

Приближение функции линейной функцией. Дифференциал

Сложную функцию можно заменить линейной моделью рядом
с точкой.



Линейное приближение: зачем оно нужно

Производная показывает, как быстро меняется функция, а линейное приближение помогает увидеть её локальное поведение и считать значения проще и быстрее.



Приращение аргумента и приращение функции

1

Изменение аргумента

Если аргумент изменяется на Δx , мы рассматриваем новый пункт на оси и отслеживаем, как это сказывается на значении функции в точке.

2

Точное приращение

Приращение функции вычисляется по формуле $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$; это реальное изменение значения, а не приближённая оценка.

3

Сравнение с линейной частью

При малых Δx величина Δy часто почти совпадает с линейной частью изменения, поэтому её удобно заменять более простой формулой.

4

Переход к дифференциалу

Именно сравнение точного приращения и его линейной части приводит к понятию дифференциала как удобного инструмента приближённых вычислений.



Касательная как геометрическая модель локального поведения

Локальная близость

Вблизи точки гладкий график обычно мало отличается от касательной, поэтому прямая хорошо описывает поведение функции на небольшом участке.

Уравнение касательной

Касательная в точке (a) задаётся формулой $y=f(a)+f'(a)(x-a)$, где первое слагаемое фиксирует высоту, а второе — наклон.

Направление изменения

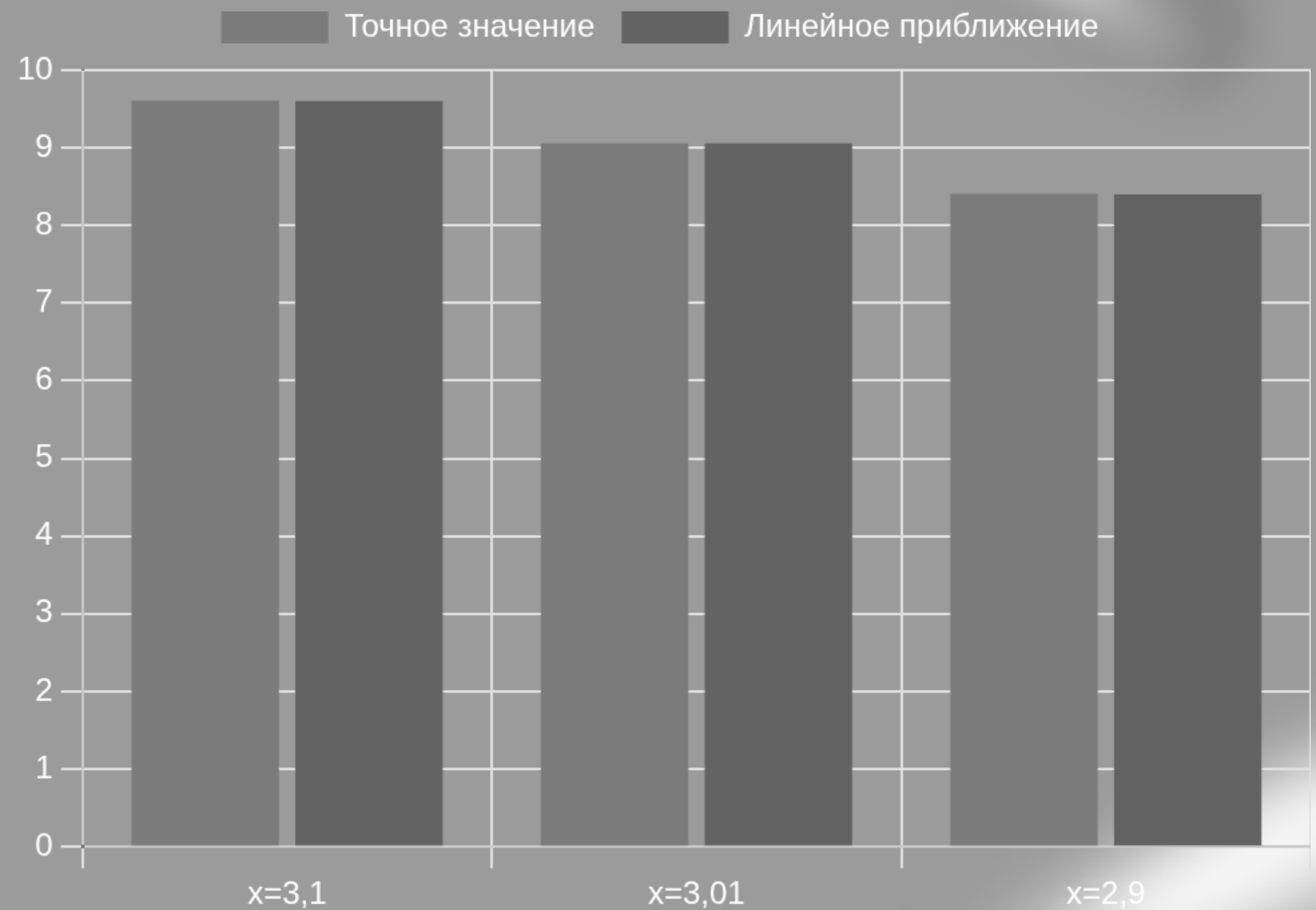
Знак и величина производной показывают, растёт функция или убывает, а также насколько быстро это происходит рядом с выбранной точкой.

Наглядная модель

Касательная связывает графический образ и вычислительную формулу, поэтому помогает заменить сложную кривую простой локальной моделью.

Сравнение точного значения и линейного приближения

- Для функции $f(x)=x^2$ около точки $x=3$ линейная формула даёт значения, почти совпадающие с точными вычислениями.
- Чем меньше отклонение от точки 3, тем ближе приближение к точному результату.



Составлено по функции $f(x)=x^2$ и вычислениям для $x=3$.

Производная как основа линейной модели

6



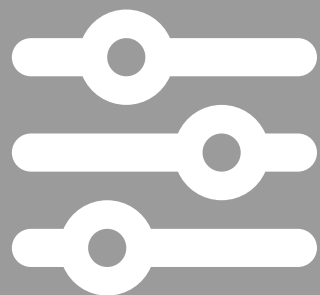
Скорость изменения

Производная показывает, насколько быстро меняется функция в данный момент, и тем самым описывает её локальную динамику без рассмотрения всей кривой.



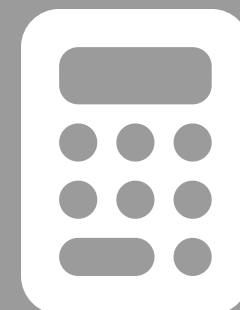
Наклон касательной

В точке производная совпадает с угловым коэффициентом касательной, поэтому она задаёт геометрический смысл локального поведения графика.



Линейная часть

Если производная существует, то рядом с точкой функция ведёт себя почти линейно, а значит её удобно заменять прямой.

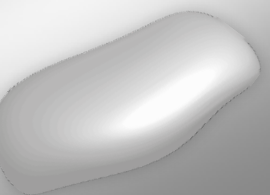
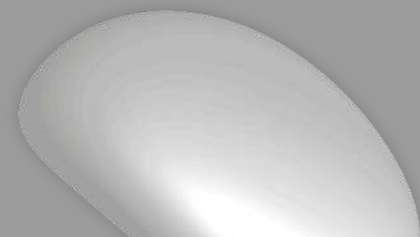
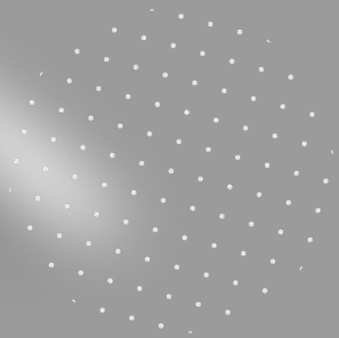
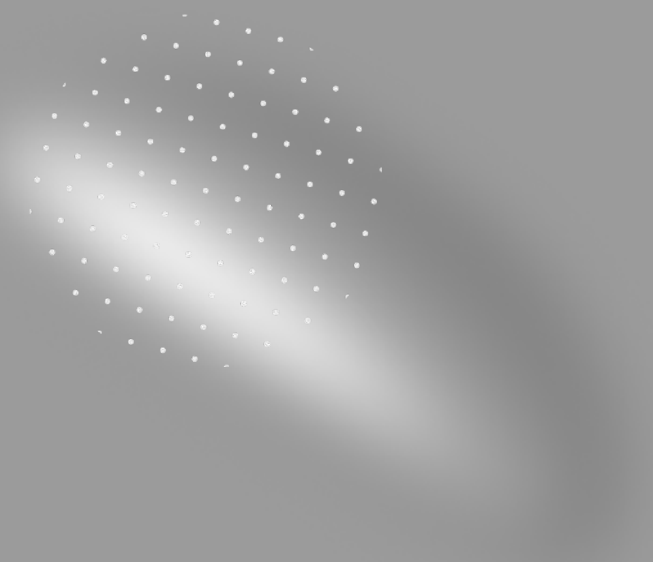


Основа вычислений

Именно производная позволяет строить простые формулы приближения, которые применяют в оценках, расчётах и проверке точности ответа.

Переход от функции к линейному приближению

Последовательность показывает, как из производной получают удобную линейную модель.



Определение дифференциала

8

1

Формула

Дифференциал функции записывают как $dy=f'(x)dx$; здесь производная задаёт коэффициент пропорциональности, а dx обозначает малое изменение аргумента.

2

Линейная часть

Дифференциал описывает только линейный вклад в изменение функции, не включая более сложные и менее заметные поправки.

3

Связь с приращением

Если Δx достаточно мало, то Δy и dy почти совпадают, поэтому дифференциал можно использовать как приближение.

4

Практическая польза

Такой подход упрощает вычисления: вместо точной, но громоздкой формулы достаточно подставить производную и малое приращение.

Дифференциалы для основных функций

- Таблица показывает, что дифференциал всегда строится по одному принципу: производная умножается на (dx) .
- Во всех примерах форма дифференциала повторяет производную, умноженную на (dx) ; это делает запись короткой и удобной.

Функция	Производная	Дифференциал
$(ax+b)$	(a)	(a, dx)
(x^2)	$(2x)$	$(2x, dx)$
$(\sin x)$	$(\cos x)$	$(\cos x, dx)$

Таблица составлена по правилам дифференцирования основных функций.

Формула линейного приближения функции

10

2. Линейная модель

Затем находят производную $f'(a)$ и записывают приближение $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$, которое заменяет кривую прямой.

1. Выбор точки

Сначала выбирают точку a , рядом с которой нужно изучить функцию, и определяют её значение в этой точке.

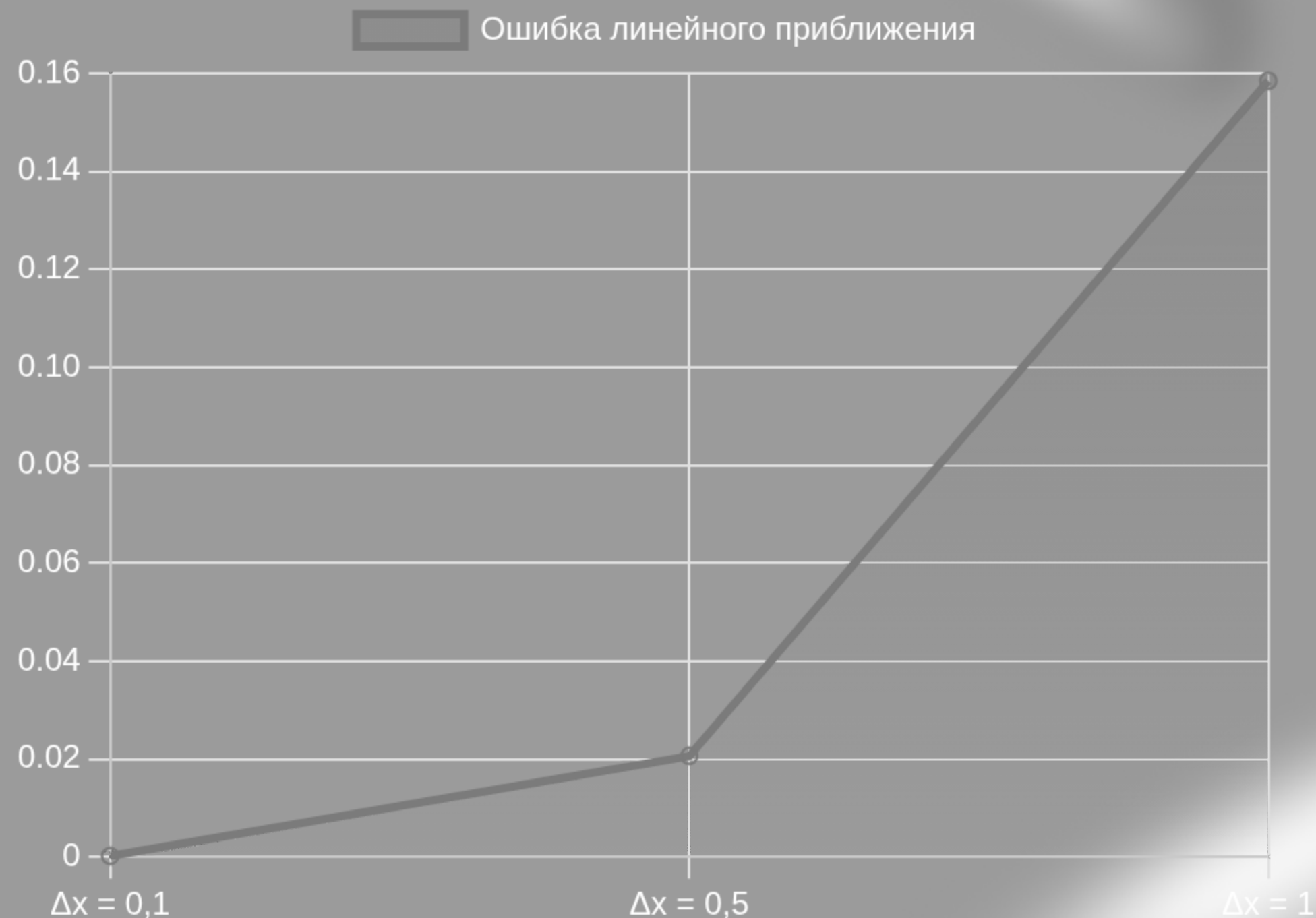
3. Проверка точности

После подстановки близкого значения сравнивают результат с точным вычислением и оценивают, насколько мала ошибка приближения.

Как меняется ошибка линейного приближения

11

- Для функции $f(x)=\sin x$ около нуля сравнивается отклонение от касательной при разных шагах. Видно, что малые изменения аргумента дают почти незаметную погрешность.
- Чем больше $|\Delta x|$, тем быстрее растёт ошибка; линейная модель надёжна только вблизи точки разложения.



Вычисления по значениям $\sin 0,1$, $\sin 0,5$, $\sin 1$ и формуле $y \approx x$ около (0) .

Пример вычисления: приближённый корень

Шаг 1: точка разложения

Берём функцию $f(x) = \sqrt{x}$ и точку $a=9$. В ней значение функции равно 3, а производная $f'(9) = \frac{1}{6}$, значит локальная линейная модель уже известна.

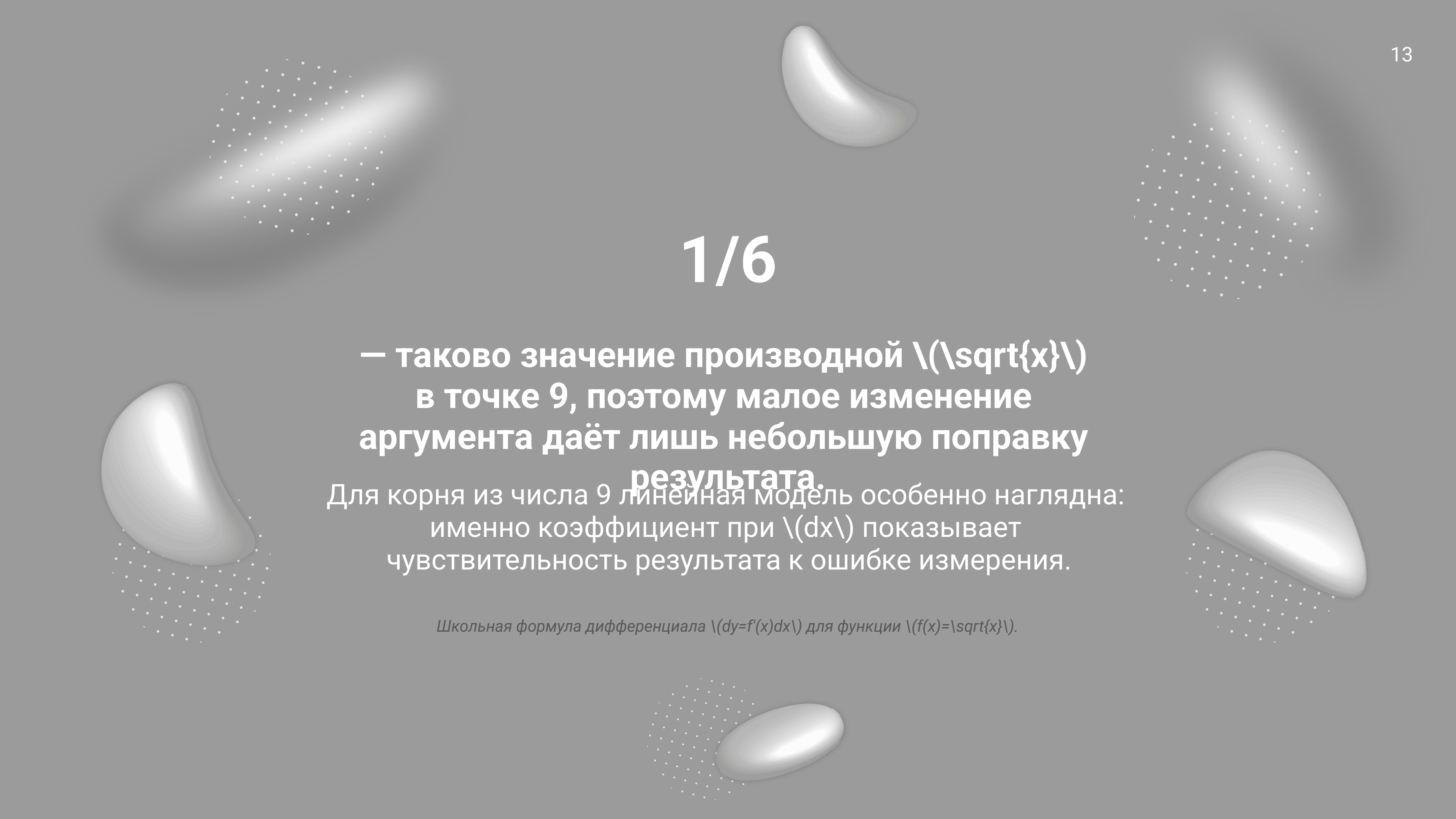
Шаг 2: подстановка приращения

Для числа $(9, 16)$ имеем $(\Delta x = 0, 16)$. Тогда линейное приближение записывается как $\sqrt{9 + \Delta x} \approx 3 + \frac{\Delta x}{6}$, что удобно для устного счёта.

Шаг 3: проверка точности

Получаем $(3 + \frac{0,16}{6})^6 = 3,0267$. Точное значение почти совпадает с ним, поэтому пример показывает, что метод особенно эффективен при небольшом отклонении от выбранной точки.





1/6

— таково значение производной $\sqrt{x}$ в точке 9, поэтому малое изменение аргумента даёт лишь небольшую поправку результата.

Для корня из числа 9 линейная модель особенно наглядна: именно коэффициент при dx показывает чувствительность результата к ошибке измерения.

Школьная формула дифференциала $dy=f'(x)dx$ для функции $f(x)=\sqrt{x}$.

Алгоритм использования дифференциала в задачах

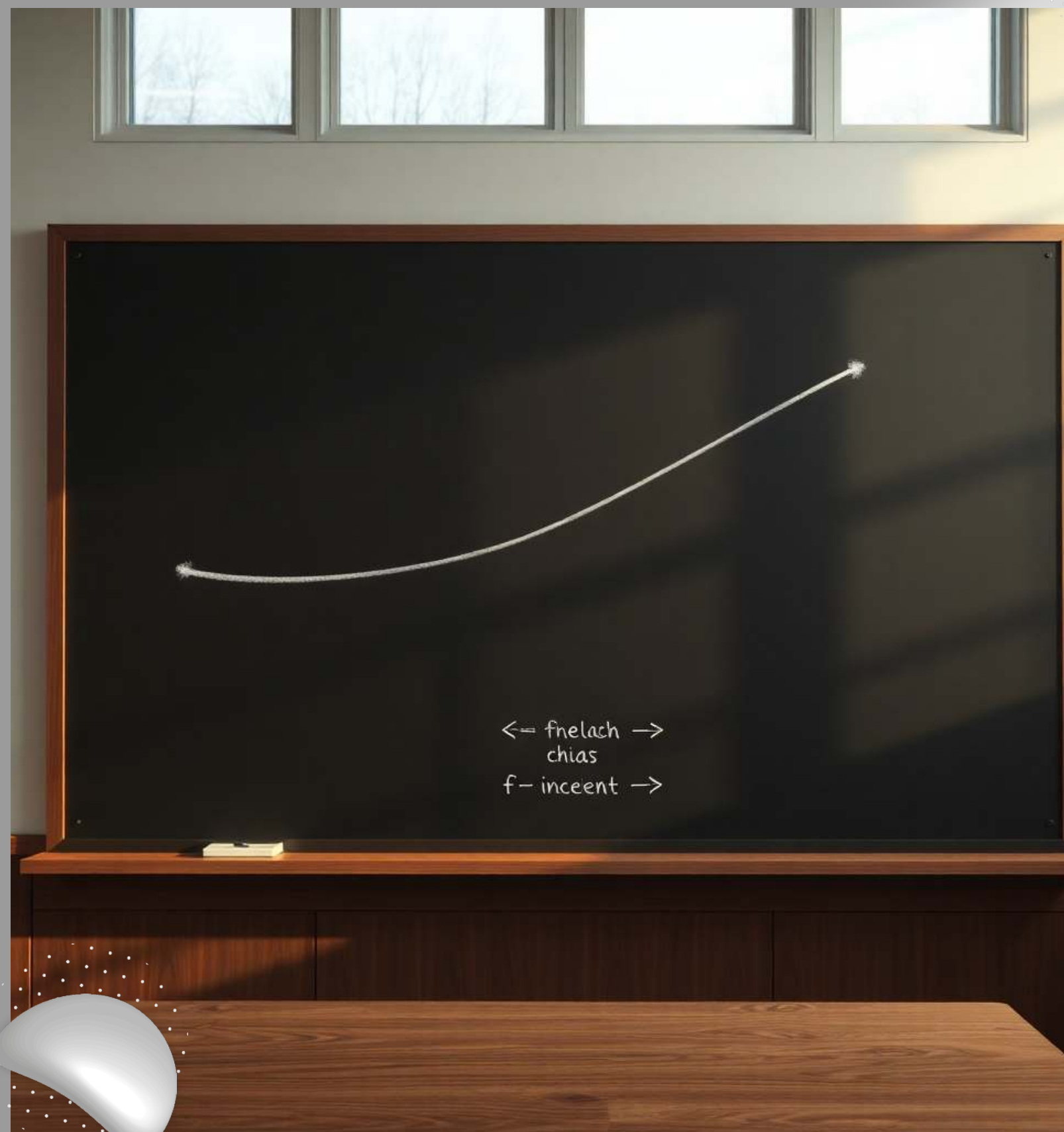
Последовательность от выбора функции до оценки погрешности результата

Точное значение и приближение в нескольких примерах

● Сравнение показывает, насколько близко линейная модель воспроизводит значение функции при малом изменении аргумента.

● Во всех примерах ошибка мала, а наилучшая точность достигается при особенно небольшом изменении аргумента.

Функция	Точное	Прибл.	Ошибка
$\sqrt[9]{16}$	3,026549	3,026667	0,000118
$\ln(1,05)$	0,048790	0,050000	0,001210
$e^{0,1}$	1,105171	1,100000	0,005171
$\cos 0,1$	0,995004	1,000000	0,004996



Связь производной, касательной и дифференциала

Производная задаёт наклон

Производная в точке показывает, насколько круто возрастает или убывает функция. Именно она определяет угол касательной и задаёт направление локального изменения графика.

Касательная как модель

Касательная заменяет кривую прямой вблизи выбранной точки. На коротком участке график и прямая почти совпадают, поэтому геометрическая картина становится очень наглядной.

Дифференциал как формула

Дифференциал переводит геометрию в вычисление: $(dy=f'(x)dx)$. Он описывает линейную часть приращения и позволяет быстро оценить новое значение функции без полного пересчёта.

Единый смысл

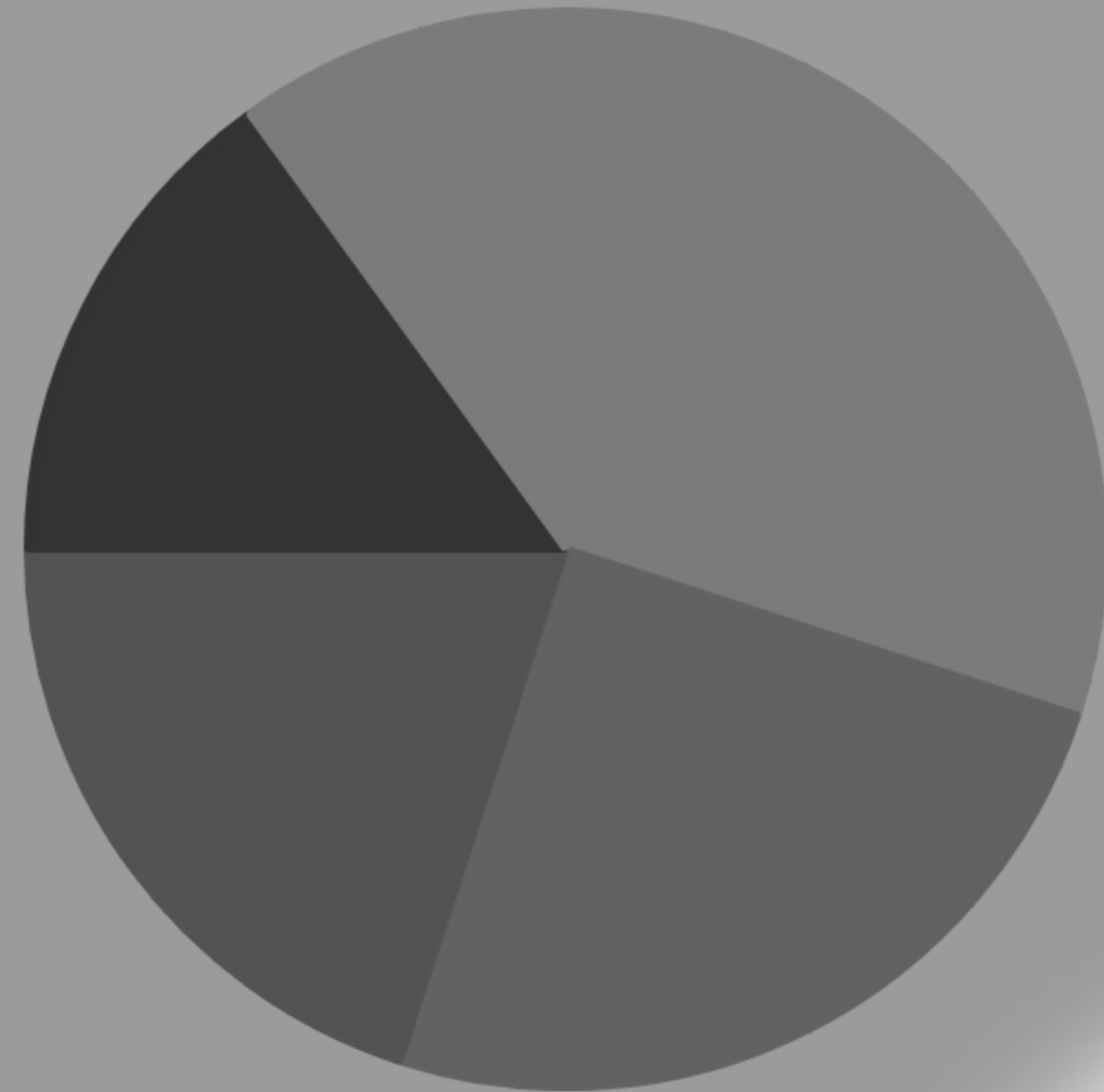
Эти три понятия не изолированы друг от друга: производная, касательная и дифференциал выражают одно локальное свойство функции, только разными языками — геометрическим и аналитическим.

Где применяется линейное приближение

17

- Метод особенно полезен там, где важна быстрая оценка результата без сложных вычислений: от лабораторных измерений до прикладных моделей в технике и экономике.
- Линейное приближение служит универсальным инструментом для быстрых оценок в науке и практике, когда точность нужна, но полный расчёт слишком громоздок.

■ Физика и механика ■ Погрешности измерений ■ Экономика
■ Инженерные расчёты ■ Обработка данных



Обобщение типичных школьных и прикладных областей применения линейного приближения.

Ограничения метода линейного приближения



Большой шаг

Если изменение аргумента заметно, график уже не похож на касательную. Тогда линейная модель начинает искажать результат, а ошибка растёт быстрее, чем при малых приращениях.



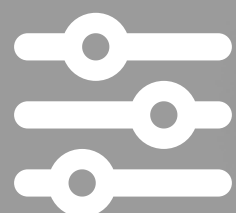
Разрыв функции

В точках разрыва нельзя опереться на локальную прямую, потому что рядом с таким местом поведение функции не описывается одной гладкой зависимостью.



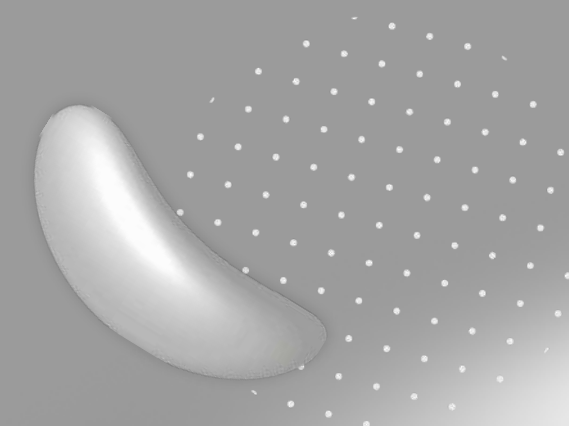
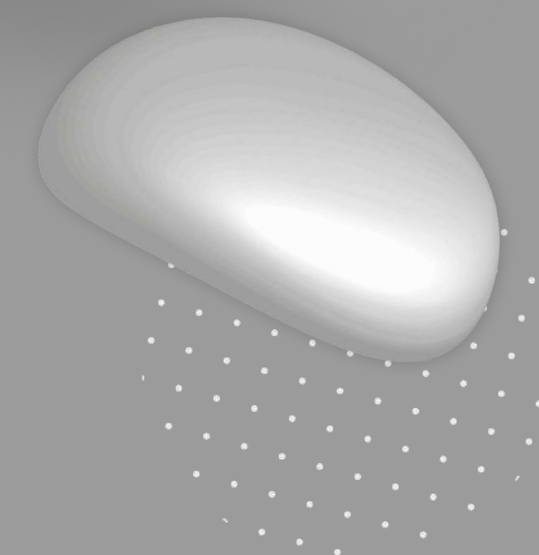
Нет производной

Если производная не существует, линейная часть не выделяется. Это бывает в точках излома, острых углах и некоторых специальных функциях с нерегулярным поведением.



Сложная форма графика

Для функций с резкими изгибами или быстрыми колебаниями обычно нужны более точные методы. Чем хуже гладкость, тем осторожнее следует использовать приближение.



Практический смысл в науке и технике



Измерение без лишних вычислений

В лаборатории не всегда нужно пересчитывать формулу заново после каждого уточнения результата. Небольшую поправку к длине, времени или температуре удобно оценить через дифференциал и сразу понять, насколько изменится итог.



Техника и проектирование

При расчётах размеров деталей важно знать, как повлияет минимальная погрешность исходных данных. Линейное приближение помогает инженеру быстро оценить допуск и решить, достаточно ли точен выбранный параметр.



Модели в экономике и данных

Когда зависимость описывает спрос, курс или численный показатель, полная модель может быть слишком сложной для мгновенной оценки. Тогда локальная линейная замена даёт практичный ориентир и помогает принять решение быстрее.

Линейное приближение: от идеи к вычислению

Линейное приближение показывает, как производная превращает сложную функцию в удобную локальную модель. Этот приём помогает считать быстрее, оценивать погрешности и понимать поведение графика возле выбранной точки.