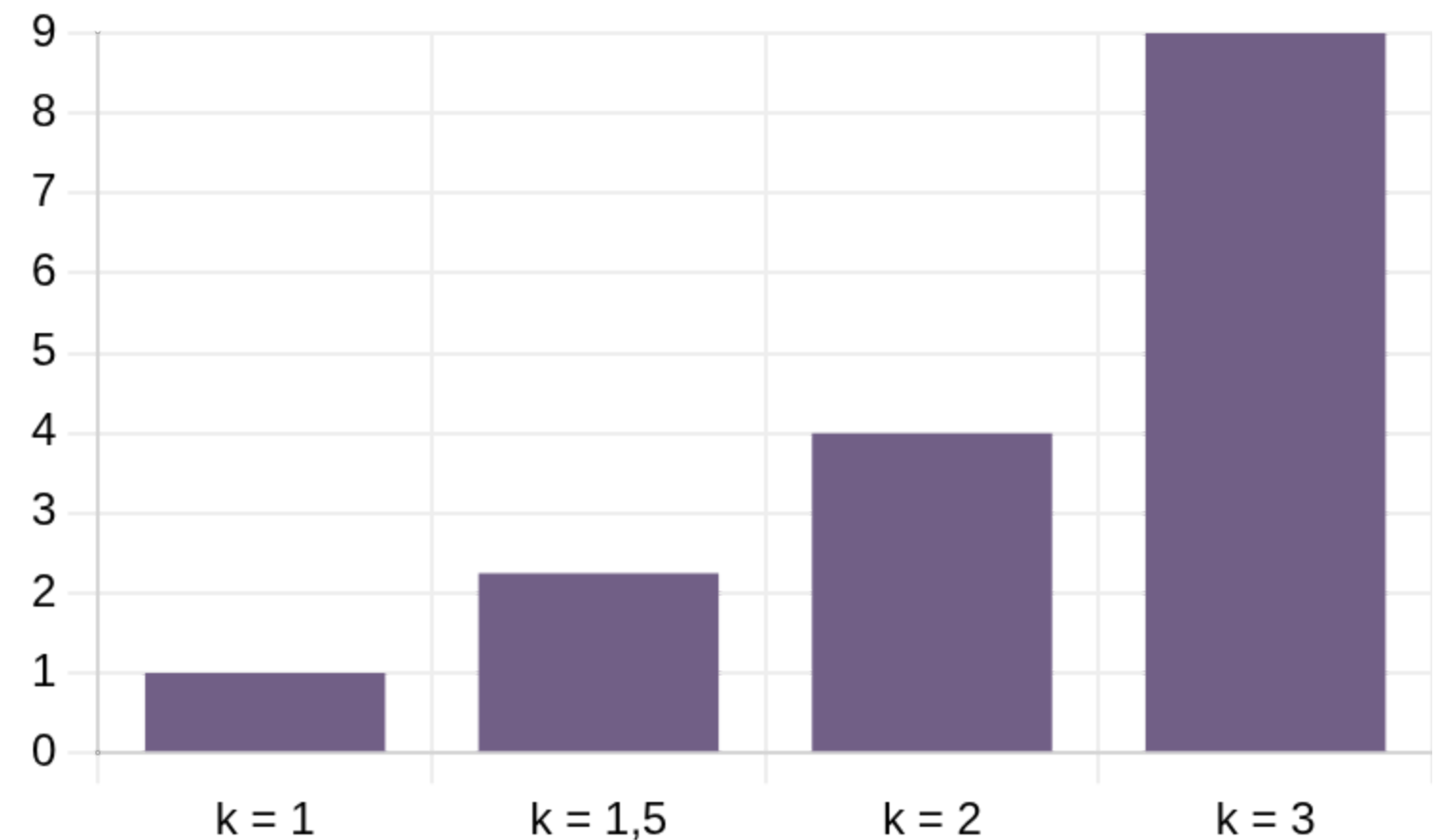
Эти три признака становятся опорой в задачах 10 класса: вы быстро проверяете подобие и затем переходите к вычислениям с коэффициентом k .

Как растут длины и площади при увеличении коэффициента

Чтобы увидеть различие быстрее, сравните: при $k=2$ длины удваиваются, а площадь становится в 4 раза больше.

Диаграмма подчёркивает: площадь зависит от k^2 , поэтому изменения по площади всегда «успевают» за линейными и опережают их по скорости.

Рост линейных размеров и площадей при увеличении коэффициента



Свойства подобия: длины $\times k$, площади $\times k^2$ ($k=1; 1,5; 2; 3$).

Как находят коэффициент подобия



По соответствующим сторонам

Коэффициент подобия равен отношению соответствующих линейных размеров: $k = a'/a$. Он находится, когда известно, какие стороны у двух подобных треугольников соответствуют друг другу.



По высотам, медианам и биссектрисам

Если в подобных треугольниках совпадают соответствующие углы, то коэффициент k можно вычислять не только по сторонам. Он работает и для высот, медиан и биссектрис при их согласованном соответствии.



Если дан масштаб на чертеже

В задачах с масштабом коэффициент определяется как отношение размера изображения к реальному размеру. Тогда вы переводите «метры на местности» в «сантиметры на плане» напрямую через k .



Через направление «изображение → реальность»

Важно следить за тем, что именно стоит в числителе и знаменателе. k всегда выражает переход от одного уровня масштаба к другому, поэтому порядок отношения влияет на знак и величину.



Проверка соответствия перед вычислениями

Прежде чем подставлять числа, убедитесь, что выбраны действительно соответствующие отрезки или элементы. Иначе получится неверный k даже при правильных вычислениях и формулах.

Сравнение двух подобных треугольников

В таблице показано, как меняются основные величины при переходе от одного треугольника к другому в преобразовании подобия с коэффициентом 1,5. Углы сохраняются, а линейные размеры и производные величины изменяются по своим законам.

При $k=1,5$ углы остаются неизменными, длины растут в 1,5 раза, периметр — тоже в 1,5 раза, а площадь увеличивается в $k^2=2,25$ раза.

Данные приведены в условиях примера для двух подобных треугольников.

Величина	Треугольник 1	Треугольник 2
Сторона	6 см	9 см
Угол	40°	40°
Периметр	18 см	27 см
Площадь	12 см ²	27 см ²
Коэффициент подобия	1	1,5

Подобие в архитектуре и геометрическом моделировании

Миниатюры, которые сохраняют замысел

Архитекторы и дизайнеры используют подобие, чтобы переносить замысел с больших объектов на уменьшенные модели. При подборе масштаба сохраняются формы и пропорции, поэтому по макету можно судить о реальной компоновке.

Согласование пропорций и элементов

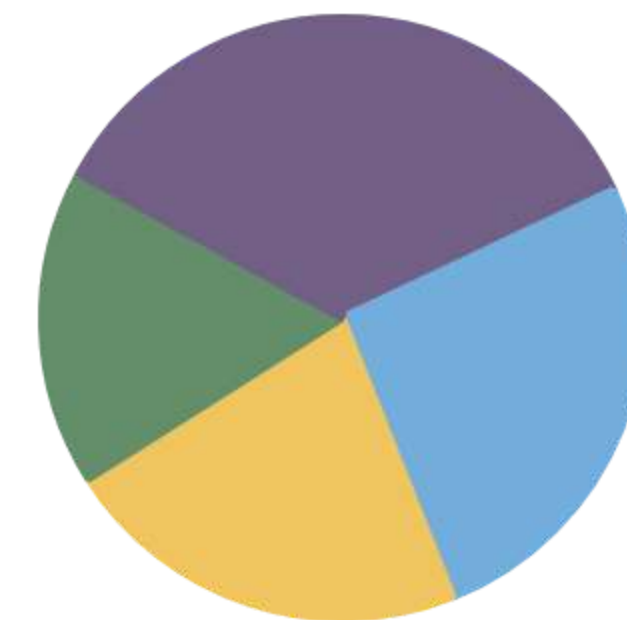
В геометрическом моделировании подобие помогает согласовывать размеры повторяющихся деталей: орнаментов, балок, оконных модулей. Одинаковые соотношения высоты, ширины и расстояний поддерживают симметрию и единый стиль композиции.



Где применяется подобие

При работе с масштабом подобие позволяет переносить измерения между макетом и объектом без искажения формы, что особенно важно при проектировании и проверке пропорций.

Основные доли приходятся на проектирование и визуализацию: там нужно сохранять форму при изменении размеров. Меньшие доли связаны с прикладными измерениями и схемами.



Качественная структура по описанию областей применения в учебном контексте (точные проценты не указаны).

Типичные ошибки при работе с подобием



Путают равенство и подобие

Иногда ученик считает, что раз две фигуры «похожи», значит они равны. Но при подобии углы сохраняются, а размеры могут отличаться из-за коэффициента k , поэтому равенство не гарантируется.



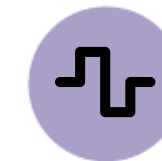
Ошибаются с соответствующими сторонами

Задачи на подобие требуют аккуратно выбрать, какие стороны и углы «соответствуют» друг другу. Частая ошибка — взять несоответствующие отрезки, из-за чего нарушается пропорциональность.



Неверно меняют площадь

При увеличении линейных размеров в k раз площадь изменяется не в k раз, а в k^2 раз. Из-за этого ответы часто получаются кратными, но не тем законом, который требует условие.

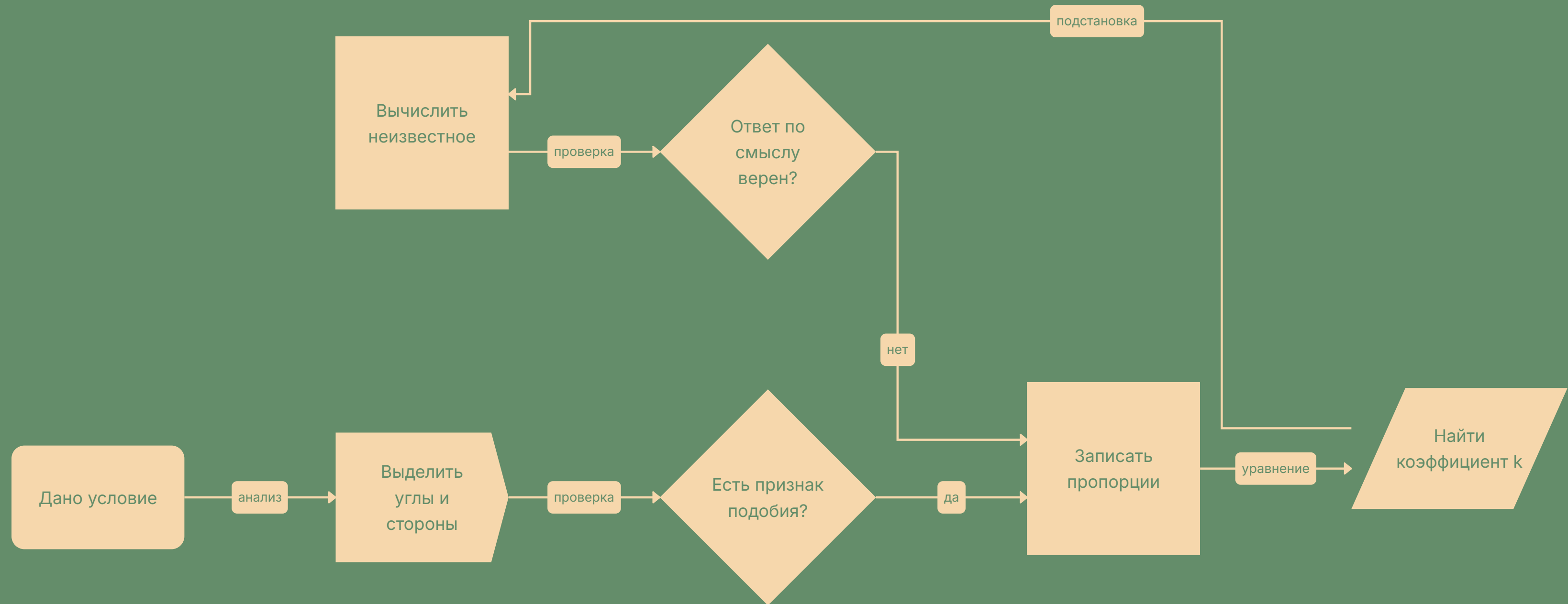


Переносят линейный закон на нелинейные величины

Площадь и объём подчиняются разным степеням коэффициента подобия: для площади — k^2 , для объёма — k^3 . Если применять один и тот же множитель ко всем величинам, закономерность теряется.

Алгоритм решения задач на подобие

Последовательность шагов для вычислений и доказательств в задачах на треугольники, масштаб и недоступные расстояния.

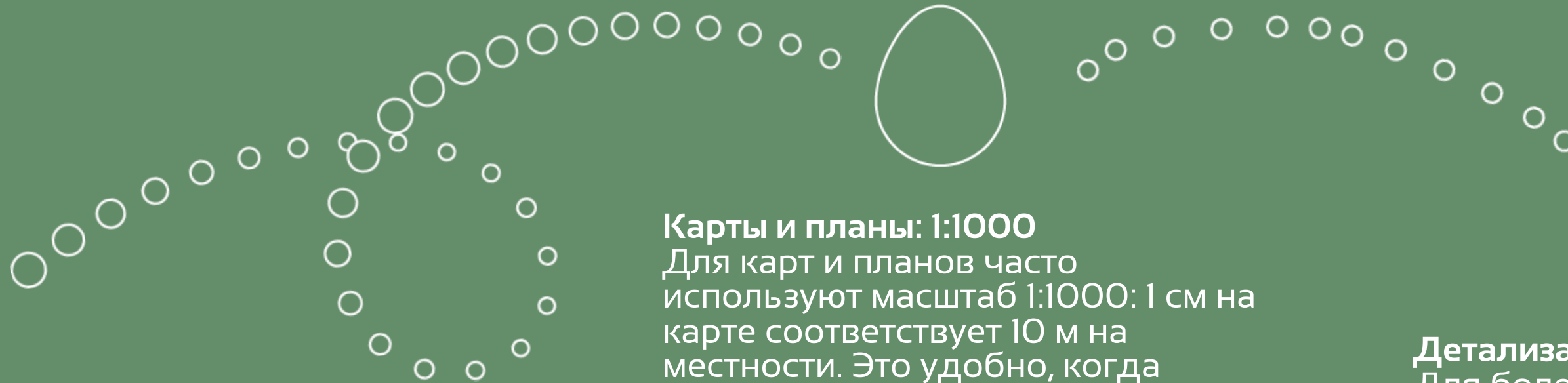


Связь подобия с масштабом



Масштаб 1:n

Масштаб 1:n означает, что каждый линейный размер на рисунке уменьшен в n раз по сравнению с реальным объектом. Пропорции сохраняются, поэтому фигуры остаются подобными.



Карты и планы: 1:1000

Для карт и планов часто используют масштаб 1:1000: 1 см на карте соответствует 10 м на местности. Это удобно, когда нужно изображать большие территории без потери пропорций.



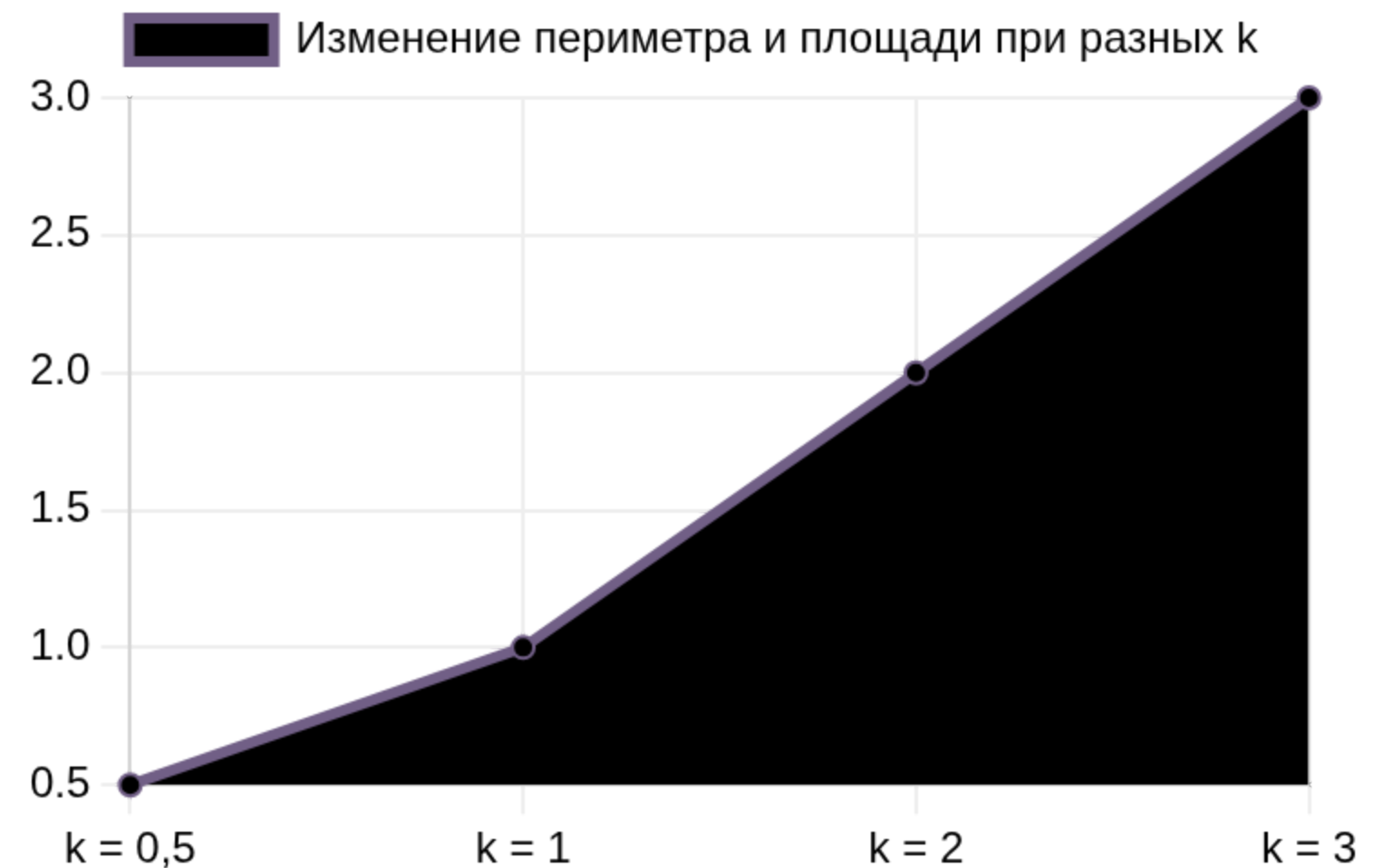
Детализация: 1:100

Для более детальных чертежей и схем применяют масштаб 1:100: 1 см соответствует 1 м. Благодаря подобию по чертежу можно корректно переносить расстояния и размеры.

Изменение периметра и площади при разных k

Если построить два графика отдельно, будет видно: периметр масштабируется линейно, а площадь — по квадрату коэффициента. Поэтому разница с ростом k усиливается.

Даже при умеренном увеличении k площадь растёт существенно быстрее периметра. Это помогает быстро оценивать результат без вычислений «в лоб».



Закономерности подобия: периметр $\propto k$,
площадь $\propto k^2$ (данные из условия: $k = 0,5; 1; 2; 3$).

Задачи, в которых подобие особенно полезно



Высота по тени

Когда предмет невозможно измерить напрямую, помогает рассуждение о подобных треугольниках, возникающих из тени и высоты. По известной высоте другого объекта можно найти искомую величину с опорой на пропорции.



Расстояния на карте

Подобие позволяет переводить расстояния между реальным объектом и картой при известном масштабе. Так вычисляют длины маршрутов и расстояния между точками, не выходя в поле.



Чертежи и схемы

При построении планов и схем важно сохранить пропорции между частями. Подобие обеспечивает корректный перенос размеров между разными масштабами и помогает избежать искажений при проектировании.



Доказательства в геометрии

В задачах по треугольникам подобие связывает углы и стороны так, что появляются строгие выводы. Даже сложные конфигурации часто сводятся к работе с признаками подобия и найденными коэффициентами.

Главные свойства преобразования подобия

01

Преобразование подобия сохраняет углы и прямолинейность: если до преобразования лучи образовывали углы, то после они остаются равными. Прямые линии переходят в прямые, не ломая структуру фигуры.

02

Оно также сохраняет параллельность соответствующих элементов, поэтому форма «каркаса» не искажается. При этом меняются длины и периметры: каждое линейное измерение масштабируется коэффициентом k .

03

Площади и объёмы изменяются по другим законам: площадь — в k^2 раз, а объём — в k^3 раз. Благодаря этому подобие одновременно сохраняет геометрию формы и строго описывает изменение размеров в задачах.

Подобие — мост между теорией и измерениями

Изучение преобразования подобия соединяет геометрию и практическую работу с масштабами. Оно объясняет, как строятся модели и чертежи, помогает вычислять неизвестные размеры и доказывать свойства фигур через коэффициент k и пропорции.

