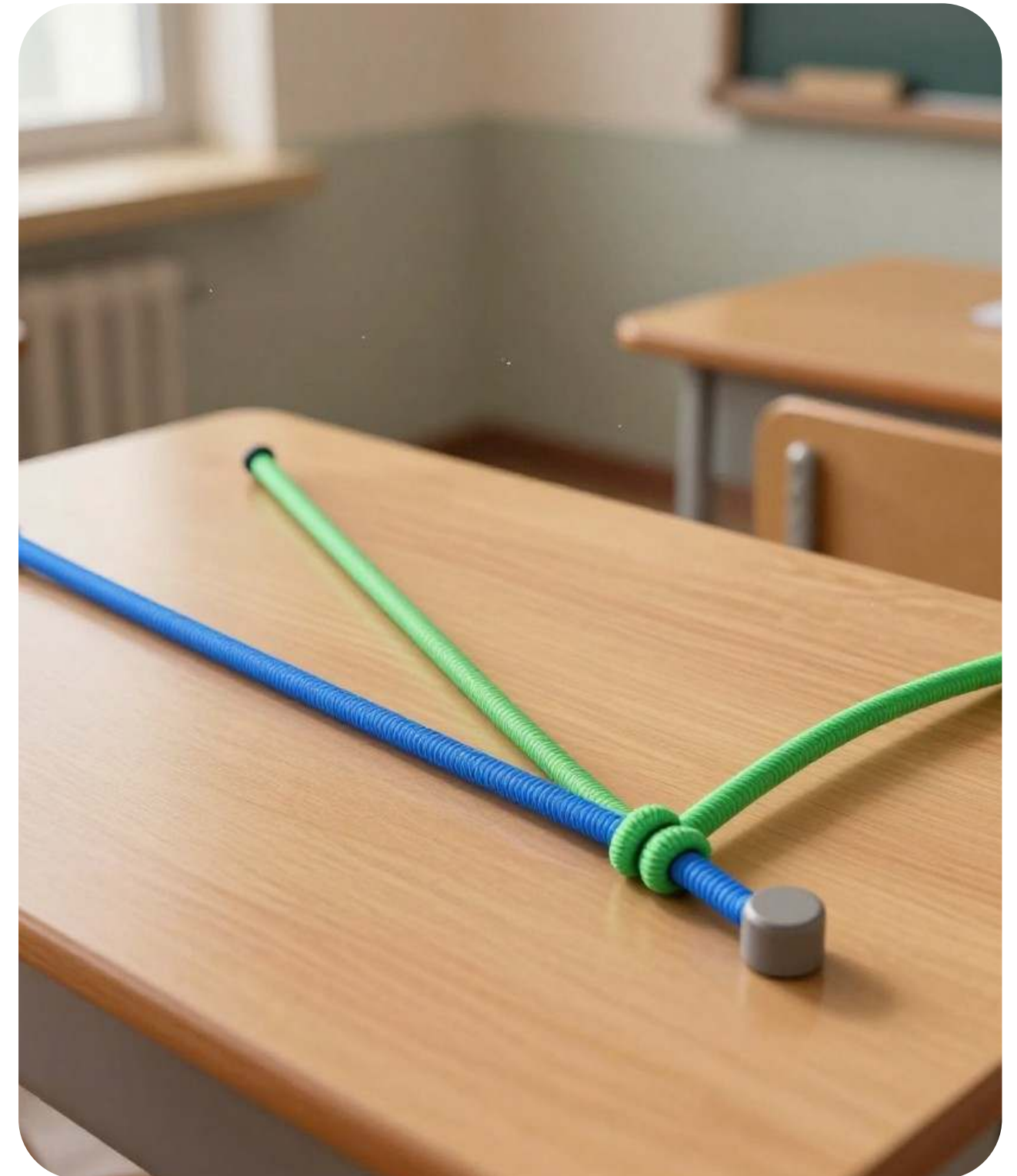




Скалярное произведение векторов: основная идея и задачи урока

Число, которое связывает длины векторов и угол между ними.



Где встречается скалярное произведение

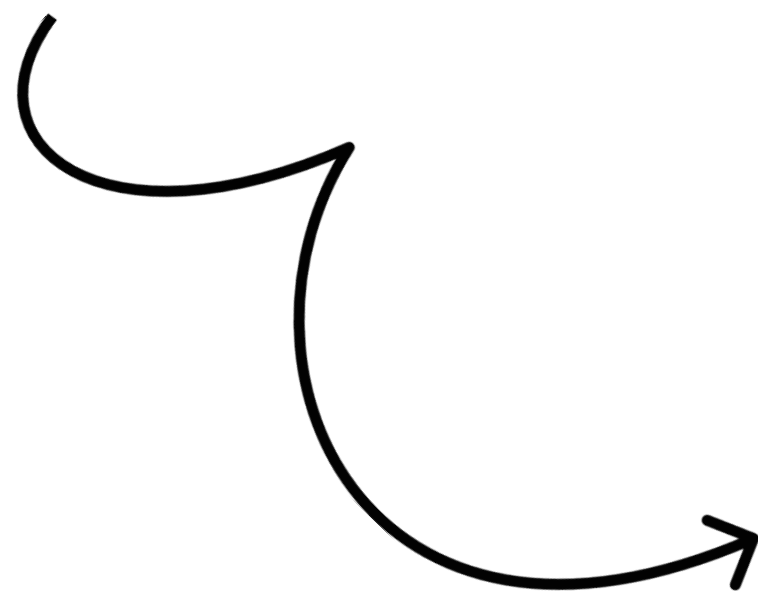


Эта тема помогает находить углы, проверять прямые углы и понимать взаимное направление векторов. В геометрии она опирается на координаты, а в физике — на смысл работы силы.





Скалярное произведение становится особенно наглядным, когда векторы образуют прямой угол: результат равен нулю.

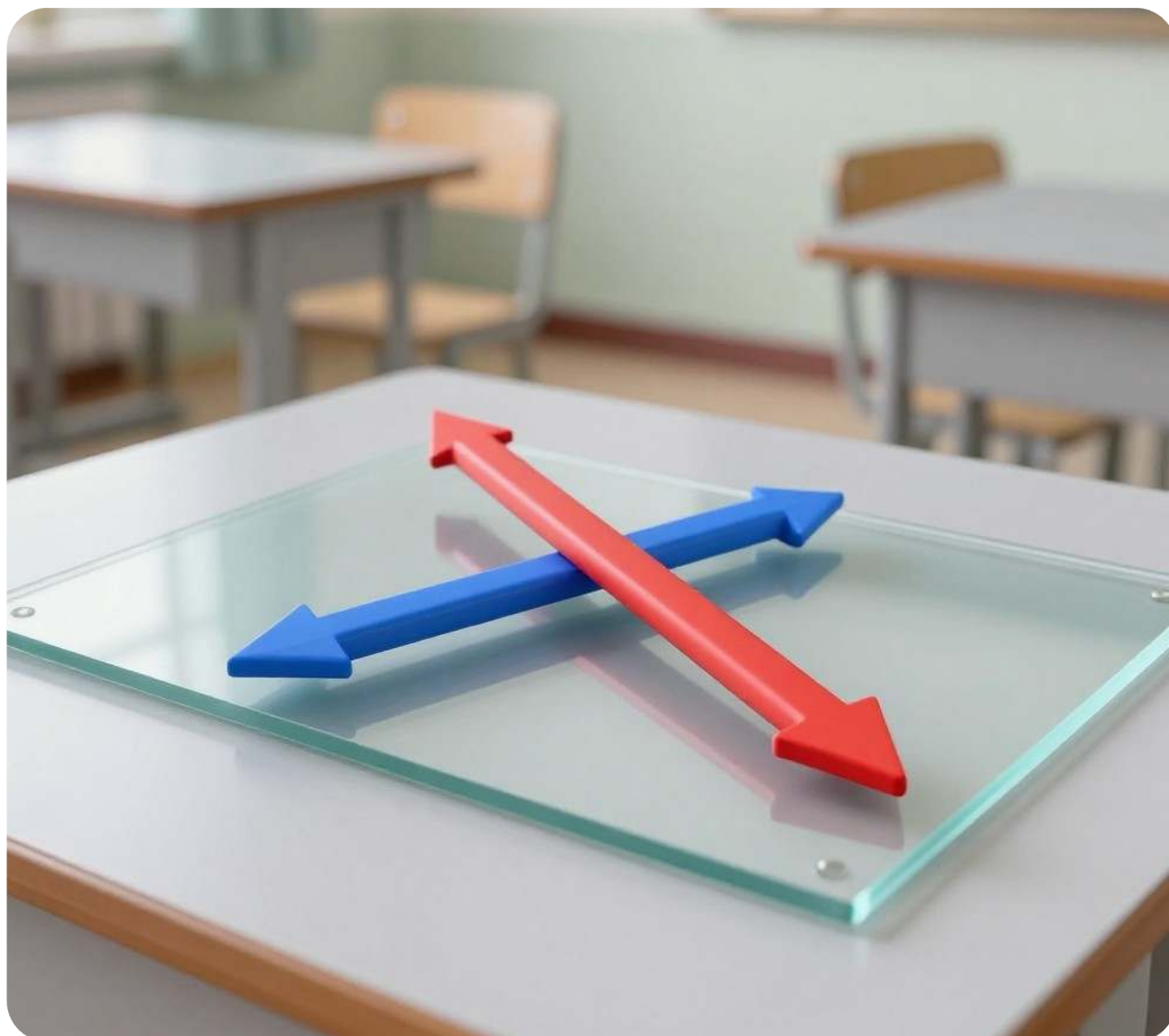


90°

даёт нулевой результат, потому что $\cos$ этого угла равен нулю.

Формула $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$

Геометрический смысл через проекцию



Направление векторов

Скалярное произведение показывает, насколько один вектор направлен в сторону другого. Если направления близки, проекция велика, и значение произведения тоже становится больше.



Проекция как ключ

Формула $a \cdot b = |a| \cdot \text{пр}_b(a)$ связывает произведение с проекцией вектора a на направление вектора b . Это помогает увидеть смысл вычисления не только в числах, но и на чертеже.



Один знак — разный смысл

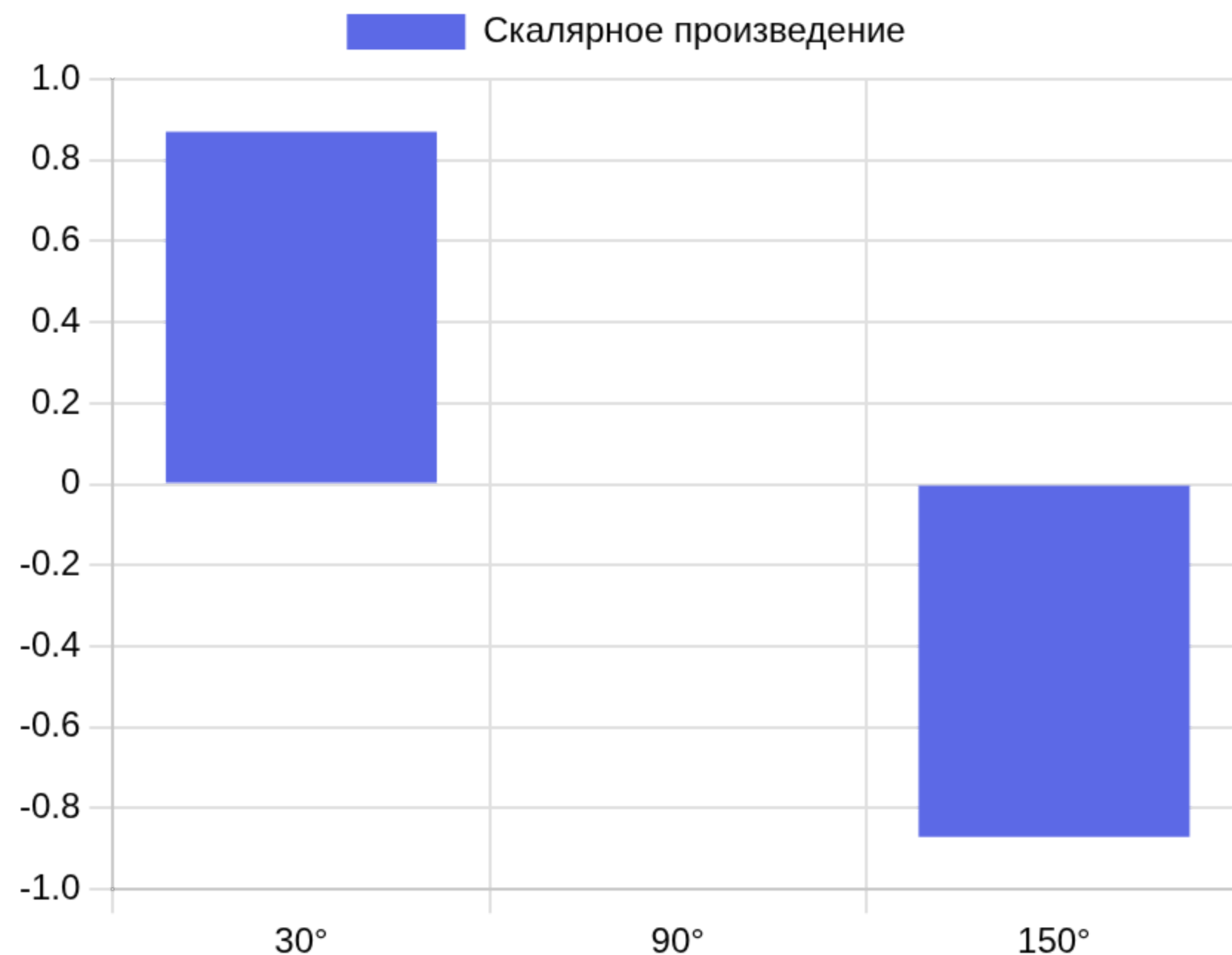
Когда векторы смотрят в одну сторону, проекция положительна. Если направление противоположное, проекция отрицательна. При прямом угле она равна нулю, поэтому и произведение исчезает.



Что показать на рисунке

На схеме удобно изобразить два вектора, угол между ними и выделенную проекцию одного вектора на другой. Так легче понять, от чего зависит итоговое число.

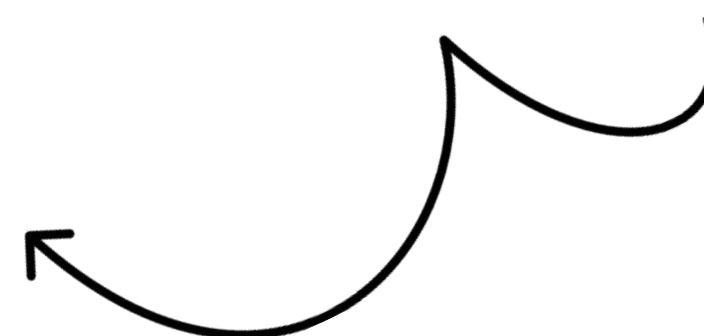
Знак скалярного произведения и угол между векторами



При одинаковых длинах векторов результат меняется только из-за угла между ними.

Знак совпадает со знаком косинуса: острый угол даёт положительное значение, прямой — ноль, тупой — отрицательное.

Тригонометрические значения $\cos 30^\circ$, $\cos 90^\circ$, $\cos 150^\circ$



Основные формулы скалярного произведения



Формула	Смысл	Случай
$a \cdot b = a \cdot b \cdot \cos \alpha$	через угол	геометрия
$x_1 x_2 + y_1 y_2$	на плоскости	координаты
$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$	в пространстве	3D

Школьные формулы скалярного произведения

Сравнение главных формул помогает быстро выбрать нужный способ решения в задаче.

Геометрическая формула связана с углом, а координатные — с вычислениями по числам.

Координатная формула в прямоугольной системе



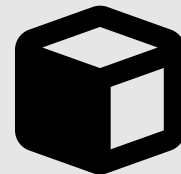
Плоскость

Если векторы заданы на плоскости координатами, их скалярное произведение находится без построений: достаточно перемножить соответствующие координаты и сложить результаты.



Только числа

Формула $x_1x_2 + y_1y_2$ удобна тем, что не требует искать угол заранее. Это делает вычисления быстрее и уменьшает количество геометрических построений.



Пространство

В пространстве к двум слагаемым добавляется третье: z_1z_2 . Так формула сохраняет тот же принцип и остаётся понятной при работе с трёхмерными задачами.



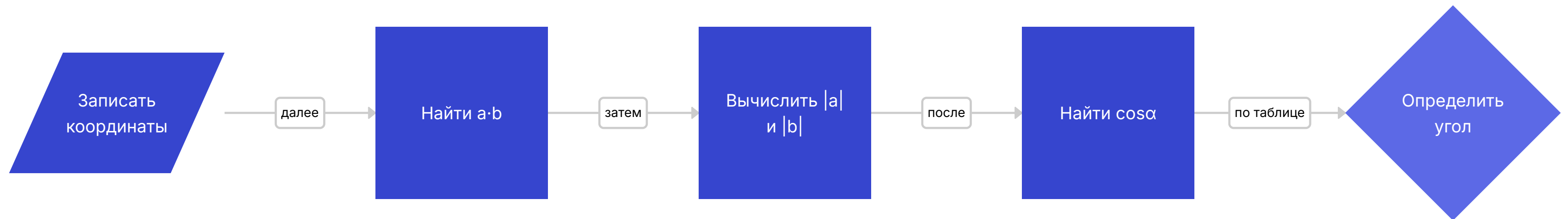
Быстрая проверка

Координатный способ особенно полезен, когда нужно проверить прямой угол или найти значение произведения в заданиях с координатами точек и векторов.



Алгоритм нахождения угла между векторами

Последовательность действий по данным координатам векторов



Пример вычисления скалярного произведения по координатам



01

Подставляем координаты

Для векторов $a = (2, 1)$ и $b = (3, 4)$ используем координатную формулу. Нужно перемножить соответствующие координаты и сложить полученные произведения.

02

Считаем результат

Получаем $2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 6 + 4 = 10$. Это и есть скалярное произведение данных векторов, то есть одно число, а не новый вектор.

03

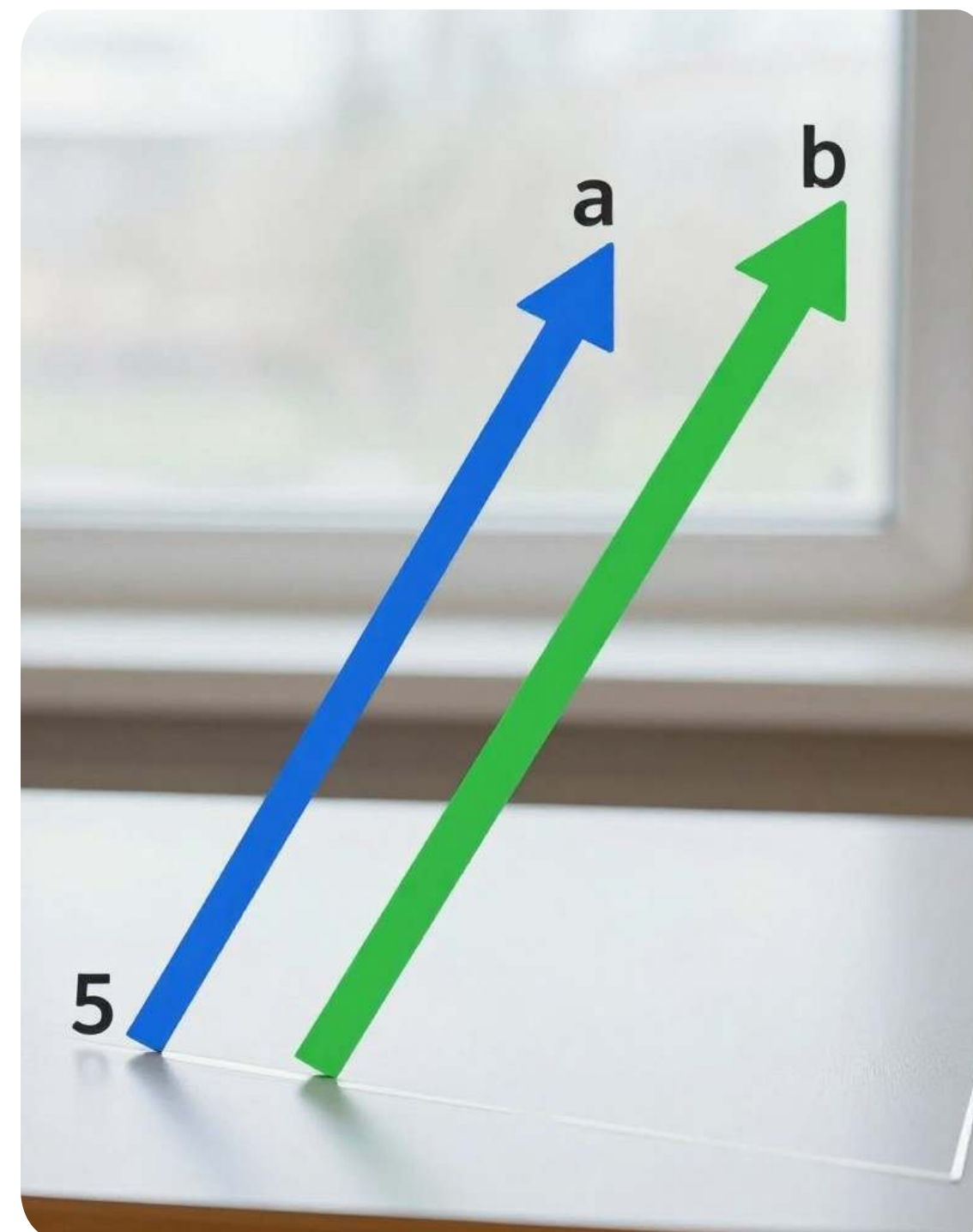
Находим длины

Длина первого вектора равна $\sqrt{5}$, а второго — 5. Эти значения нужны, чтобы перейти от числового результата к вычислению угла между векторами.

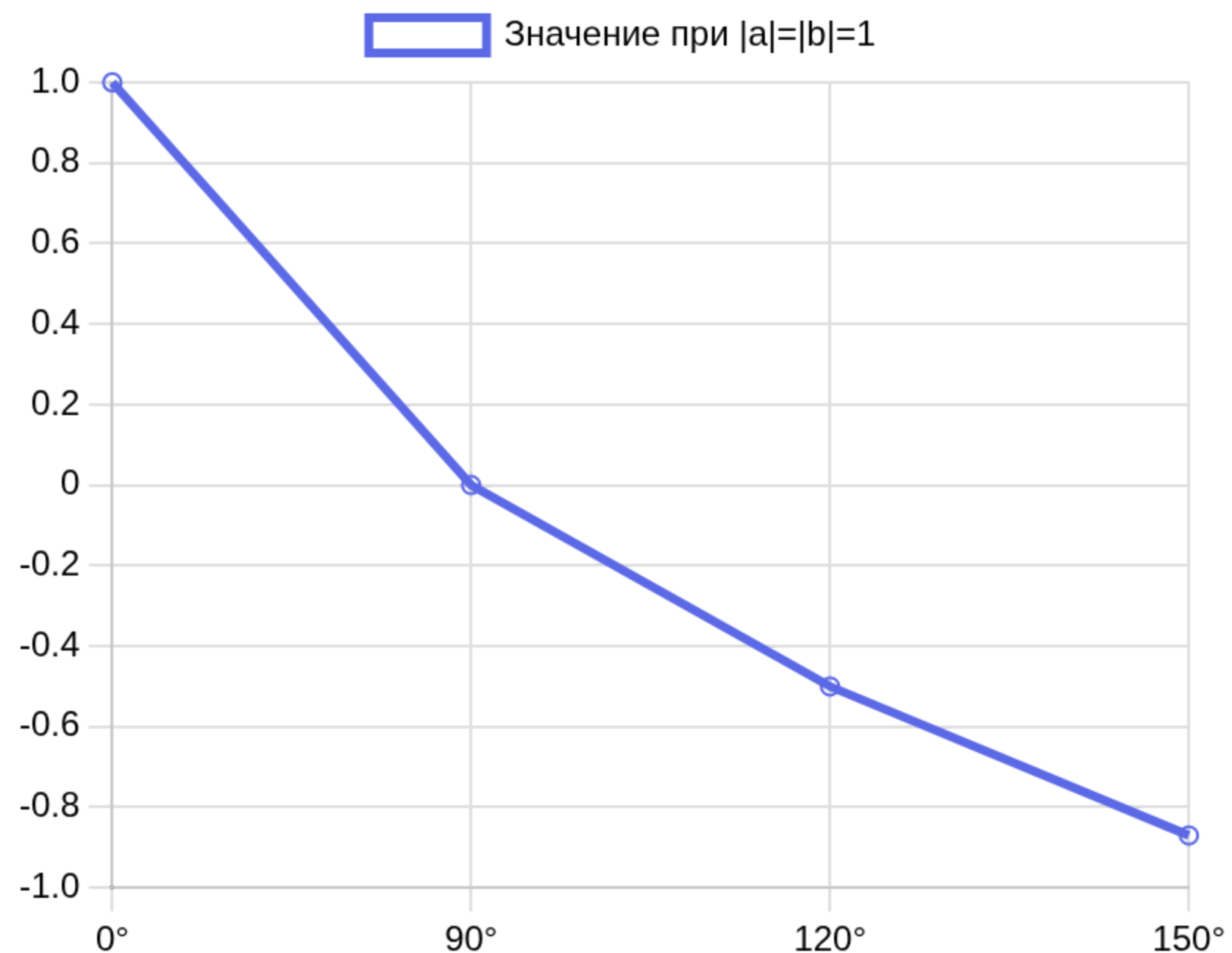
04

Находим угол

По формуле $\cos \alpha = 10 / (5\sqrt{5})$ получаем значение косинуса, а затем определяем сам угол. Так координаты помогают перейти от вычисления к геометрическому смыслу.



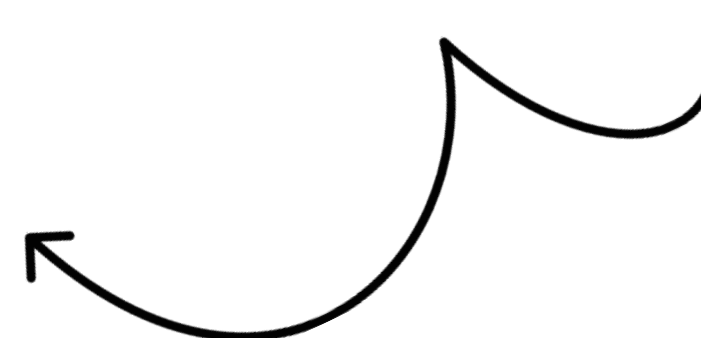
Как значение зависит от угла между векторами



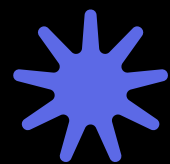
Чем больше угол, тем сильнее меняется знак и уменьшается значение произведения.

Максимум достигается при совпадении направлений, ноль — при перпендикулярности, отрицательные значения появляются у тупых углов.

Тригонометрические значения $\cos 0^\circ$, $\cos 90^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\cos 150^\circ$



Основные свойства скалярного произведения



01 Переместительное свойство

Скалярное произведение не зависит от порядка векторов: $a \cdot b = b \cdot a$. Это удобно в вычислениях, потому что можно выбирать более простую запись, не меняя результат.

02 Распределение по сумме

Если к одному из векторов добавить другой, скалярное произведение можно раскрыть по частям: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Так сложные выражения превращаются в несколько простых.

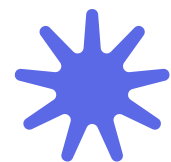
03 Умножение на число

При умножении вектора на число результат тоже изменяется предсказуемо: $(ka) \cdot b = k(a \cdot b)$. Это свойство помогает быстро переносить множитель и упрощать формулы в задачах.

04 Квадрат длины

Для любого вектора a выполняется $a \cdot a = |a|^2$. Значит, скалярное произведение вектора самого на себя всегда неотрицательно и связано с его длиной напрямую.

Когда скалярное произведение особенно удобно



Ситуация	Что находим
Угол между векторами	$\cos\alpha$
Перпендикулярность	$a \cdot b = 0$
Длина вектора	$a \cdot a = a ^2$
Работа силы	$A = F \cdot s \cdot \cos\alpha$

Одна формула помогает решать разные типы задач в геометрии и физике. В таблице показано, для чего именно она применяется чаще всего.

Скалярное произведение удобно там, где нужно связать направление, угол и величину одной записью.

Школьный курс геометрии и физики, 9 класс



Связь с физикой: работа силы



Когда сила помогает движению

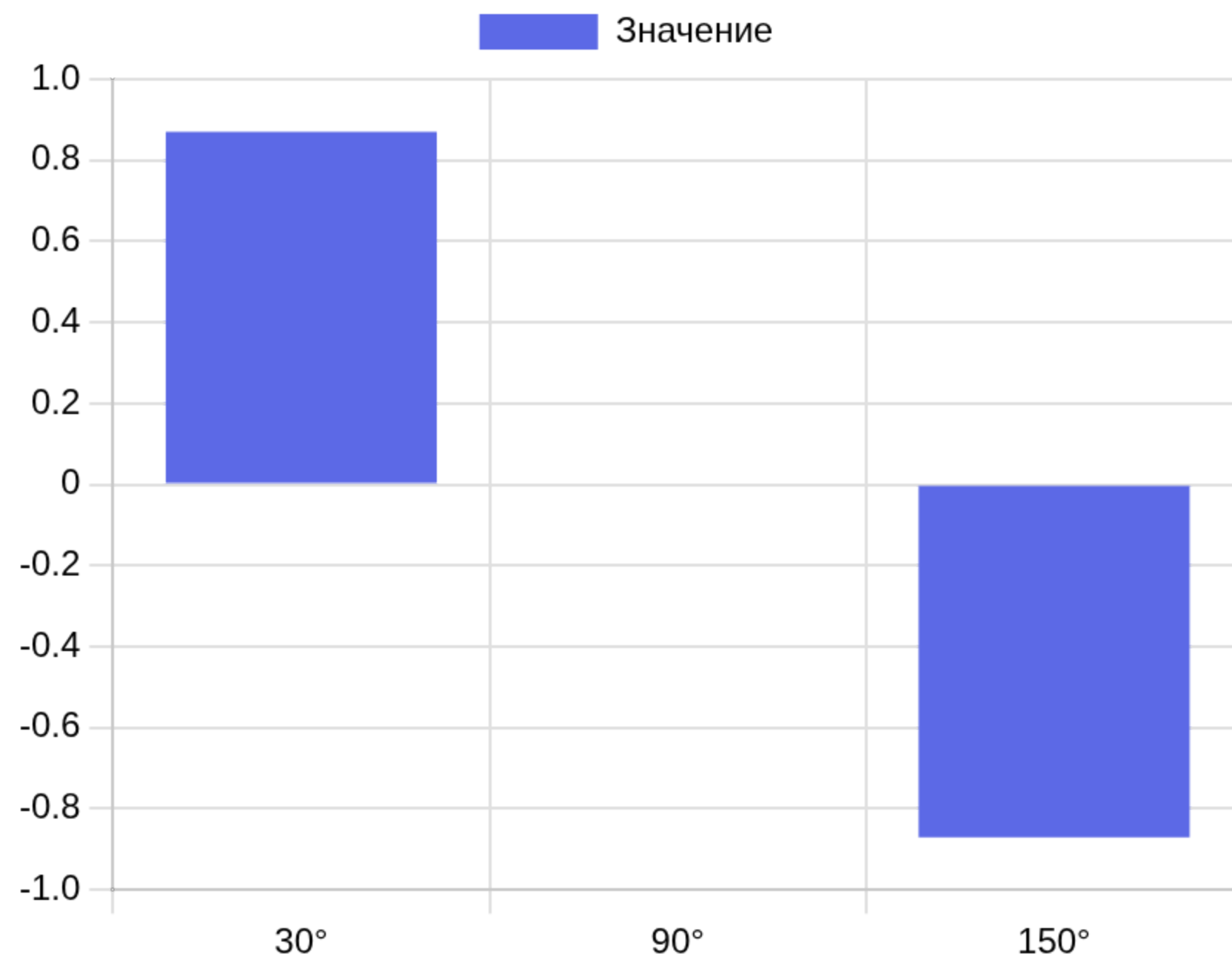
Если сила направлена в ту же сторону, что и движение, работа получается положительной. В такой ситуации сила не мешает перемещению, а помогает ему, поэтому формула $A = F \cdot s \cdot \cos \alpha$ даёт наибольшее значение.



Когда сила не совершает работу

Если сила действует строго под прямым углом к движению, работа равна нулю. В этом случае перемещение и сила не имеют общей направленности, поэтому $\cos 90^\circ = 0$ и формула даёт ноль.

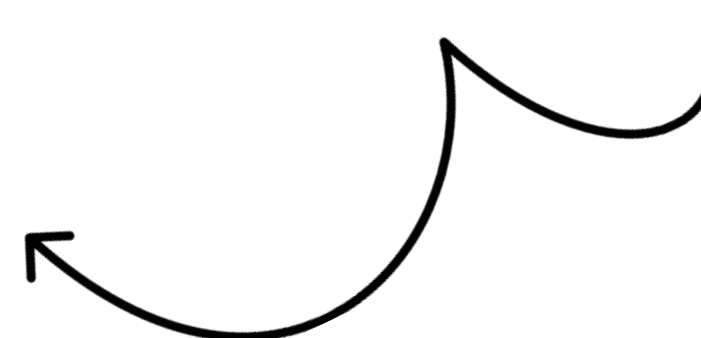
Случаи, когда скалярное произведение равно нулю



При одинаковых длинах векторов меняется только угол между ними. Поэтому удобно сравнить, как знак результата связан с направлением векторов.

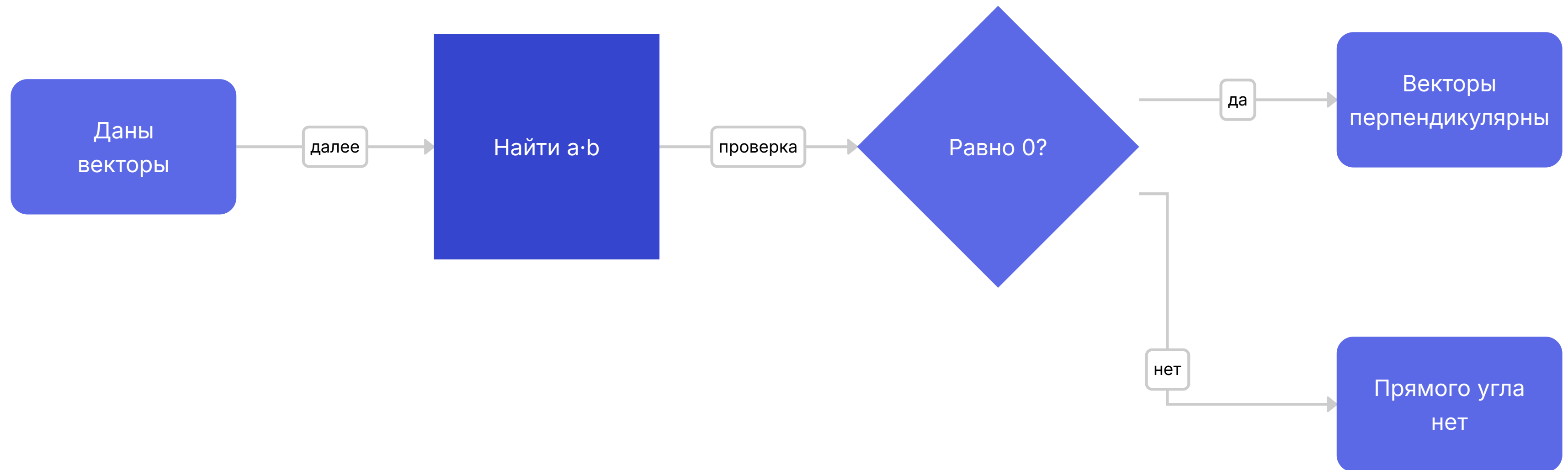
Нулевое значение возникает только при прямом угле; при острых углах результат положителен, при тупых — отрицателен.

Геометрическая зависимость скалярного произведения от $\cos\alpha$, школьный курс математики



Проверка перпендикулярности векторов

Алгоритм основан на вычислении скалярного произведения в координатах и проверке его равенства нулю.



Типичные ошибки при работе со скалярным произведением

Путаница с векторным произведением

Скалярное произведение даёт число, а не новый вектор. Если перепутать эти понятия, легко выбрать неверную формулу и получить ответ, который не подходит к задаче.

Ошибка в координатной формуле

В записи $x_1x_2 + y_1y_2$ нужно перемножать соответствующие координаты, а не складывать их. Именно произведения координат отражают совместное направление векторов.

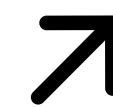
Неверный вывод по длинам

Одинаковые длины ещё не означают одинаковый знак скалярного произведения. Решающее значение имеет угол: при остром он положительный, при тупом — отрицательный.

Забытый нулевой случай

Если результат равен нулю, это не случайность, а признак прямого угла. Такой вывод особенно важен в задачах на перпендикулярность и построение фигур.

Мини-задача на понимание смысла формулы



01

Шаг 1: угол 60°

Пусть два вектора имеют одинаковые длины и образуют угол 60° . Для такого угла $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, поэтому формула сразу показывает, что результат будет положительным.

02

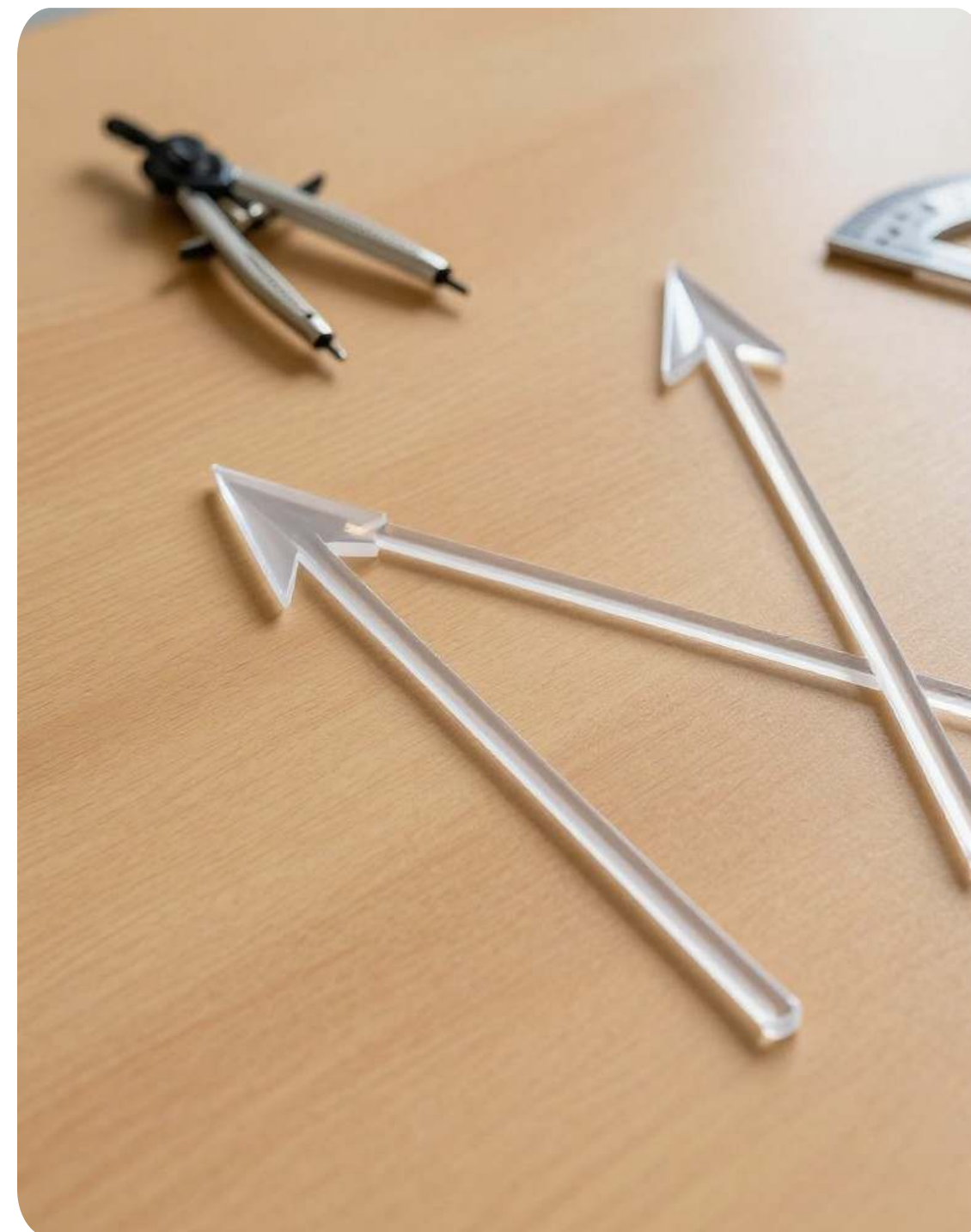
Шаг 2: значение произведения

Скалярное произведение равно половине произведения длин векторов. Оно меньше полного произведения, потому что векторы направлены не совсем одинаково, а лишь частично совпадают по направлению.

03

Шаг 3: вывод по смыслу

Чем меньше угол между векторами, тем ближе их скалярное произведение к произведению длин. В остром угле оно остаётся положительным, но не достигает максимума.



Алгоритм решения основных задач по теме



Что дано

Что делать

Координаты

Найти $a \cdot b$

Угол α

Взять $\cos \alpha$

Прямой угол

Проверить $a \cdot b = 0$

Найти угол

Вычислить $\cos \alpha$

Школьный курс геометрии, тема «Скалярное произведение»

В зависимости от того, что дано в условии, выбирают разные формулы. Таблица помогает быстро связать тип задачи с нужным действием.

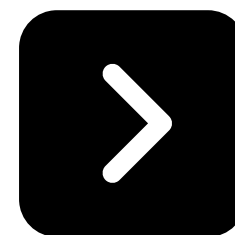
Сначала определяют, что известно в задаче, затем выбирают одну из двух формул и только после этого выполняют вычисления.

Что нужно запомнить по теме



Это число

Скалярное произведение не изображают стрелкой и не считают вектором. Его результат — обычное число, поэтому ответ можно сравнивать с нулём и использовать в формулах.



Связь с углом

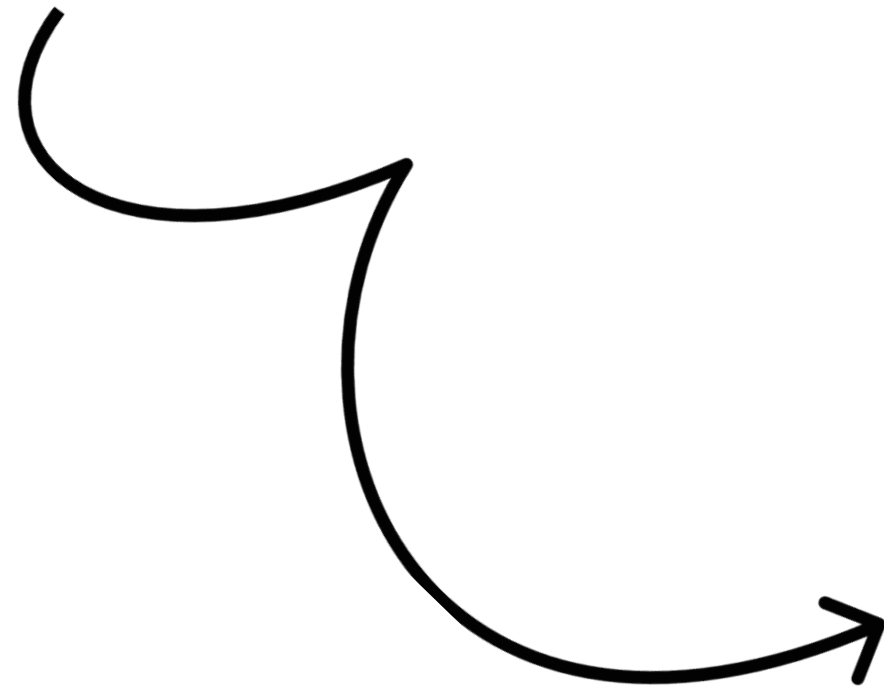
Знак и величина результата зависят от угла между векторами. При остром угле значение положительное, при прямом равно нулю, при тупом становится отрицательным.



Удобный расчёт

Координатная формула позволяет быстро находить ответ без чертежа и измерений. Это делает задачи 9 класса короче, точнее и удобнее для проверки.

Скалярное произведение: одна формула для разных задач



Скалярное произведение связывает направление, угол и длину в одном простом выражении. Оно помогает решать задачи по геометрии, понимать физику движения и уверенно работать с координатами.

