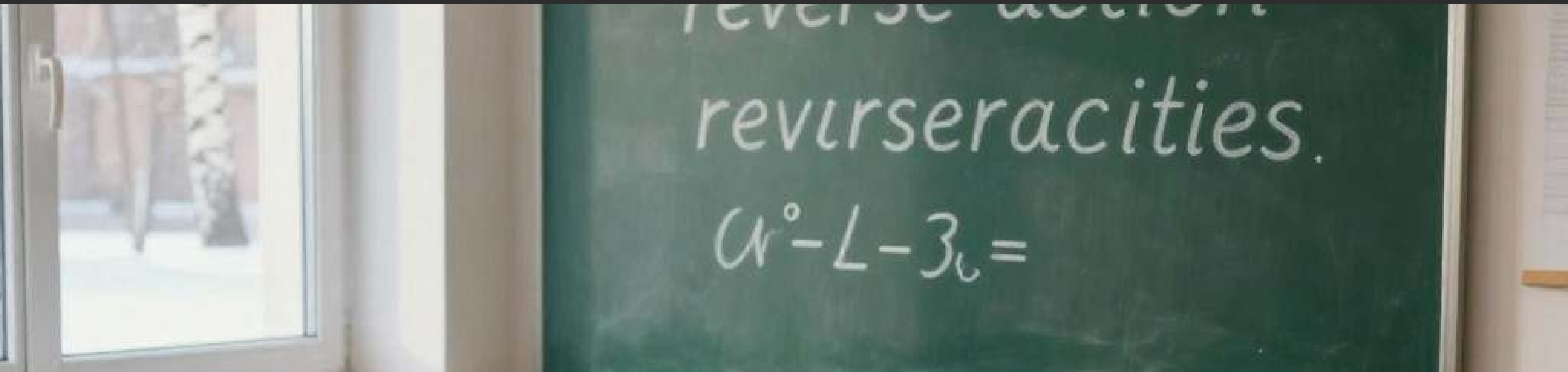


Правила нахождения первообразных

Первообразная описывает «обратное действие» производной и открывает путь к вычислению площадей по смыслу.



Зачем школьнику нужны первообразные

Первообразные связывают производные с накопленными величинами: скоростью и пройденным путём, потоком и «суммарным эффектом». В 10–11 классе это опора для интегральных задач и осмысленных преобразований функций.



База: что именно мы ищем



Определение первообразной

Первообразная функции $f(x)$ — это функция $F(x)$, для которой $F'(x)=f(x)$. Ищут не «одно число», а семейство функций, отличающихся на постоянную.

$$x^1$$

Правило степеней

Для $n \neq -1$ выполняется формула $\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1) + C$. Она работает как главный шаблон и превращает интегрирование степенной функции в алгебру.



Линейность интеграла

Первообразная для суммы находится по частям: $\int (f+g)dx = \int f dx + \int g dx$, а для умножения на число: $\int k \cdot f dx = k \int f dx$. Это ускоряет вычисления.



Константа C

Постоянная C появляется почти всегда: производная C равна нулю, поэтому она «не видна» в $f(x)$. В задачах требуется общее выражение с C .

$$\sqrt{x}$$

Метод разложения выражения

Перед применением правил обычно приводят выражение к удобному виду: выносят множители, раскладывают разность степеней, приводят к сумме стандартных слагаемых.

Ключевые правила интегрирования

Таблица фиксирует типовые формулы для первообразных и показывает, когда они применимы.

Большая часть задач сводится к распознаванию «стандарта» и применению 2–3 правил подряд: степени/логарифм, экспонента, тригонометрия, затем линейность.

Тип функции	Первообразная	Условие/замечание
$f(x)=x^n$	$x^{n+1}/(n+1)+C$	$n \neq -1$
$f(x)=1/x$	$\ln x +C$	$x \neq 0$
$f(x)=e^x$ или a^x	e^x+C ; $a^x/\ln a +C$	$a>0, a \neq 1$
$f(x)=\cos x, \sin x$	$\sin x+C$; $-\cos x+C$	—
$f(x)=k \cdot f(x)$	$k \cdot \int f(x) dx$	k — константа
$f(x)=f+g$	$\int f dx + \int g dx$	линейность

Учебные формулы по теме «неопределённый интеграл и первообразные», школьный курс алгебры и начал анализа.

Как действовать, чтобы не ошибаться

1) Приведите выражение к стандартному виду: вынесите константы, разложите сумму, выделите степени и множители. Часто сложность исчезает после аккуратных преобразований.

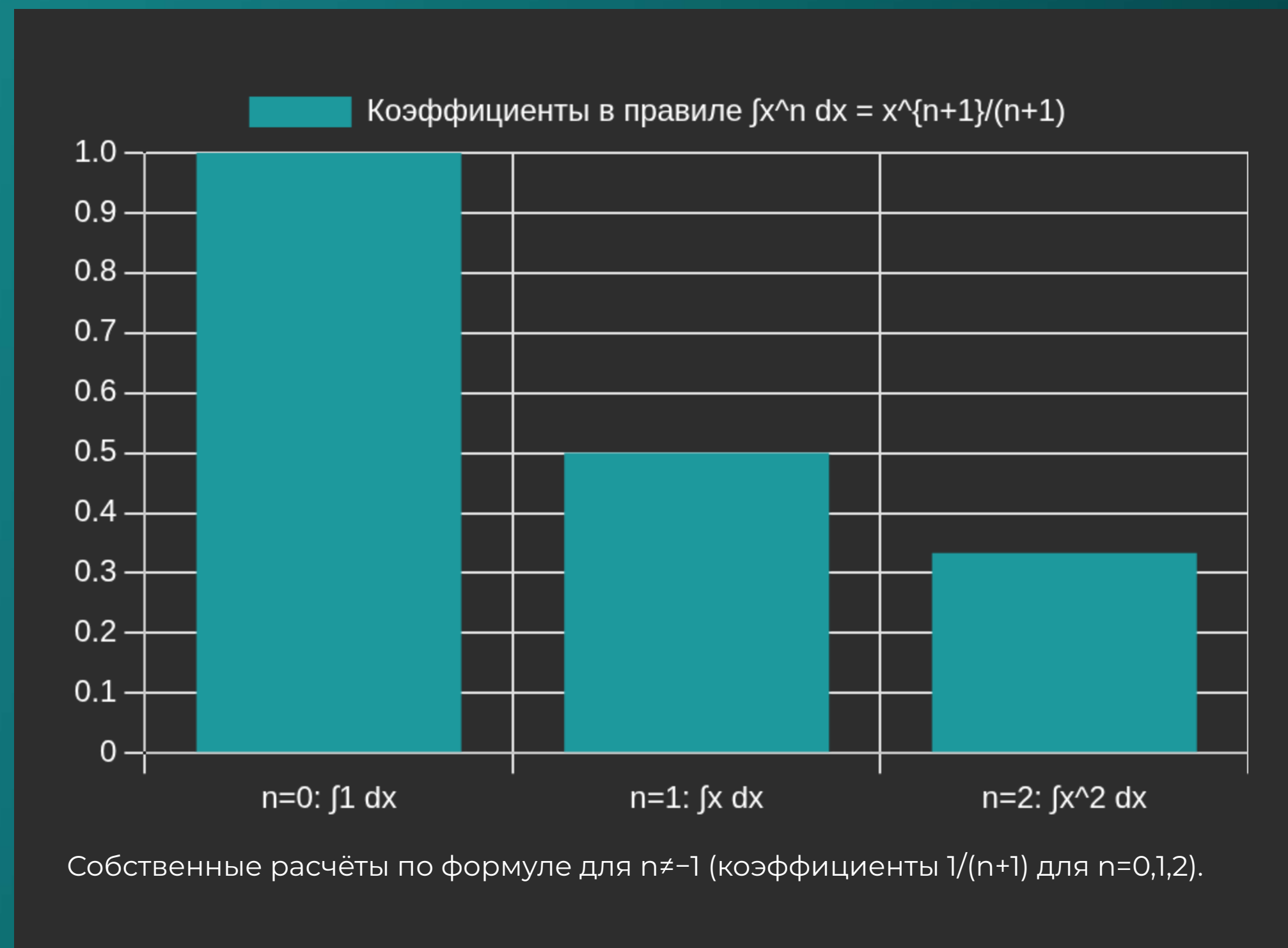
2) Сразу применяйте подходящее правило: для x^n используйте степень (кроме $n=-1$), для $1/x$ — логарифм, для e^x и a^x — экспоненциальные формулы. Для тригонометрии — пары $\sin/\cos$.

3) Добавляйте «+C» и обязательно выполните проверку: производная найденной первообразной должна вернуть исходную функцию. Проверка — способ предотвратить пропуски коэффициентов.

Почему при степени появляется коэффициент

В правиле степеней новый показатель — $(n+1)$, а коэффициент становится $1/(n+1)$. Именно поэтому меняются числа перед степенью.

Чем больше n , тем меньше коэффициент $1/(n+1)$. Это помогает контролировать правдоподобность результата при вычислениях.



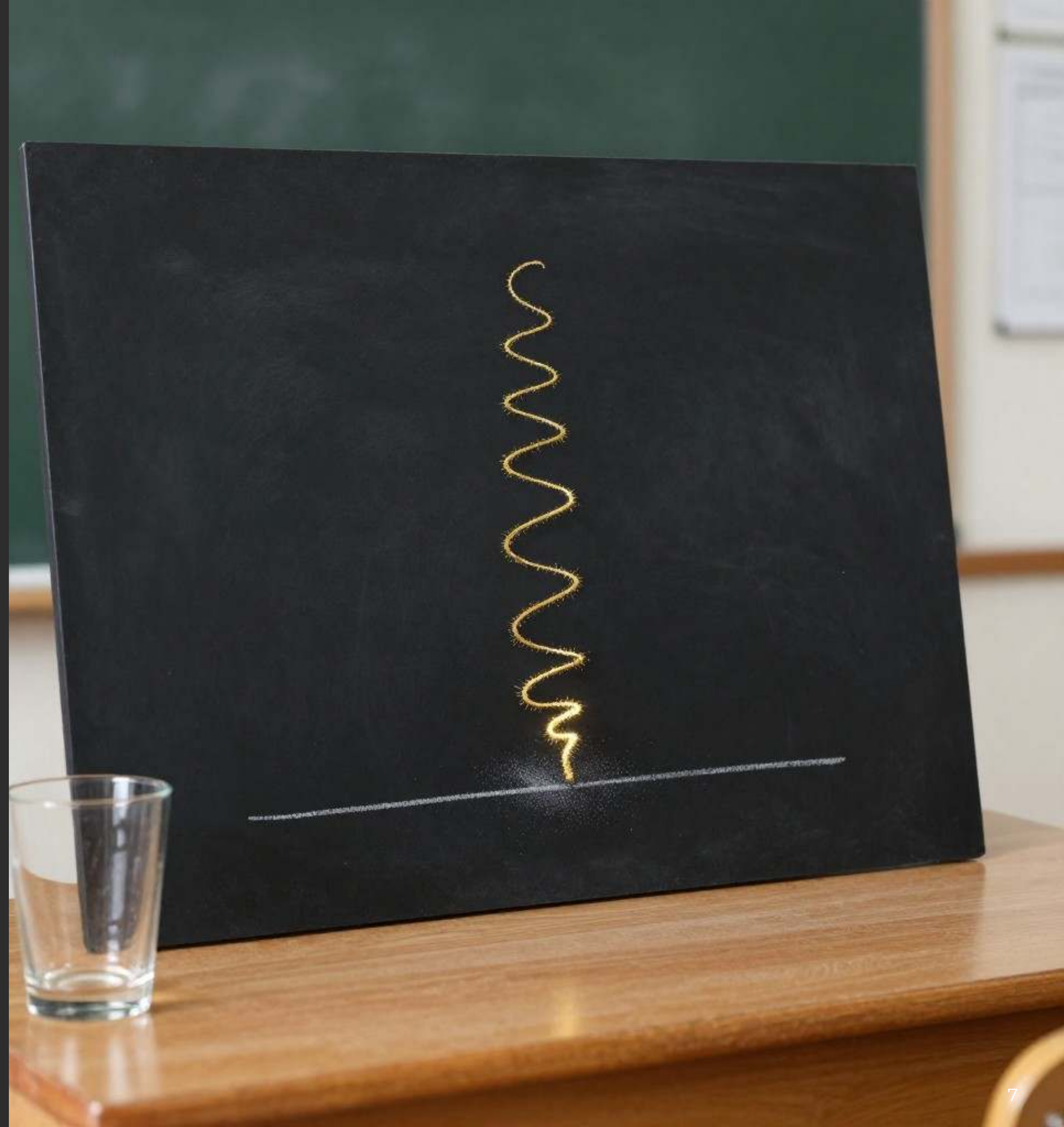
Частные случаи, где нужна внимательность

Степень -1 : логарифм

Когда подынтегральная функция имеет вид $1/x$, стандартная формула степеней не работает: там знаменатель был бы $(-1+1)=0$. Поэтому используют $\int (1/x) dx = \ln|x| + C$.

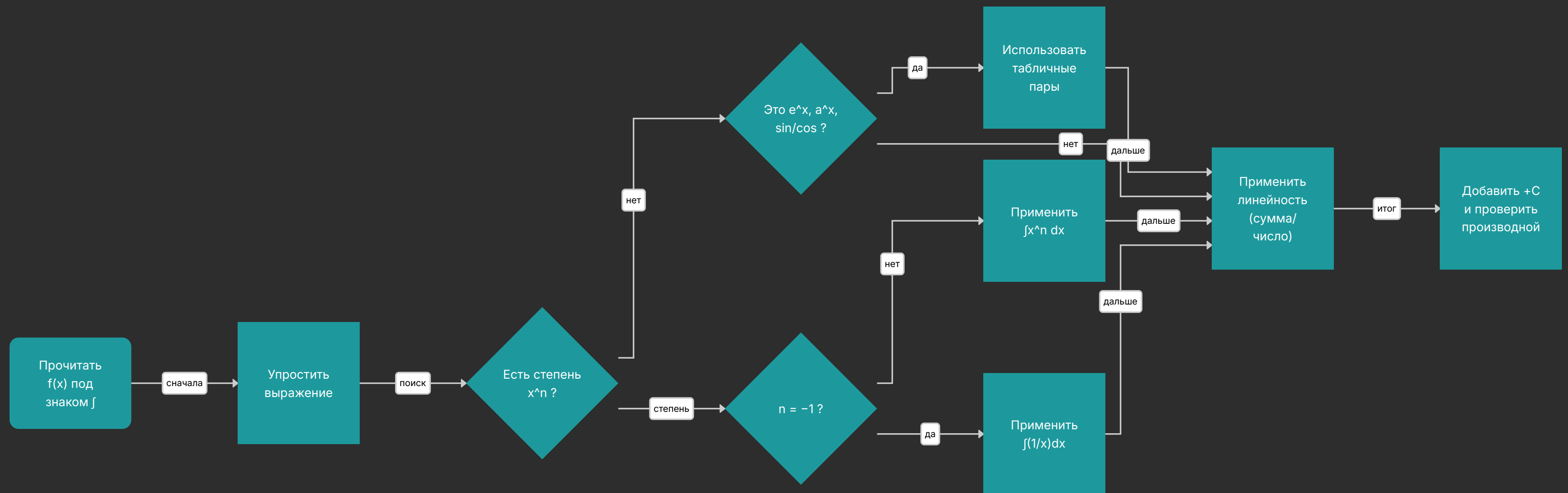
Мультипликативный коэффициент и линейность

Если внутри стоит константа-кратность, например $3 \cdot x^2$, число выходит за знак интеграла: $\int 3 \cdot x^2 dx = 3 \int x^2 dx$. Далее применяют правило степеней и добавляют «+C».



Мини-алгоритм нахождения первообразной

Последовательность помогает распознать тип функции и выбрать корректную формулу.



Первообразная: типичные ошибки и как их избежать

Не перепутайте логарифм и степень: при $1/x$ всегда появляется $\ln|x|$, а знак модуля нужен, потому что $\ln$ определён для $x>0$, но в ответе учитывается знак через $|x|$.

Следите за коэффициентами: при умножении функции на число оно выходит за интеграл без изменения, а показатели степеней сдвигаются на 1. Ошибки обычно возникают в знаменателе $(n+1)$.

Не забывайте проверять результат: возьмите производную и сравните с исходной функцией. Если не совпали знаки или множитель, значит формула применена неверно или выражение не привели к нужному виду.

Как распознавать типы функций



Тригонометрические

Для $\sin x$ и $\cos x$ запоминайте пары: первообразные не совпадают с исходной функцией, а отличаются знаками. Это проще контролировать проверкой по производной.



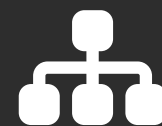
Экспоненты

Для e^x первообразная совпадает с исходной: $\int e^x dx = e^x + C$. Для a^x учитывайте $\ln a$ в знаменателе: $\int a^x dx = a^x / \ln a + C$.



Степени и дроби

Степени x^n дают степень x^{n+1} ; частный случай $n=-1$ превращается в логарифм. Для рациональных выражений часто полезно разложить на сумму простых дробей.



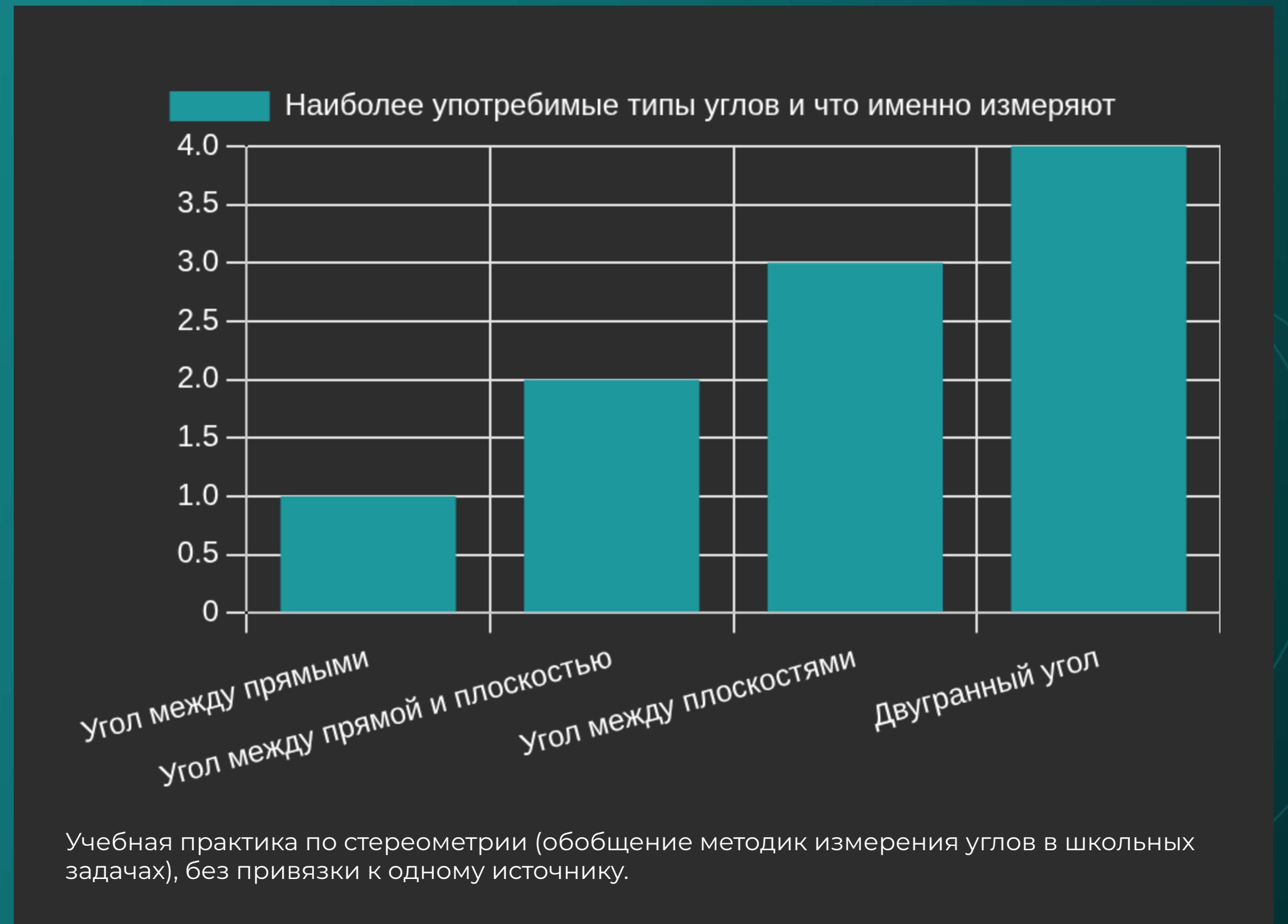
Суммы и множители

Если выражение — сумма нескольких частей, интеграл распадается на сумму первообразных. Если перед функцией стоит число, оно выносится за знак интеграла, сокращая вычисления.

Типы углов в стереометрии и их применение

В каждом случае «угол» связывают с вспомогательной конструкцией на чертеже: секущая плоскость, перпендикулярные проекции или отрезки в пересечении.

Диаграмма показывает, что в задачах чаще проверяют углы через проекции и сечения: так быстрее связывать исходные элементы с вычисляемыми отрезками.



Сечения многогранников



Шаг 1: Выбор секущей плоскости

Определите, какие рёбра пересекает секущая плоскость. Для этого мысленно продолжите пересечения на чертеже и отметьте точки на гранях и рёбрах.

Шаг 2: Поиск вершин сечения

Соберите все точки пересечения плоскости с рёбрами. Они становятся вершинами искомого многоугольника, а порядок точек задаёт его контур.

Шаг 3: Определение формы и типа фигуры

Сравните полученный набор вершин: часто получаются треугольники, четырёхугольники, шестиугольники. Уточните, какие стороны лежат на одних гранях.

Шаг 4: Дostroение и вычисления

Проведите вспомогательные линии для недостающих отрезков. Далее используйте известные свойства граней и теоремы для вычисления длины или площади сечения.

Иллюстрации к теме «Цилиндр, конус и шар»

Цилиндр: «высота + радиус»

Представьте вращение прямоугольника вокруг одной из его сторон: образуется боковая поверхность цилиндра. На рисунке подпишите радиус основания и высоту — именно они управляют объёмом и площадью.



Конус: отрезок-образующая делает фигуру «цельной»

Если вращать прямоугольный треугольник вокруг катета, верхняя точка превращается в вершину конуса, а другая сторона — в основание круга. Отдельно отметьте образующую: она связывает радиус и высоту в формулах площади.



Шар: компактность сферы

Шар получается как вращение полуокружности вокруг диаметра. Важно подчеркнуть, что для объёма и площади шару нужен только радиус: все параметры «сходятся» в одну величину, что удобно для задач.



Основные формулы тел вращения

Тело	Объём V	Площадь поверхности	Условные обозначения
Цилиндр	$\pi r^2 h$	$S_{\text{бок}}=2\pi r h;$ $S_{\text{полн}}=2\pi r(r+h)$	r — радиус, h — высота
Конус	$(1/3)\pi r^2 h$	$S_{\text{бок}}=\pi r l;$ $S_{\text{полн}}=\pi r(l+r)$	l — образующая
Шар	$(4/3)\pi r^3$	$S=4\pi r^2$	r — радиус

Школьный курс алгебры и геометрии: формулы площадей и объёмов тел вращения (стандартные выражения).

Таблица сопоставляет объём и площади поверхностей цилиндра, конуса и шара и показывает, какие параметры обязательно входят в формулы.

Во всех случаях ключевой параметр — радиус. У конуса дополнительно появляется образующая l , поэтому при вычислениях важно не перепутать её с высотой.

3

С помощью этого шага в задачах находят неизвестную длину по двум другим взаимно перпендикулярным сторонам прямоугольного треугольника.

Пифагор связывает перпендикулярные отрезки: из двух известных величин получают третью, затем переносят результат в пространственную диагональ или образующую.

Школьный курс геометрии: теорема Пифагора для прямоугольного треугольника $d^2=a^2+b^2$.

Построение и проверка пространственного чертежа

Типовой порядок оформления решения в задачах на призмы, пирамиды и тела вращения.



Наиболее частые типы задач по геометрии 11 класса

Практика показывает: наибольшая доля приходится на вычисления с многогранниками и телами вращения, потому что там нужен и чертёж, и формула.

Круговая диаграмма подтверждает, что типовые успехи зависят от владения несколькими «ядрами»: объёмом, расстояниями и углами. Остальные задачи часто надстраиваются над ними.

Площади и объёмы Расстояния Углы
Сечения Доказательства свойств фигур
Формулы тел вращения



Обобщение структуры школьных контрольных и тематических задач по стереометрии (без указания конкретного сборника).

Практическое значение геометрии



Строительство и архитектура

Параллельность и перпендикулярность используют при проектировании стен, перекрытий и узлов конструкций. Расчёт объёмов помогает оценивать материалы, трудозатраты и габариты элементов.



Инженерия и детали машин

Стереометрические расчёты поддерживают создание компонентов с заданными размерами и формами. Умение работать с углами и расстояниями помогает корректно переносить параметры с чертежа в изделие.



Упаковка и хранение

Формулы объёмов и площадей поверхности помогают подобрать форму тары, минимизировать расход материала и обеспечить нужный внутренний объём. Это особенно важно для резервуаров и контейнеров.



3D-моделирование и навигация

В моделировании требуется переводить абстрактные фигуры в реальные размеры. Геометрия помогает оценивать габариты объектов, проверять взаимное расположение элементов и точность построений.

Типичные ошибки в задачах по стереометрии

Часто путают высоту фигуры с расстоянием между произвольными точками. Высота — это перпендикуляр, поэтому без перпендикулярности формула применяется неверно и вывод рушится.

Неправильно выбирают, какую площадь использовать: боковую или полную. Из-за этого в расчётах конуса и цилиндра теряется добавка для «крышек», а итоговое значение получается завышенным или заниженным.

Пропускают единицы измерения или переводят их «на глаз». В задачах с радиусом и высотой ошибка масштаба приводит к неверным числам даже при правильной формуле.

Путают параметры: радиус и диаметр, апофему и высоту, образующую и боковое ребро. Кроме вычислительных ошибок, это ведёт к неверным построениям и логическим шагам в доказательстве.

Структура успеха в стереометрии 11 класса

Стереометрия объединяет пространственные фигуры, их взаимное расположение и числовые характеристики. Основа — параллельность и перпендикулярность, формулы площадей и объёмов, Пифагор, сечения и аккуратный чертёж.

