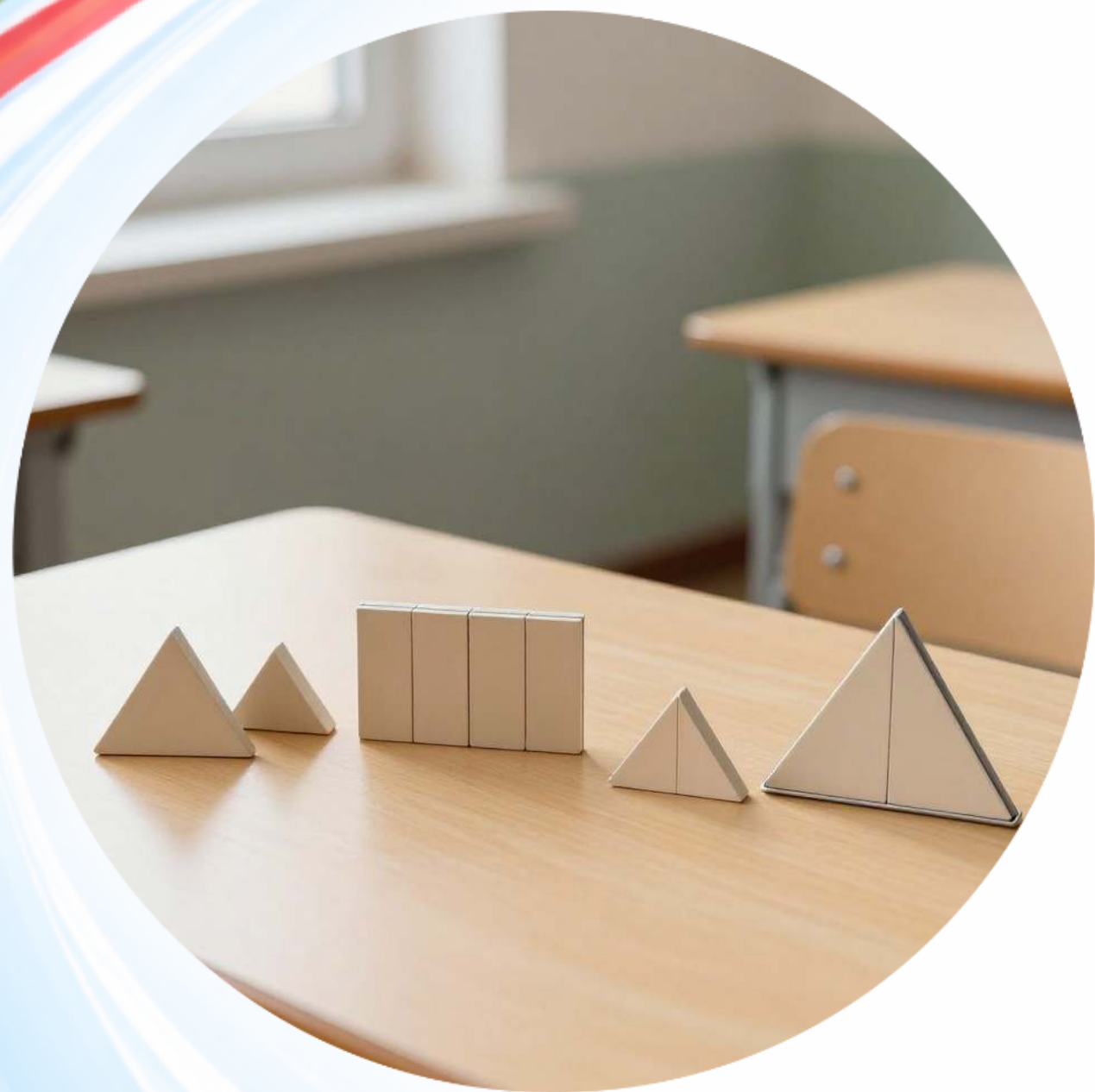




Гомотетии и изометрии: преобразования фигур в геометрии

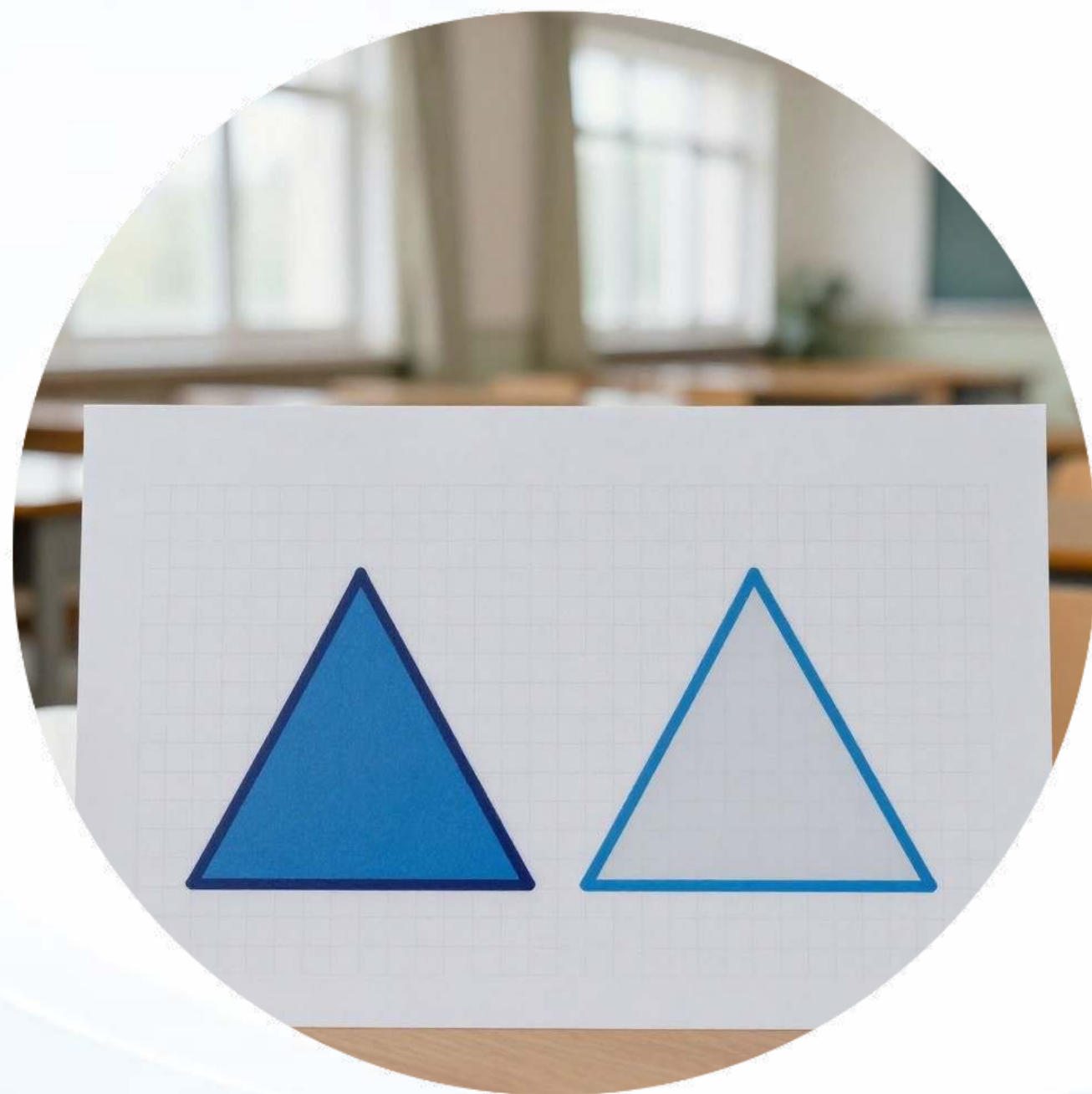
Как понять, что меняется у фигуры, а что сохраняется?

Зачем нужны преобразования фигур

- На чертежах, картах и орнаментах фигуры часто нужно сравнивать в разных масштабах. Преобразования показывают, когда сохраняются расстояния, углы и форма, а когда меняется только размер.



Понятие изометрии



1

Сохранение расстояний

Изометрия не изменяет расстояние между любыми двумя точками фигуры. Поэтому отрезки после преобразования остаются той же длины, а сама фигура

Неизменные углы

При изометрии сохраняются величины углов. Это значит, что фигура поворачивается, сдвигается или отражается, но её внутренняя геометрия остаётся прежней.

Равенство фигур

Фигура после изометрии считается равной исходной: её можно совместить с оригиналом наложением. Совпадают стороны, углы, периметр и площадь.

4

Основные виды

К изометриям относятся параллельный перенос, поворот и осевая симметрия. Все они меняют положение фигуры на плоскости, но не её размеры.

5

Геометрический смысл

Изометрия показывает, что фигуры могут быть разными по расположению, но одинаковыми по форме и размеру. Это важно при построениях и сравнениях на координатной плоскости.

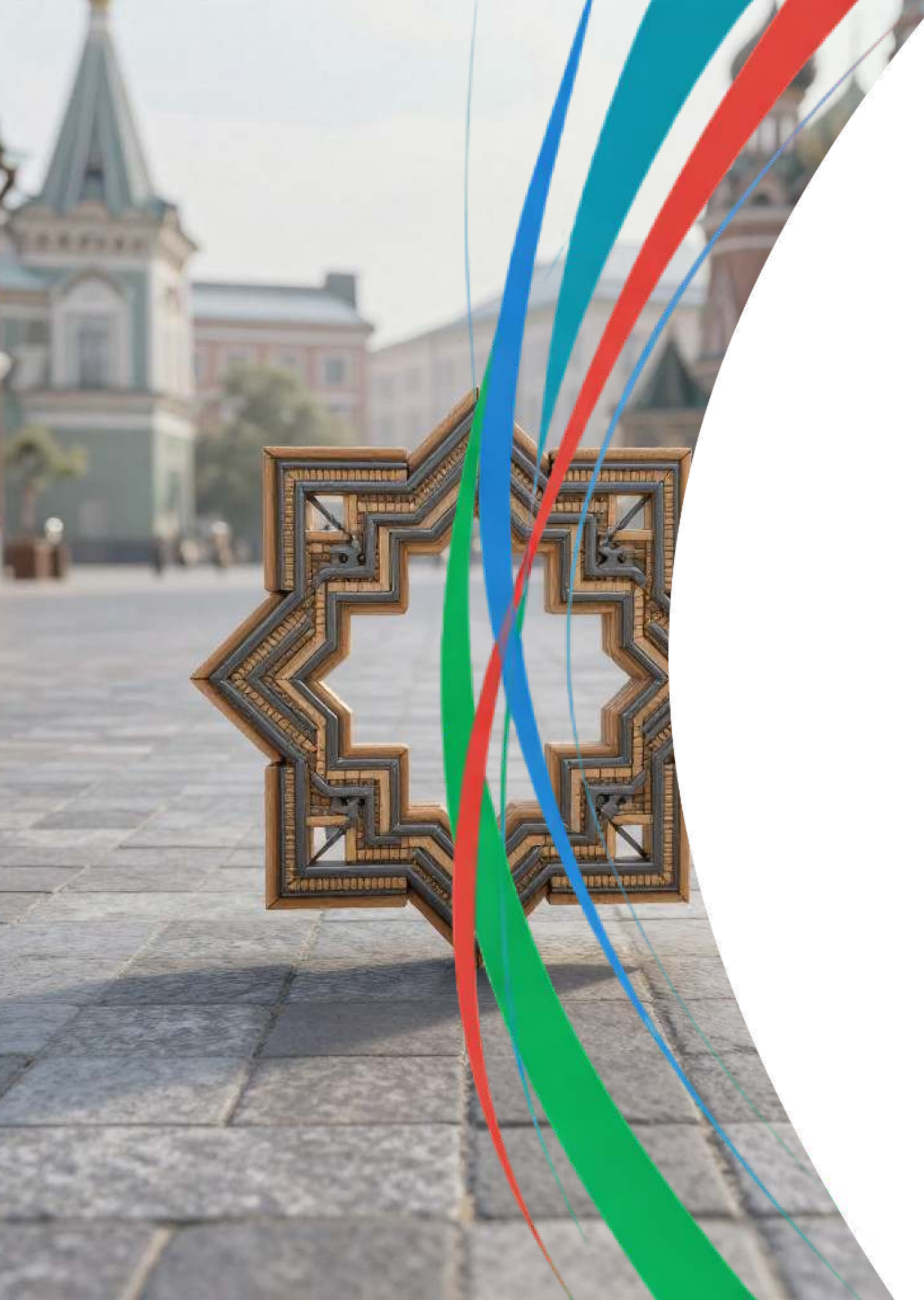
Изометрия и гомотетия: сравнение свойств

Сравнение показывает, какие свойства фигур сохраняются без изменения, а какие зависят от масштаба.

Изометрия сохраняет и размер, и форму; гомотетия сохраняет форму, но меняет масштаб.

Свойство	Изометрия	Гомотетия
Длины сторон	сохраняются	изменяются в $ k $ раз
Углы	сохраняются	сохраняются
Периметр	сохраняется	изменяется в $ k $ раз
Площадь	сохраняется	изменяется в k^2 раз
Форма фигуры	сохраняется	сохраняется

Свойства преобразований на плоскости: изометрия и гомотетия



Параллельный перенос как пример изометрии

Один и тот же вектор

При параллельном переносе каждая точка фигуры смещается на одинаковый вектор. Поэтому все части изображения двигаются согласованно, без растяжения, сжатия и поворота.

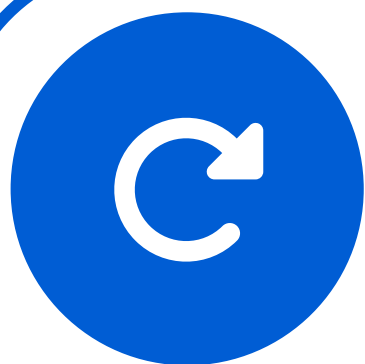
Фигура остаётся прежней

После переноса сохраняются форма, размеры и ориентация фигуры. На координатной сетке это особенно заметно: исходный и полученный рисунки полностью равны.

Примеры вокруг нас

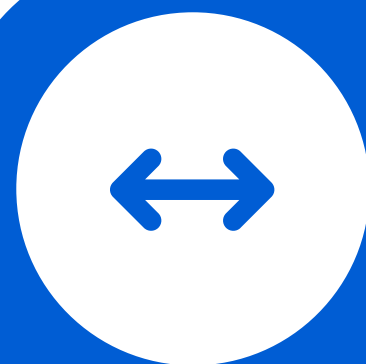
Параллельный перенос встречается в повторяющихся узорах, при сдвиге объекта на экране и в орнаментах. Это удобная модель для описания движения без изменения самой фигуры.

Поворот и осевая симметрия



Поворот

Фигура вращается вокруг заданного центра на определённый угол, например 90° , 180° или 270° . Расстояния и углы не меняются, поэтому результат относится к изометриям.



Осевая симметрия

При осевой симметрии каждая точка переходит на другую сторону оси на таком же расстоянии. Получается зеркальное отображение, в котором сохраняются длины и величины углов.



Примеры симметрии

Снежинка, бабочка и многие орнаменты хорошо показывают поворот и зеркальную симметрию. Такие изображения помогают увидеть, как фигура может меняться по положению, но не по размерам.

Что сохраняется при разных преобразованиях

Диаграмма помогает быстро увидеть, какие свойства определяют равенство фигур, а какие — только их подобие.

Изометрия сохраняет почти всё, а гомотетия оставляет неизменными только форму и углы.

Сравнение свойств изометрий и гомотетии по определению

Определение гомотетии

1

Центр преобразования

Гомотетия задаётся центром O . Все точки фигуры связываются именно с этой точкой, поэтому построение всегда начинается с выбора центра.

2

Коэффициент k

Число k показывает, во сколько раз изменяется расстояние до центра. По модулю коэффициента определяют размер образа, а знак помогает понять его расположение.

3

Направление луча

Каждая точка фигуры переходит на луч, выходящий из центра гомотетии через исходную точку. Это сохраняет общую форму фигуры и её соответствие по вершинам.

4

Увеличение и уменьшение

Если k больше 1, фигура увеличивается. Если $0 < k < 1$, она уменьшается. В обоих случаях форма остаётся той же, меняется только масштаб.

5

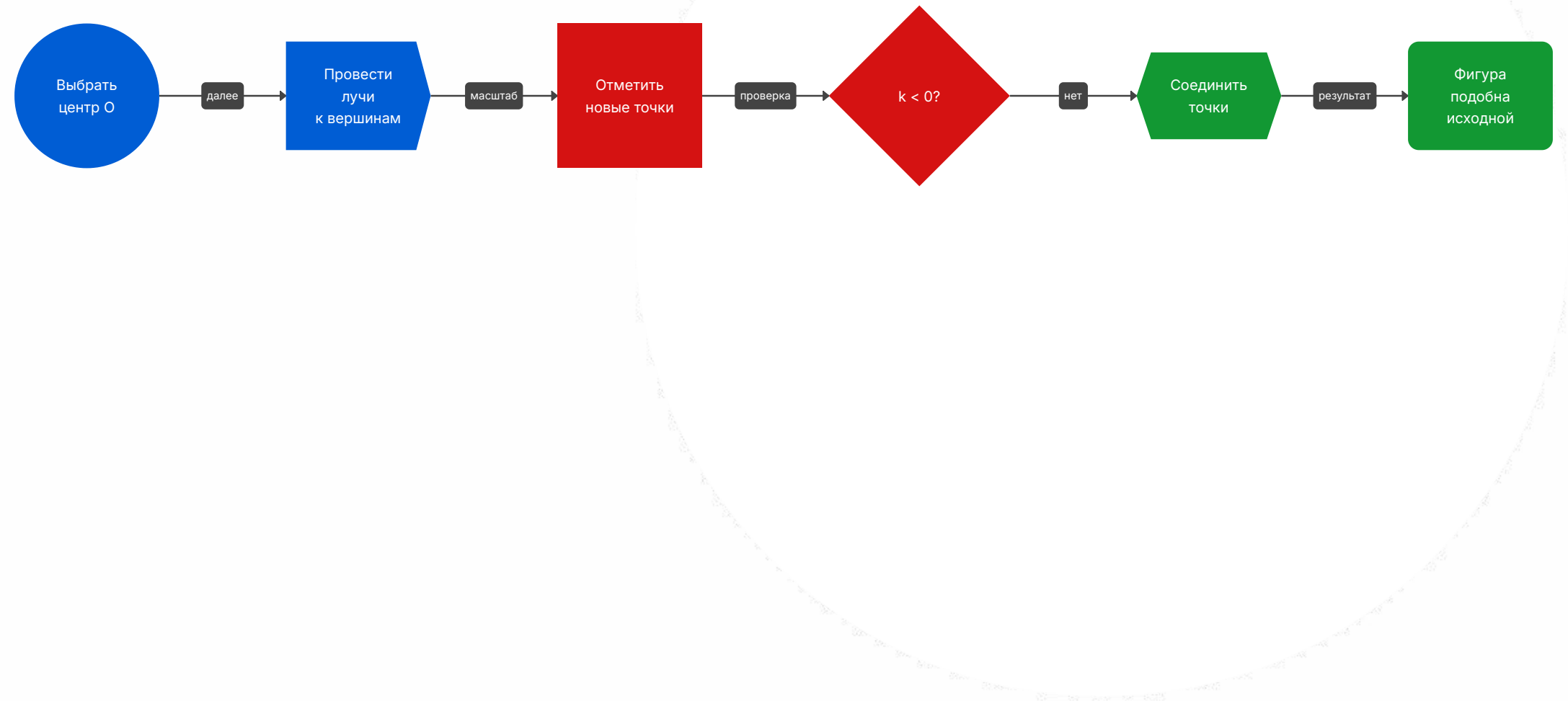
Отрицательный коэффициент

При отрицательном k образ оказывается по другую сторону центра. Фигура остаётся подобной исходной, но её положение относительно центра меняется на противоположное.

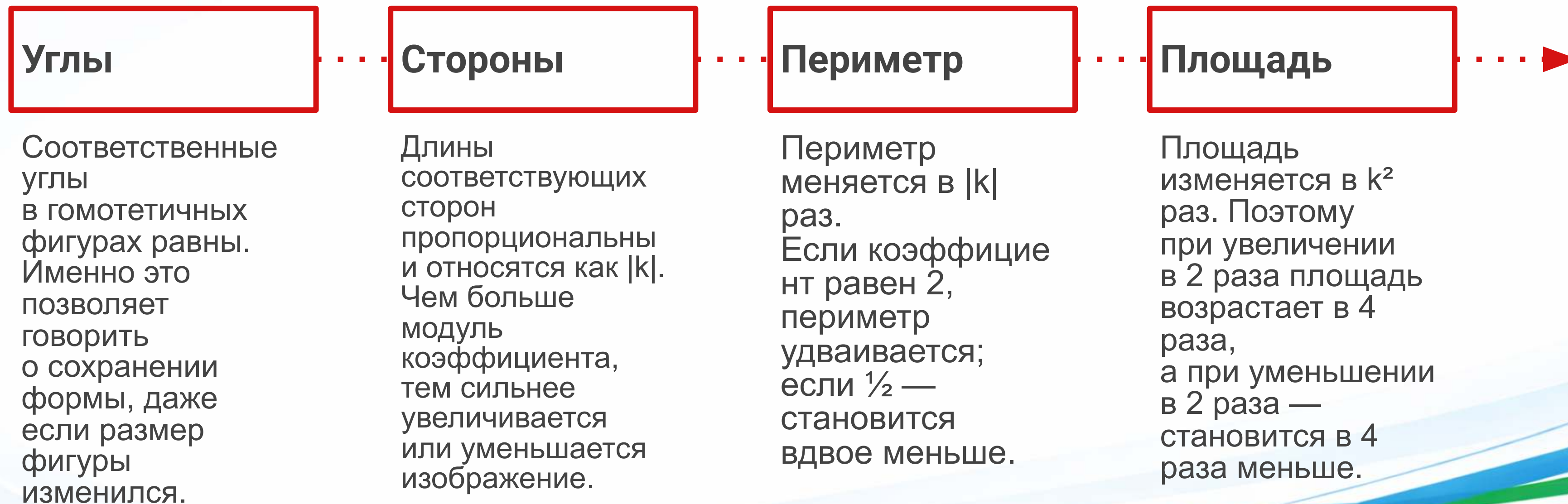


Как построить гомотетию

Последовательность действий при построении образа фигуры относительно центра O и коэффициента k



Как меняются свойства при гомотетии



Гомотетия в жизни, на чертежах и в изображениях



Карта как уменьшенная модель

Карта города показывает тот же объект, но в меньшем масштабе, чем в реальности. Очертания улиц и кварталов сохраняются, меняется только размер изображения. Именно так гомотетия помогает передавать форму без потери узнаваемости.



Чертёж без искажений

Архитектурный чертёж можно увеличить или уменьшить, не меняя пропорций здания. Тогда детали остаются на своих местах, а длины всех отрезков изменяются одинаково. Это удобно для работы с планами, схемами и макетами.



Изображение в нескольких размерах

Один и тот же рисунок часто показывают рядом в трёх вариантах: маленьком, исходном и увеличенном. Так видно, что фигура остаётся подобной самой себе. Для зрителя это наглядный пример гомотетии в графике и дизайне.

Как коэффициент гомотетии влияет на результат

k	Результат	Смысл
2	увеличение	в 2 раза
$\frac{1}{2}$	уменьшение	в 2 раза
-1	равная фигура	по другую сторону
-2	увеличение	по другую сторону

Таблица показывает, как знак и модуль коэффициента меняют размер и расположение фигуры относительно центра.

Модуль коэффициента задаёт изменение размера, а знак — сторону относительно центра. При $k = \pm 1$ размер не меняется.

Равные и подобные фигуры

1

Равенство фигур

Равные фигуры можно совместить наложением: у них совпадают стороны, углы и площадь. Это означает, что фигуры одинаковы не только по форме, но и по размеру.

2

Признаки подобия

Подобные фигуры имеют равные соответствующие углы и пропорциональные стороны. Они могут выглядеть одинаково, но быть разного размера, как уменьшенная и увеличенная копия одного рисунка.

3

Что даёт изометрия

Любая изометрия сохраняет расстояния между точками. Поэтому после такого преобразования фигура остаётся равной исходной, а её положение на плоскости только меняется.

4

Что даёт гомотетия

Гомотетия сохраняет форму и углы, но может менять размер. Если $|k|$ не равно 1, фигуры остаются подобными, но уже не равными по размеру.

Как меняются периметр и площадь при разных k

На диаграмме сравниваются относительные изменения периметра и площади для трёх значений коэффициента. Видно, что площадь реагирует на изменение масштаба сильнее, чем длины.

Периметр растёт по модулю коэффициента, а площадь — по квадрату коэффициента. Поэтому при увеличении фигуры площадь меняется быстрее.

Расчёты по формулам гомотетии: $P' = |k| \cdot P$, $S' = k^2 \cdot S$

Как распознавать преобразование в задаче



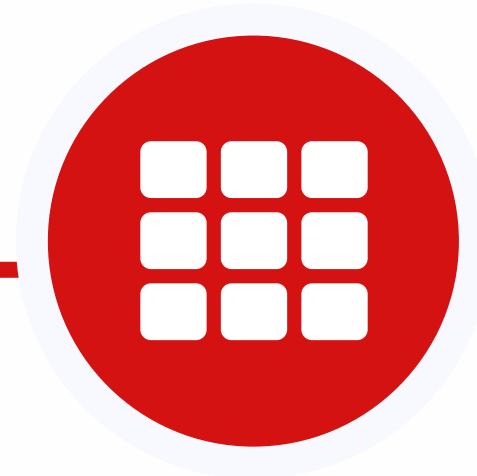
Сохраняются расстояния

Если после преобразования все отрезки остаются той же длины, речь идёт об изометрии. Фигура не меняет размер, а только перемещается, поворачивается или отражается.



Сохраняются углы и пропорции

Когда равны соответствующие углы и сохраняется отношение сторон, нужно искать гомотетию. Фигура может стать больше или меньше, но её форма остаётся той же.



Работа на координатной сетке

На клетчатой бумаге удобно проверять, как смещаются точки, где находится центр и как меняются расстояния. Это помогает быстро отличить перенос, поворот, симметрию и гомотетию.

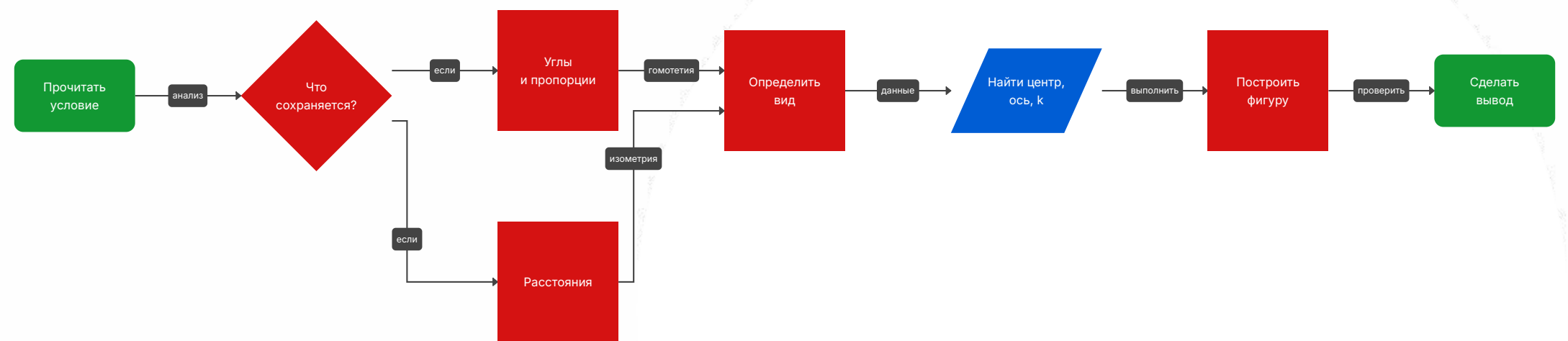


Точный выбор признаков

В задаче важно не путать равенство с подобием. Сначала определяют, что именно сохраняется, а затем делают вывод о виде преобразования и его свойствах.

Алгоритм решения задач на преобразова ния фигур

Последовательность действий помогает выбрать нужное преобразование и правильно выполнить построение.



Типичные ошибки при изучении гомотетии и изометрий

Путают равенство и подобие

У равных фигур совпадают и форма, и размер, а у подобных совпадает только форма. Если не различать эти понятия, легко сделать неверный вывод о результате преобразования.

Забывают про знак k

Знак коэффициента показывает, по какую сторону от центра окажется образ. Если учитывать только модуль, можно построить фигуру в неправильном месте и потерять смысл задачи.

Смешивают периметр и площадь

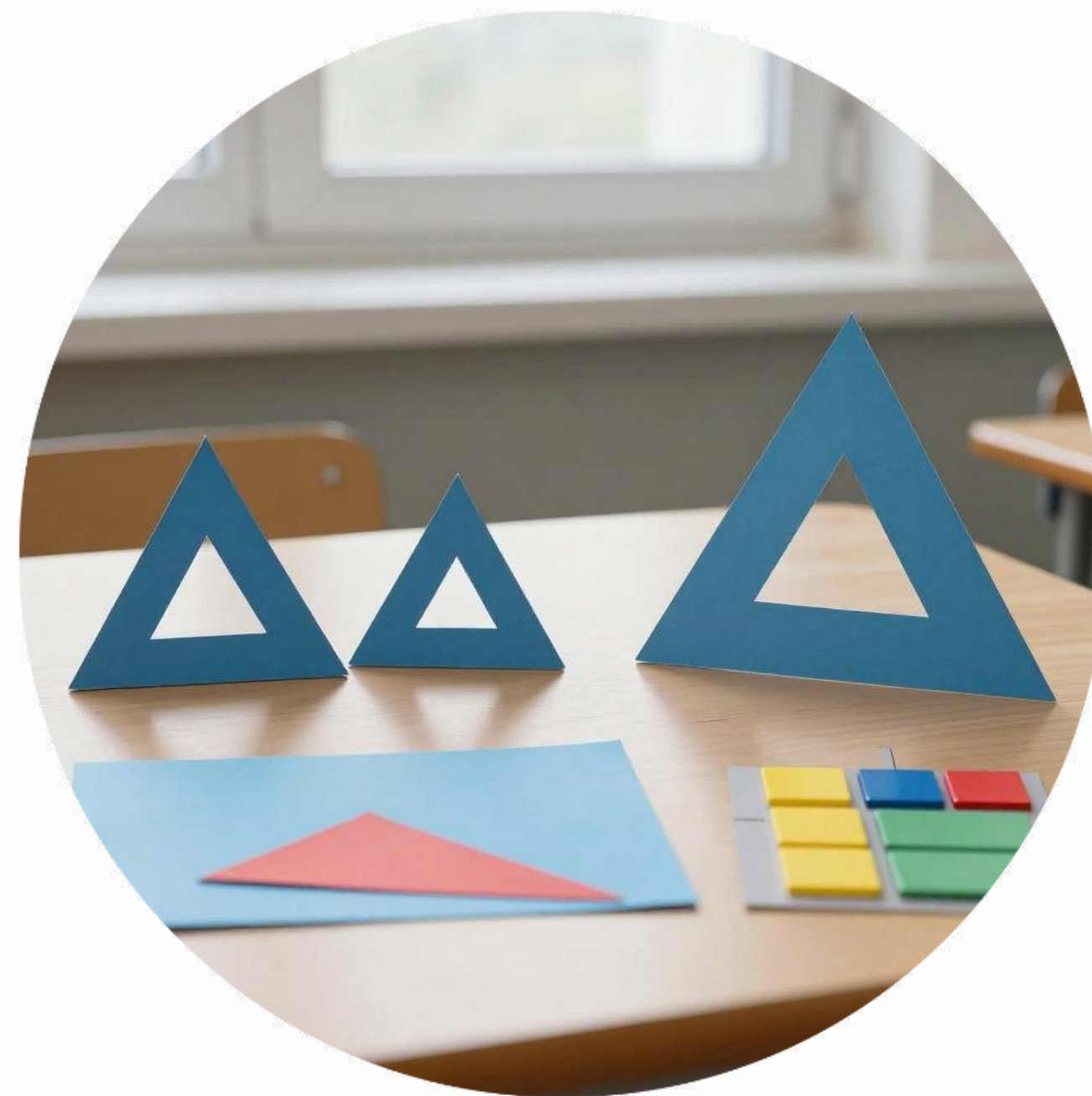
Периметр зависит от $|k|$, а площадь — от k^2 . Ошибка возникает, когда изменение размера считают одинаковым для всех величин, хотя площадь меняется быстрее.

Путают симметрию и поворот

Осевая симметрия и поворот на 180° похожи внешне, но это разные преобразования. При решении важно определить ось, центр и направление движения каждой точки.

Неверно находят соответствия

Нужно точно сопоставлять вершины, стороны и углы исходной и новой фигуры. Если перепутать соответствующие элементы, отношение сторон и итоговое построение будут неправильными.



Краткий справочник формул и обозначений

Таблица помогает быстро вспомнить основные формулы и элементы преобразований фигур.

Для гомотетии важно различать центр O и коэффициент k . Для изометрий ключевые элементы — ось симметрии, центр поворота и вектор переноса.

Величина	Формула	Смысл
Длина	$ k \cdot a$	после гомотетии
Периметр	$ k \cdot P$	изменяется
Площадь	$k^2 \cdot S$	зависит от квадрата
Расстояние	не изменяется	при изометрии

Школьные формулы по теме преобразований фигур



Практическое значение темы в учебе и в жизни

Картография и масштаб

На картах и схемах один и тот же объект показывают в разных размерах. Гомотетия объясняет, почему форма остаётся узнаваемой, даже когда изображение сильно уменьшено.

Чертежи и модели

В черчении и моделировании важно сохранять пропорции деталей. Если размеры меняются одинаково, можно создать точную уменьшенную или увеличенную копию предмета.

Графика и дизайн

В компьютерной графике часто нужно масштабировать значки, логотипы и элементы оформления без искажения формы. Здесь удобно использовать свойства гомотетии и изометрий.

Проверка симметрии

Изометрии помогают строить узоры, отражать фигуры и проверять равенство деталей. Это полезно не только на уроках, но и при работе с рисунками и координатами.

Что важно запомнить о преобразованиях фигур

Изометрии сохраняют расстояния, углы, периметр и площадь, поэтому дают равные фигуры. Гомотетия сохраняет форму и углы, но меняет размер, помогая понимать подобие и масштаб.