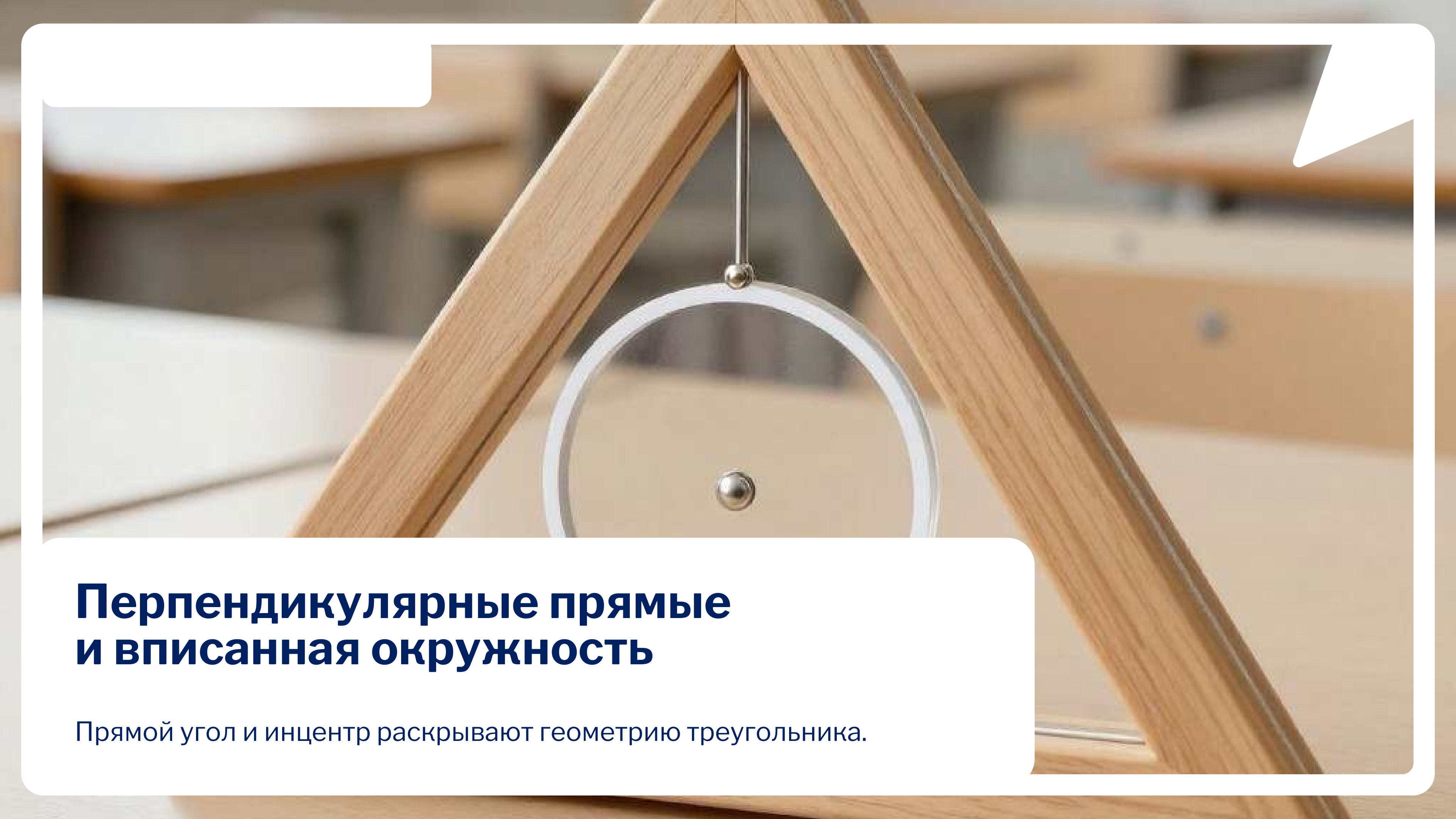


A close-up photograph of a wooden triangle. A thin metal rod is suspended from the top vertex of the triangle, with a circular metal disk hanging from it. The disk is positioned such that its center is at the intersection of the triangle's altitudes, demonstrating the concept of a circumscribed circle. The background is blurred, showing more of the wooden structure.

Перпендикулярные прямые и вписанная окружность

Прямой угол и инцентр раскрывают геометрию треугольника.

О чём этот урок

Сегодня мы свяжем прямой угол, перпендикуляр и вписанную окружность. На рисунках и в трёх примерах увидим, как работают касательная, биссектриса и инцентр.



Перпендикулярные прямые: определение

Что это значит

01

Перпендикулярные прямые пересекаются так, что образуют угол 90° . Это самый точный признак, по которому их легко распознать на чертеже или в задаче.

Как обозначают

02

Записывают так: $a \perp b$. Такое обозначение помогает коротко показать взаимное положение прямых без длинного описания и лишних слов.

Как отмечают

03

На рисунках прямой угол обычно помечают маленьким квадратиком. Этот знак сразу показывает, что угол между прямыми равен 90° .

Где встречается

04

Перпендикулярность используют при построении высот, измерении расстояния до прямой и решении задач на нахождение кратчайшего отрезка.

Как распознать перпендикулярность

Главный признак

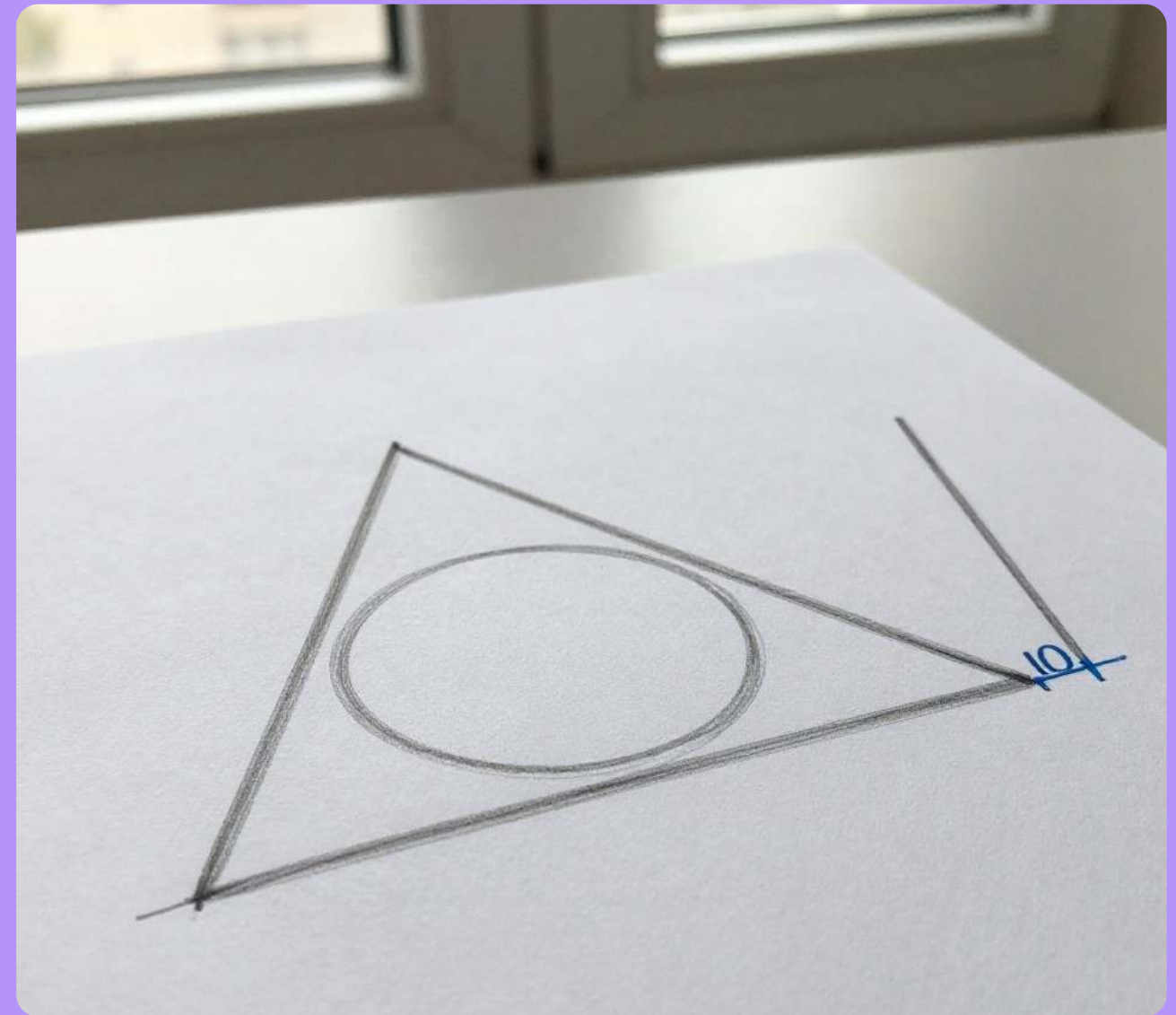
Если при пересечении двух прямых получается прямой угол, то прямые перпендикулярны. Это основной и самый надёжный признак.

Когда признака нет

Если угол между прямыми не равен 90° , перпендикулярности нет, даже если линии кажутся почти прямыми на глаз.

Проверка на рисунке

На чертеже удобно сравнивать несколько пар прямых, чтобы не перепутать настоящую перпендикулярность с просто острым или тупым углом.



Перпендикуляр из точки к прямой

01. Построение

Из точки, не лежащей на прямой, можно провести единственный перпендикуляр. Он пересекает прямую в специальной точке, называемой основанием перпендикуляра.

02. Что измеряют

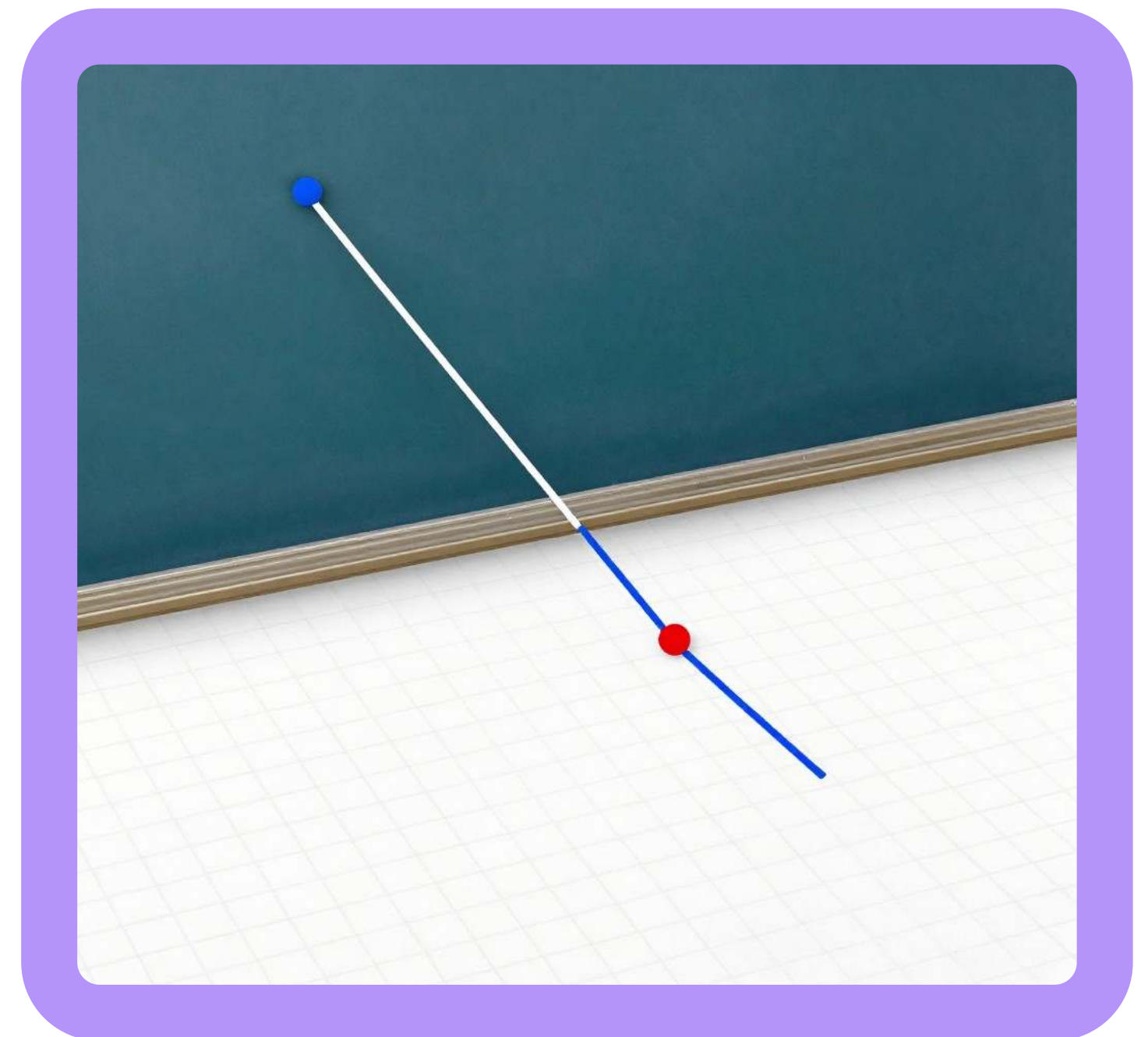
Отрезок от точки до основания перпендикуляра и есть перпендикуляр к прямой. Именно его длину обычно ищут в задачах.

03. Самый короткий путь

Любой наклонный отрезок от этой точки до прямой длиннее перпендикуляра. Значит, перпендикуляр даёт кратчайшее расстояние до линии.

04. Зачем это нужно

Это свойство помогает сравнивать отрезки без вычислений и объясняет, почему прямой угол важен в измерениях и чертежах.



Расстояние до прямой



На схеме видно, что расстояние измеряют по перпендикуляру, а не по наклонной линии.

Если точка лежит на прямой, расстояние равно нулю; чем выше столбец, тем длиннее перпендикуляр до линии.

Схематический пример по теме урока

Серединный перпендикуляр

Два признака

Серединный перпендикуляр проходит через середину отрезка и образует с ним прямой угол. Эти два условия выполняются одновременно и делают его особой линией.

Обратное утверждение

Если точка равноудалена от концов отрезка, она обязательно лежит на серединном перпендикуляре. Так работает признак в обе стороны.

Равные расстояния

Каждая точка на серединном перпендикуляре одинаково удалена от концов отрезка. Это удобно проверять по равным перпендикулярным расстояниям.

Связь с окружностью

Позже эта идея поможет понять, почему центр окружности и инцентр связаны с равными расстояниями, а не с наклонными отрезками.

Что значит «окружность вписана»

Положение окружности

Вписанная окружность находится внутри треугольника и касается каждой его стороны. Она не пересекает стороны, а лишь касается их в одной точке.

Точки касания

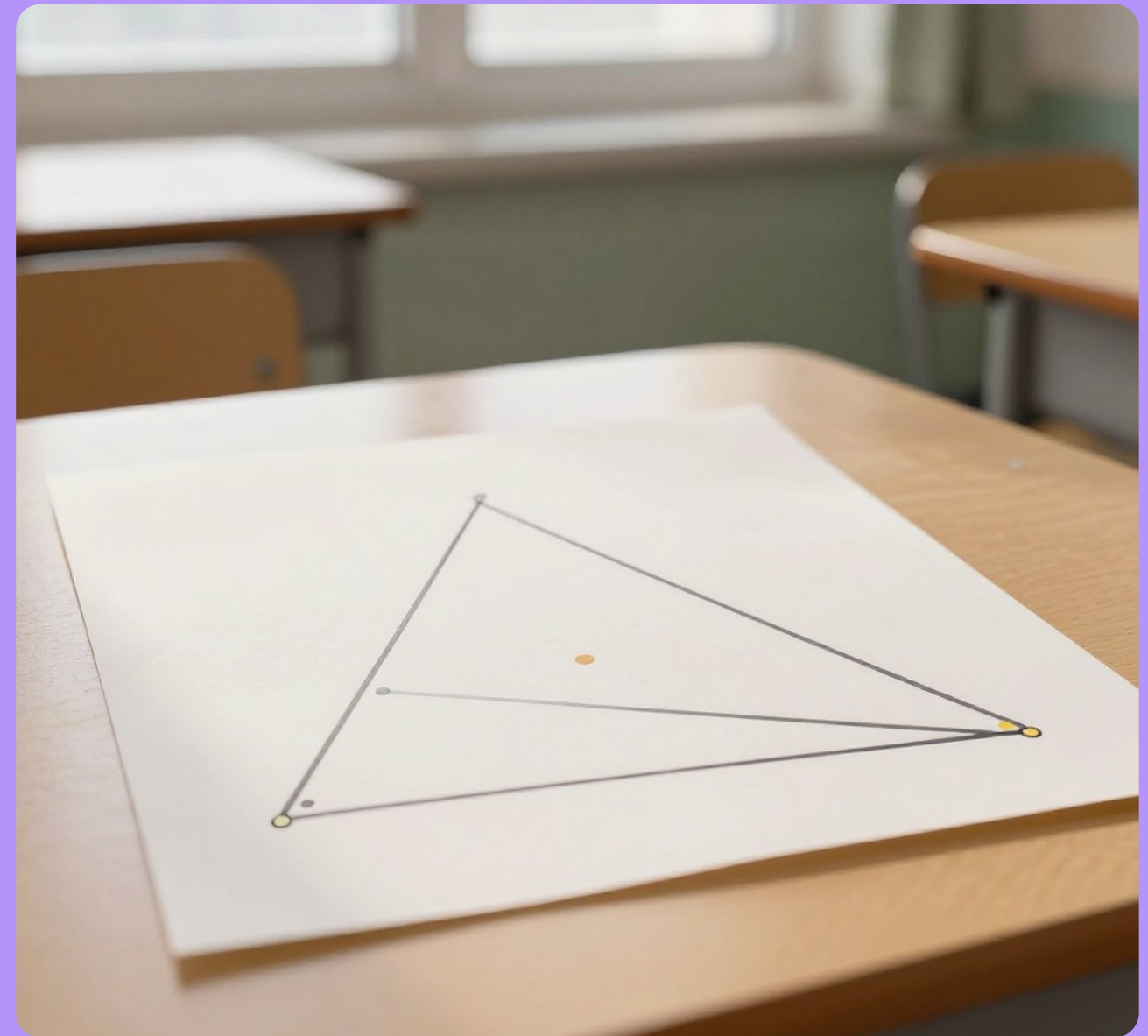
Точки касания лежат на трёх сторонах треугольника. Благодаря этому окружность как бы «встроена» в фигуру и точно повторяет её внутреннюю симметрию.

Центр окружности

Центр такой окружности называется инцентром. Он помогает найти радиус и объясняет, почему окружность касается всех сторон одинаково.

Общее расстояние

Если окружность касается всех трёх сторон, значит, расстояние от её центра до каждой стороны одно и то же.



Касательная и радиус

Касательная

01

Касательная касается окружности только в одной точке. В этой точке она не пересекает окружность, а лишь касается её края.



Радиус и угол

02

Радиус, проведённый в точку касания, всегда перпендикулярен касательной. Поэтому в точке касания сразу появляется прямой угол.

Связь с треугольником

03

Для треугольника это означает, что радиус к стороне в точке касания образует с этой стороной угол 90° и помогает строить окружность точно.

Равенство отрезков касательных

Равные касательные от одной вершины помогают быстро находить неизвестные длины.

У каждой вершины длины касательных к окружности совпадают, поэтому неизвестные отрезки удобно выражать через равные пары.

Вершина	Отрезки
А	6 см и 6 см
В	4 см и 4 см
С	? и?

* Схематический пример по теме урока

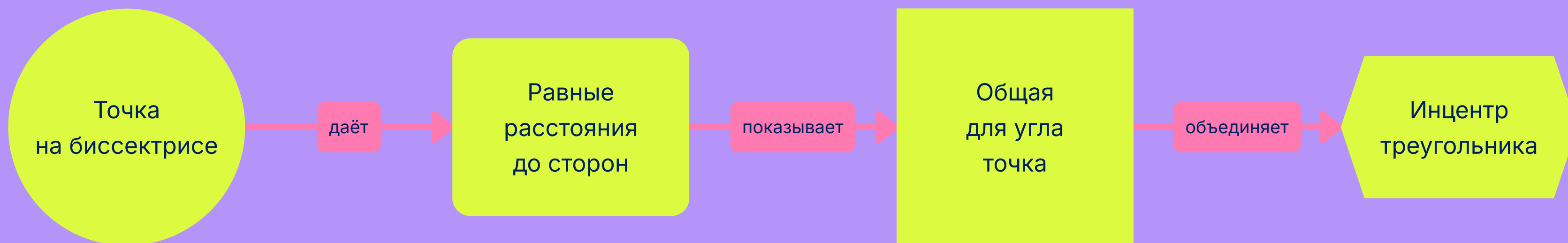
У треугольника всегда три стороны, и инцентр одинаково удалён от каждой из них. Именно это делает его центром вписанной окружности и помогает строить круг без лишних измерений.

3

стороны треугольника имеют одинаковое расстояние от инцентра.

Почему инцентр лежит на биссектрисах

Основано на свойстве биссектрисы: каждая точка на ней равноудалена от сторон угла.



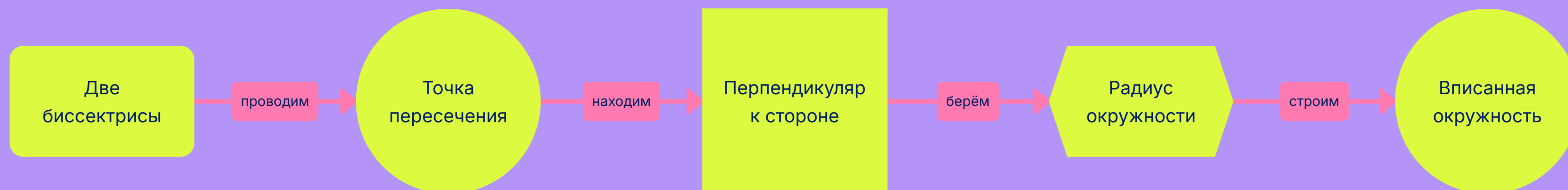
У треугольника одна общая точка пересечения трёх биссектрис. Она фиксирует центр вписанной окружности и показывает, что решение всегда единственно.

3

биссектрисы сходятся в одной внутренней точке.

Как построить вписанную окружность

Пошаговое построение по свойствам биссектрисы и перпендикуляра к стороне.



Одинаковое расстояние до сторон

Сторона	Перпендикуляр	Результат
AB	равен	r
BC	равен	r
CA	равен	r

Сравнение показывает, что от инцентра до каждой стороны получается одна и та же длина. Она и задаёт радиус вписанной окружности.

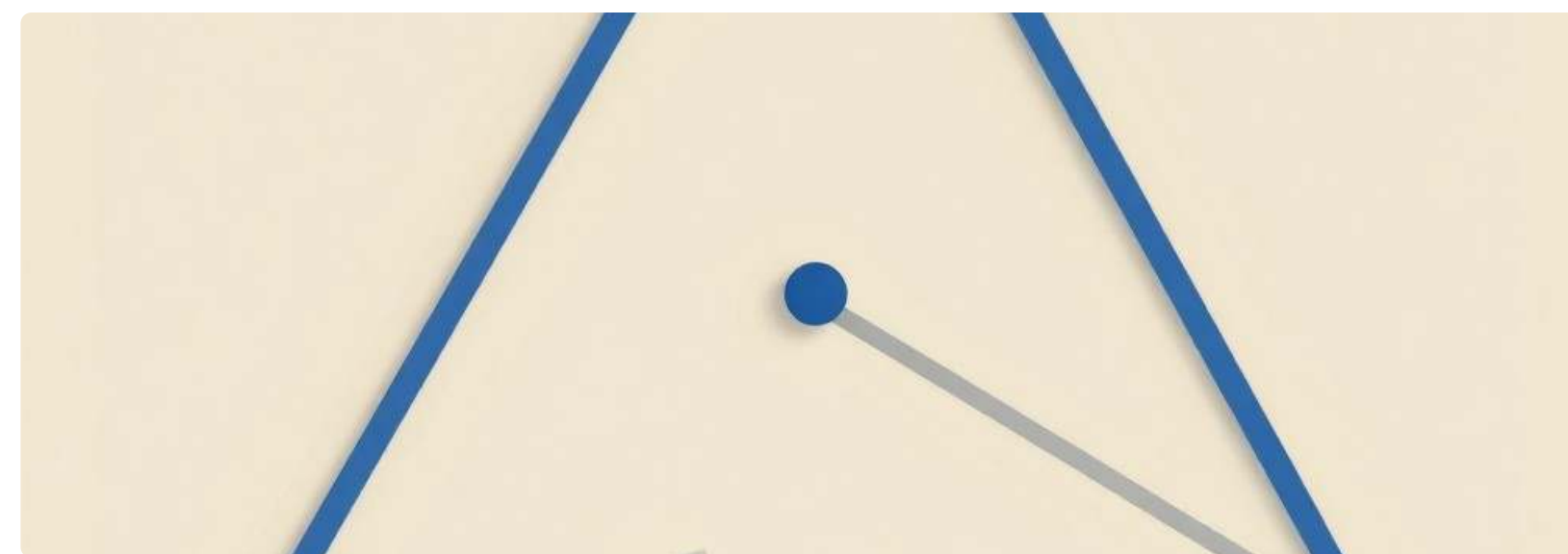
Все три расстояния от инцентра до сторон равны, поэтому одна и та же длина служит радиусом окружности.

Свойство инцентра: равные расстояния до сторон треугольника

Пример 1: углы и инцентр

Попололам угла

Если биссектриса делит угол 70° пополам, то получаются два угла по 35° . Это помогает проверить, правильно ли проведена биссектриса на чертеже.



Точка О

Точка пересечения двух биссектрис обозначена буквой О. Она уже указывает на будущий инцентр, потому что лежит внутри треугольника и одинаково удалена от сторон соответствующих углов.

Проверка совпадения

После построения третья биссектриса должна пройти через ту же точку. Если это происходит, рисунок подтверждает, что О — инцентр треугольника.

Пример 2: равные касательные

Отрезки из А

От вершины А проведены два отрезка к точкам касания по 6 см. Значит, они равны, а вершина А действительно связана с одной окружностью касания.

Отрезки из В

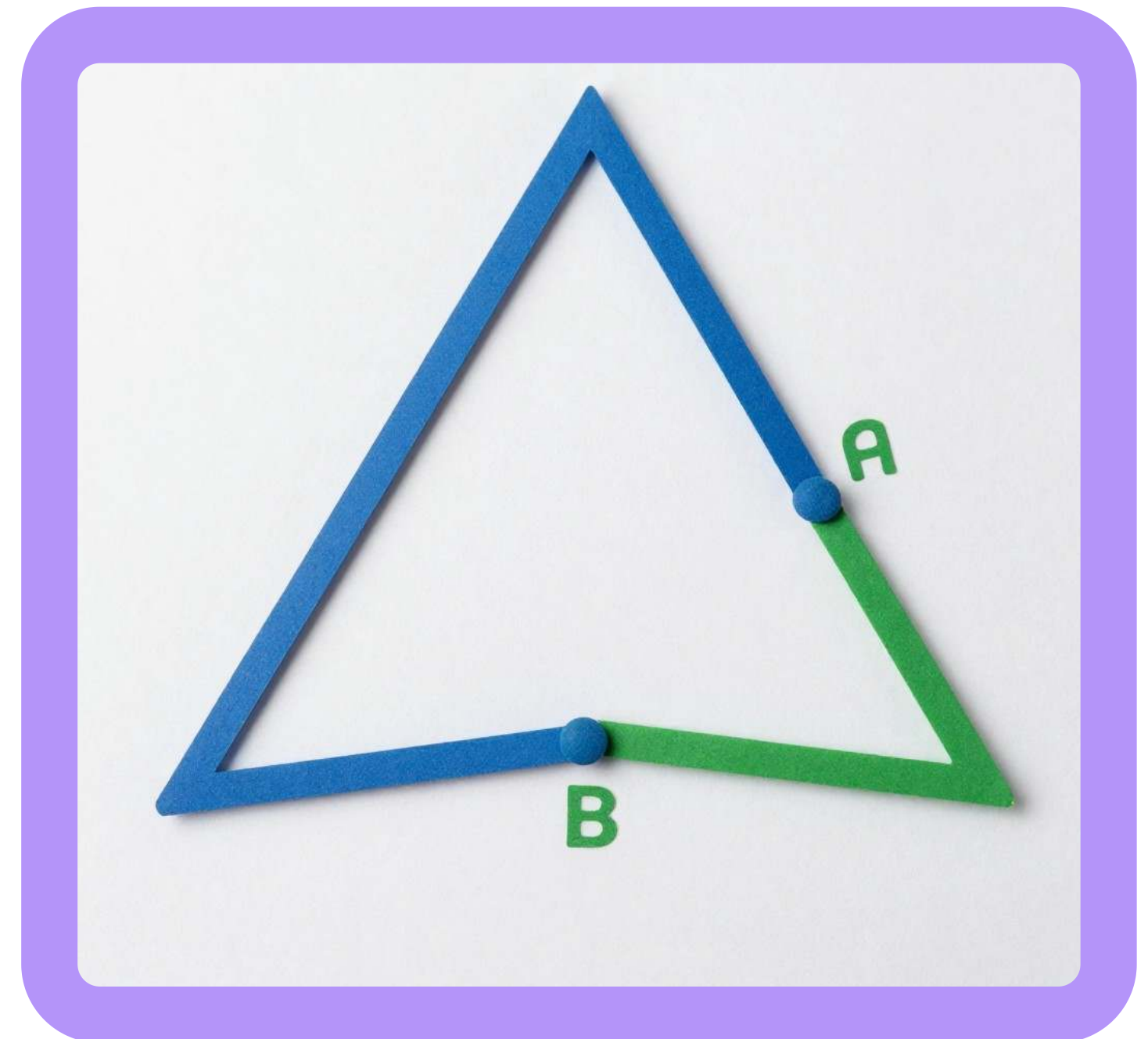
Для вершины В показаны отрезки по 4 см. Равенство внутри одной вершины подтверждает свойство касательных и помогает быстро проверять чертёж без дополнительных вычислений.

Сумма частей

Если сложить равные части на сторонах, можно найти длины нужных отрезков треугольника. Это удобный способ решать задачи по рисунку и находить неизвестные элементы.

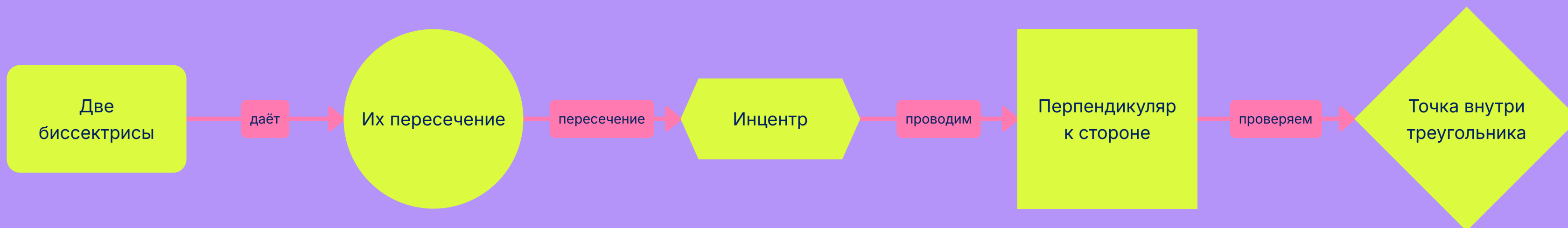
Практический вывод

Такой приём особенно полезен в задачах на вписанную окружность: достаточно заметить равные касательные, чтобы восстановить недостающие длины и проверить построение.



Пример 3: построение и проверка

Алгоритм проверки строится на пересечении биссектрис и перпендикуляре к стороне.



Тренировочные задания

02. 2. Инцентр на схеме

Найди точку пересечения биссектрис и выбери инцентр среди отмеченных точек. Проверь, находится ли он внутри треугольника, а не на его стороне.

04. 4. Расстояние до стороны

Определи расстояние от точки до стороны как длину перпендикуляра. Помни: если точка лежит на прямой, расстояние равно нулю.

01. 1. Перпендикулярные прямые

Посмотри на рисунок и отметь пары прямых, которые образуют угол 90° . Затем объясни, почему они перпендикулярны, используя знак прямого угла.

03. 3. Равные касательные

Сопоставь каждую вершину с двумя равными отрезками касательных. Сравни длины и убедись, что от одной вершины они всегда одинаковы.

05. 5. Точка касания

Отметь точку касания по радиусу: он должен быть перпендикулярен стороне в месте касания. Это главный признак правильного построения окружности.

Геометрия, которая работает вместе

Мы увидели, что перпендикуляр задаёт кратчайшее расстояние до прямой, а вписанная окружность связана с биссектрисами, касательными и равными отрезками. Теперь можно уверенно строить и проверять такие рисунки.