



Погрешность суммы, разности, произведения и частного

Как оценить точность результата?



Зачем в алгебре нужны приближённые числа

В задачах часто работают не с точными, а с измеренными числами. У каждого измерения есть предел точности, а ошибки исходных данных могут перейти в ответ и изменить его.

2

способа оценки точности результата используют
в вычислениях.

Абсолютная погрешность показывает величину
возможного отклонения, а относительная — его
долю от самого числа.

Школьный курс алгебры, тема «Погрешности измерений
и вычислений»

Примеры точности измерений в школьных задачах

Линейка

Длина парты 120,0 см записана с учётом цены деления линейки 0,1 см. Такая запись показывает, что измерение достаточно точное для школьной задачи.

Секундомер

Время 8,3 с с точностью 0,1 с подходит для опытов и соревнований. Чем меньше само число, тем заметнее одна и та же ошибка.

Практический вывод

В школьных задачах важно не только вычислить ответ, но и понять, насколько он надёжен. Для этого сравнивают точность исходных данных и итоговой записи.

Весы

Масса яблока 152 г при точности весов до 1 г выглядит очень надёжно. Но даже здесь остаётся небольшая абсолютная погрешность измерения.

Сравнение величин

Одна и та же абсолютная погрешность по-разному влияет на ответ для больших и маленьких чисел. Поэтому иногда важнее не число ошибки, а её процент.

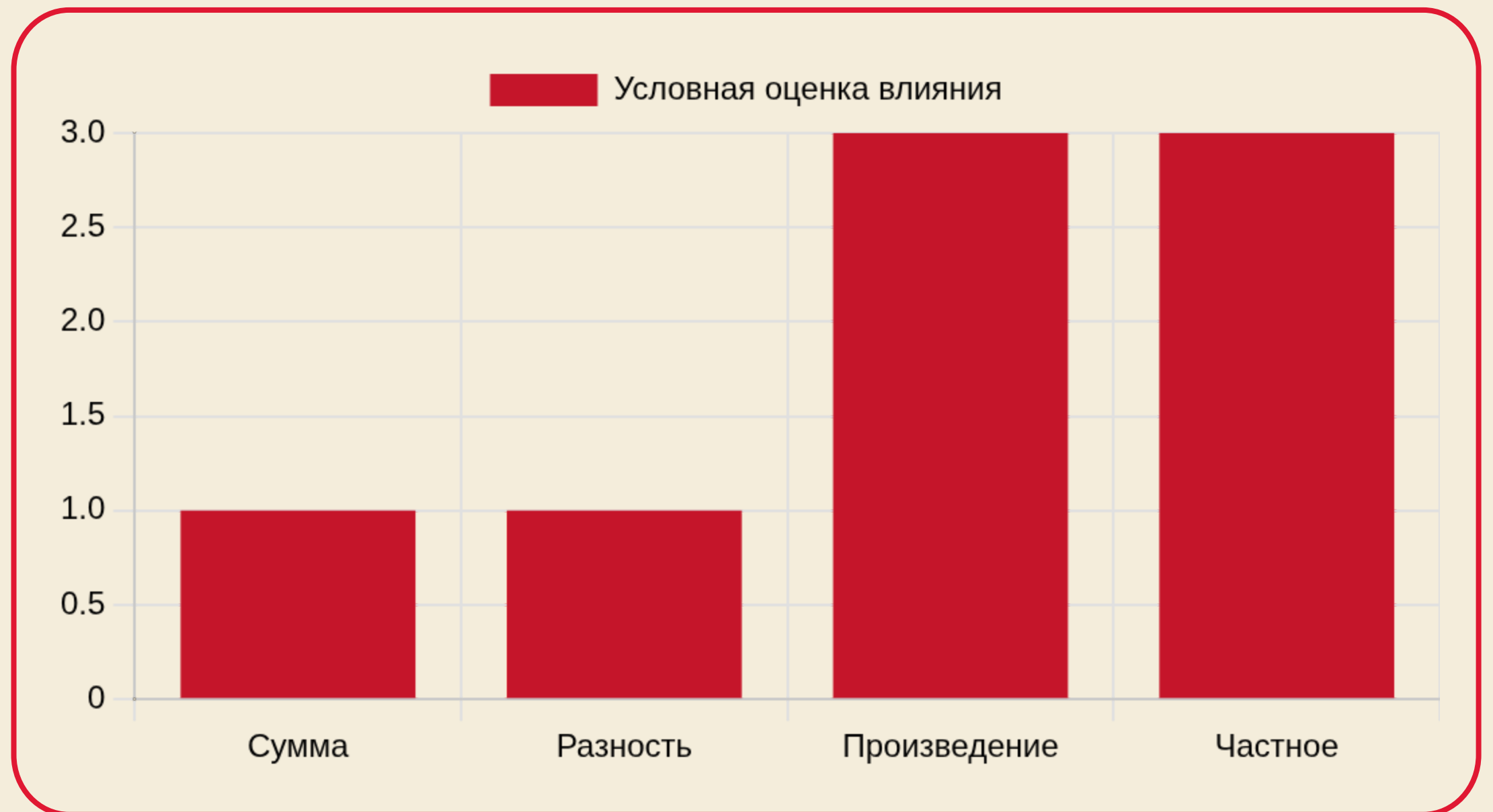


Как по-разному меняется точность при четырёх действиях

Диаграмма показывает лишь правило сравнения: для сложения и вычитания важнее абсолютная погрешность, а для умножения и деления — относительная.

Умножение и деление обычно сильнее влияют на точность результата, чем сложение и вычитание.

Условная шкала по школьным правилам оценки погрешности



Правило для суммы

01

Запись исходных данных

Если числа заданы как $a \pm \Delta a$ и $b \pm \Delta b$, то сначала важно понять, какая часть записи показывает сам результат, а какая — возможную ошибку измерения.

02

Сложение погрешностей

Для суммы $a+b$ абсолютные погрешности складываются: $\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b$. Каждая исходная ошибка полностью входит в итог, поэтому точность не возрастает.

03

Что помнить

При сложении длин, масс, стоимостей и других величин нельзя получить ответ точнее исходных данных. Для суммы смотрят именно на абсолютную, а не на относительную погрешность.

04

Практический смысл

Это правило помогает не завышать точность результата. Если оба слагаемых измерены грубо, итог тоже будет записан с той же осторожностью.

Правило для разности



То же правило

Для разности действует такое же правило, как для суммы: абсолютные погрешности тоже складываются. Ошибка каждого числа по величине влияет на ответ одинаково.



Почему так

При вычислении $a - b$ обе исходные неточности сохраняются в результате. Поэтому важно учитывать не только сами числа, но и то, насколько точно они измерены.



Близкие числа

Если вычитают почти равные величины, результат может оказаться маленьким. Тогда относительная погрешность становится большой, даже если абсолютная ошибка невелика.



Полезный вывод

Разность особенно чувствительна в задачах, где ищут небольшой остаток или разницу между похожими значениями. Здесь легко переоценить точность ответа.

Сравнение правил для суммы, разности, произведения и частного

Сравним, как оценивают погрешность для разных действий.

Для сложения и вычитания следят за абсолютной погрешностью, а для умножения и деления — за относительной.

Школьные правила оценки погрешности при вычислениях

Операция	Как считают	Что важно
Сумма	Абсолютные погрешности	Складываются
Разность	Абсолютные погрешности	Складываются
Произведение	Относительные погрешности	Складываются
Частное	Относительные погрешности	Складываются

Правило для произведения

01

Относительная ошибка

Если числа умножаются, то складывают их относительные погрешности. Это удобно, потому что точность результата в первую очередь сравнивают не по единицам, а по процентам.

02

Влияние каждого множителя

Даже небольшой процент ошибки одного множителя ухудшает точность всего произведения. Если один множитель измерен грубо, точный второй уже не спасает результат.

03

Переход к ответу

Сначала находят относительную погрешность произведения, а потом переводят её в абсолютную. Так получают запись результата в привычном виде с плюс-минус ошибкой.

04

Главная мысль

При умножении нельзя смотреть только на числа самих множителей. Нужно учитывать, насколько надёжно каждый из них измерен или округлён.

Правило для частного

— Складываются проценты

При делении относительные погрешности числителя и знаменателя тоже складываются. Поэтому даже небольшие ошибки могут заметно повлиять на окончательный ответ.

— Проверка ответа

После деления полезно спросить себя, выглядит ли результат разумно. Если ответ кажется слишком точным, возможно, его нужно округлить.

— Малый знаменатель

Если знаменатель маленький, его ошибка становится особенно заметной. В таком случае частное может измениться сильнее, чем ожидается.

— Практический вывод

В задачах на частное важно следить не только за вычислением, но и за точностью исходных данных. Иначе легко получить красивое, но неточное число.

Алгоритм оценки погрешности при вычислениях

Школьный алгоритм выбора правила по виду действия и записи ответа с учётом точности исходных данных.



0,2

— абсолютная погрешность и суммы, и разности в этом примере.

Одна и та же ошибка исходных данных сохраняется в обоих ответах, поэтому точность не возрастает.

Школьное правило оценки погрешности при сложении и вычитании

Пример вычисления произведения

01

Исходные данные

Даны числа $5,0 \pm 0,1$ и $3,0 \pm 0,1$. Сначала удобно найти их относительные погрешности, потому что для произведения именно они показывают, насколько надёжен итог.

02

Оценка точности

Для первого множителя погрешность составляет 2%, а для второго — примерно 3,3%. Эти проценты складываются, поэтому общая относительная погрешность результата становится заметнее.

03

Результат вычисления

Произведение равно 15,0. Если к нему применить найденную относительную погрешность, получится абсолютная ошибка около 0,8. Значит, запись ответа должна отражать именно эту точность.

04

Итоговая запись

Правильная форма ответа: $15,0 \pm 0,8$. Пример показывает, что при умножении важнее смотреть не на отдельные числа, а на их вклад в процент ошибки.

Пример вычисления частного



Частное без потери смысла

Делим $24,0 \pm 0,2$ на $6,0 \pm 0,1$ и получаем 4,0. Но сам результат ещё не завершён: нужно оценить, насколько надёжно он определён исходными данными.



Относительные ошибки

Погрешность числителя составляет около 0,8%, а знаменателя — примерно 1,7%. При делении эти доли складываются, поэтому общая относительная ошибка становится около 2,5%.



Абсолютная оценка

Для частного 4,0 такая относительная погрешность даёт абсолютную ошибку около 0,1. Это означает, что ответ нельзя записывать с излишней точностью.



Вывод по примеру

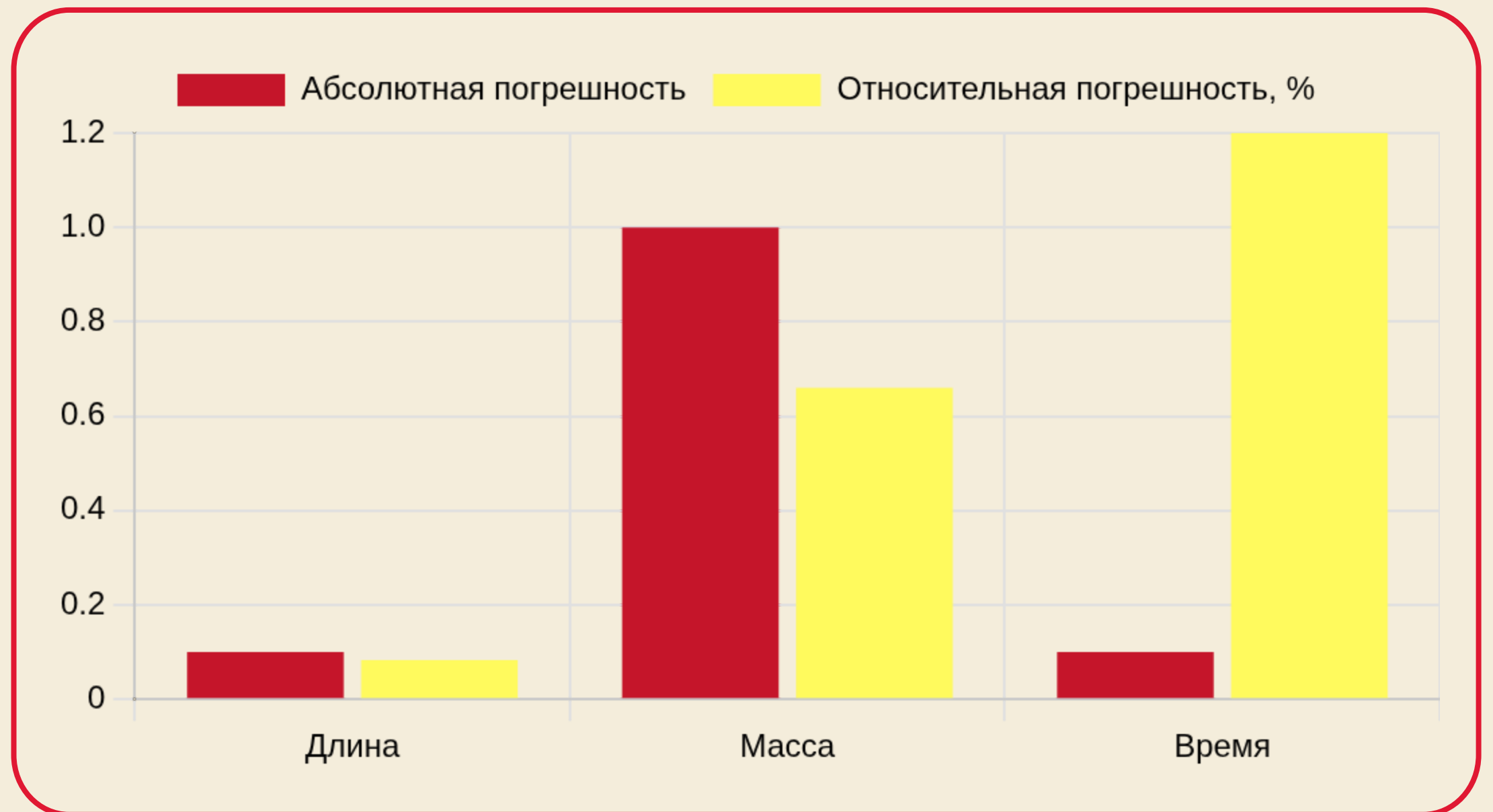
Итоговая запись: $4,0 \pm 0,1$. Пример показывает, что даже небольшая ошибка знаменателя может заметно изменить качество ответа, особенно если знаменатель невелик.

Абсолютная и относительная погрешность на разных примерах

Для всех трёх измерений абсолютная ошибка невелика, но её значение по-разному влияет на точность в зависимости от величины самой измеряемой величины.

Сравнение показывает: одинаковая абсолютная погрешность не означает одинаковую точность. Для маленьких чисел относительная ошибка обычно заметнее.

Учебные примеры измерений; значения приведены для иллюстрации способа оценки



Как округляют ответ после вычислений

Точность задаёт предел

Результат записывают не точнее, чем позволяют исходные данные. Если измерение выполнено с погрешностью, лишние знаки после запятой не добавляют новой информации.

Не путать с калькулятором

Калькулятор может показать много цифр, но это не значит, что все они надёжны. Важно отделять вычисление от окончательной записи результата.

Округление по смыслу

Когда ошибка велика, лучше оставить меньше знаков. Например, при погрешности 0,5 запись 18,732 выглядит чрезмерно точной и не соответствует смыслу измерения.

Ответ должен быть разумным

В некоторых задачах уместно 18,7, а в других — 19. Выбор зависит от контекста и от того, как именно задана точность исходных величин.



Типичные ошибки при работе с погрешностями

Таблица помогает быстро увидеть, какие ошибки чаще всего встречаются и как исправить запись результата.

Главная причина ошибок — невнимание к виду действия и к точности исходных данных. Правильная запись всегда должна соответствовать реальной надёжности измерения.

Школьный курс алгебры; правила округления и оценки погрешности

Ошибка	Почему неверно	Как правильно
Складывают только числа	Игнорируют погрешности	Учитывают ошибки тоже
Путают виды погрешности	Неверная оценка точности	Различают абсолютную и относительную
Оставляют лишние цифры	Точность завышена	Округляют по данным
Не смотрят на знаменатель	Ошибка может вырасти	Проверяют частное
Пишут слишком точно	Данные этого не дают	Снижают число знаков

Как выбрать правило по виду действия

Схема выбора правила оценки погрешности в зависимости от того, какое действие выполняется в выражении.

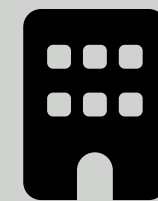


Где используются правила оценки погрешности



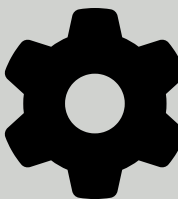
Лабораторные работы

В физике и химии погрешность учитывают при измерении длины, массы, температуры, времени и скорости. Это помогает правильно оформлять результаты опытов и сравнивать их между собой.



Строительство

При расчётах размеров важно, чтобы детали совпадали без зазоров и перекосов. Ошибка в измерении может испортить всю конструкцию, поэтому точность здесь особенно важна.



Техника и механизмы

В машинах и приборах даже небольшое отклонение может повлиять на работу узла. Поэтому инженеры проверяют точность вычислений и следят за допустимой погрешностью.



Спорт

В спорте время, расстояние и результаты попыток измеряют очень точно. Это нужно, чтобы честно сравнивать участников и не делать выводы по случайной ошибке.



Статистика

При обработке данных погрешность помогает понять, насколько надёжен вывод. Без этой оценки легко принять случайное отклонение за настоящую закономерность.

Итоги, которые стоит запомнить

Для сложения и вычитания складывают абсолютные погрешности, а для умножения и деления — относительные. Если соблюдать это правило и правильно округлять ответ, результат будет точным и разумным.