

Геометрическая прогрессия: как устроен быстрый рост и спад

Понятия, формулы и примеры быстрого изменения

Зачем нужна геометрическая прогрессия

01

Эта тема показывает, как числа меняются при постоянном умножении. Она помогает понимать проценты, накопление, уменьшение и сравнивать разные способы роста в задачах и в жизни.

Определение геометрической прогрессии

01

Главное правило

Геометрическая прогрессия — это последовательность, где каждый следующий член получается умножением предыдущего на одно и то же число.

02

Знаменатель q

Это постоянное число называют знаменателем прогрессии и обозначают q . Оно определяет, будет ли последовательность расти, убывать или чередовать знаки.

03

Как узнать прогрессию

Если отношение каждого члена к предыдущему одинаково, значит перед нами геометрическая прогрессия. Этот признак удобно проверять по соседним парам чисел.

04

Примеры

Подходят последовательности 2, 6, 18, 54; 81, 27, 9, 3; 5, 10, 20, 40. Во всех них действует одно и то же умножение.

Как выглядит прогрессия на конкретных числах

Удвоение

В последовательности 3, 6, 12, 24 каждый следующий член вдвое больше предыдущего, поэтому знаменатель равен 2.

Постепенное уменьшение

В ряду 100, 50, 25, 12,5 каждое число получается делением на 2. Здесь $q = 0,5$, и значения быстро становятся меньше.

Чередование знаков

Последовательность 4, -8, 16, -32 показывает отрицательный знаменатель. Из-за него числа поочерёдно меняют знак.

На что смотреть

На рисунке удобно показать столбики разной высоты: так видно, как постоянный множитель меняет темп роста или убывания.



Арифметическая и геометрическая прогрессии: сравнение

Сравнение помогает не путать два разных закона изменения чисел: прибавление и умножение.

Арифметическая прогрессия описывает равномерное изменение, а геометрическая — изменение с постоянным множителем.

Признак	Арифметическая	Геометрическая
Переход	+ одно число	× одно число
Пример	4, 7, 10	4, 8, 16

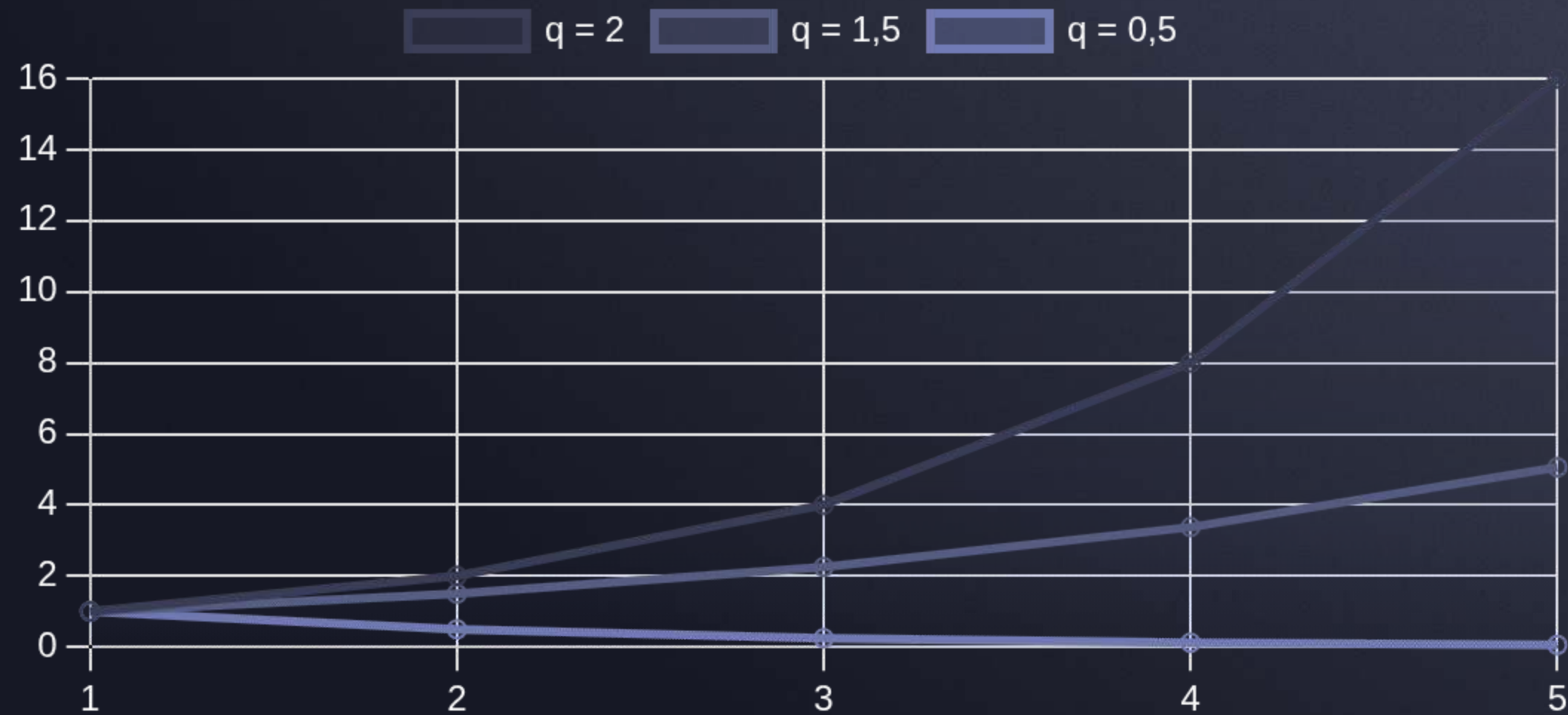
1

**означает, что все члены
последовательности
остаются одинаковыми**

Свойства геометрической прогрессии

Значение знаменателя полностью меняет поведение прогрессии: рост, спад, чередование знаков или полную неизменность.

Как меняется последовательность при разных q



Одинаковый первый член позволяет сравнить только влияние знаменателя на скорость изменения значений.

Чем больше q при значении больше 1, тем быстрее растут члены; при $0 < q < 1$ последовательность быстро убывает.

Иллюстративные вычисления по формуле $b_n = b_1 \cdot q^{(n-1)}$

Формула n-го члена геометрической прогрессии

01

Формула

Чтобы найти любой член прогрессии, используют запись $b_n = b_1 \cdot q^{(n-1)}$. Она показывает, как далеко нужно продвинуться от первого члена.

02

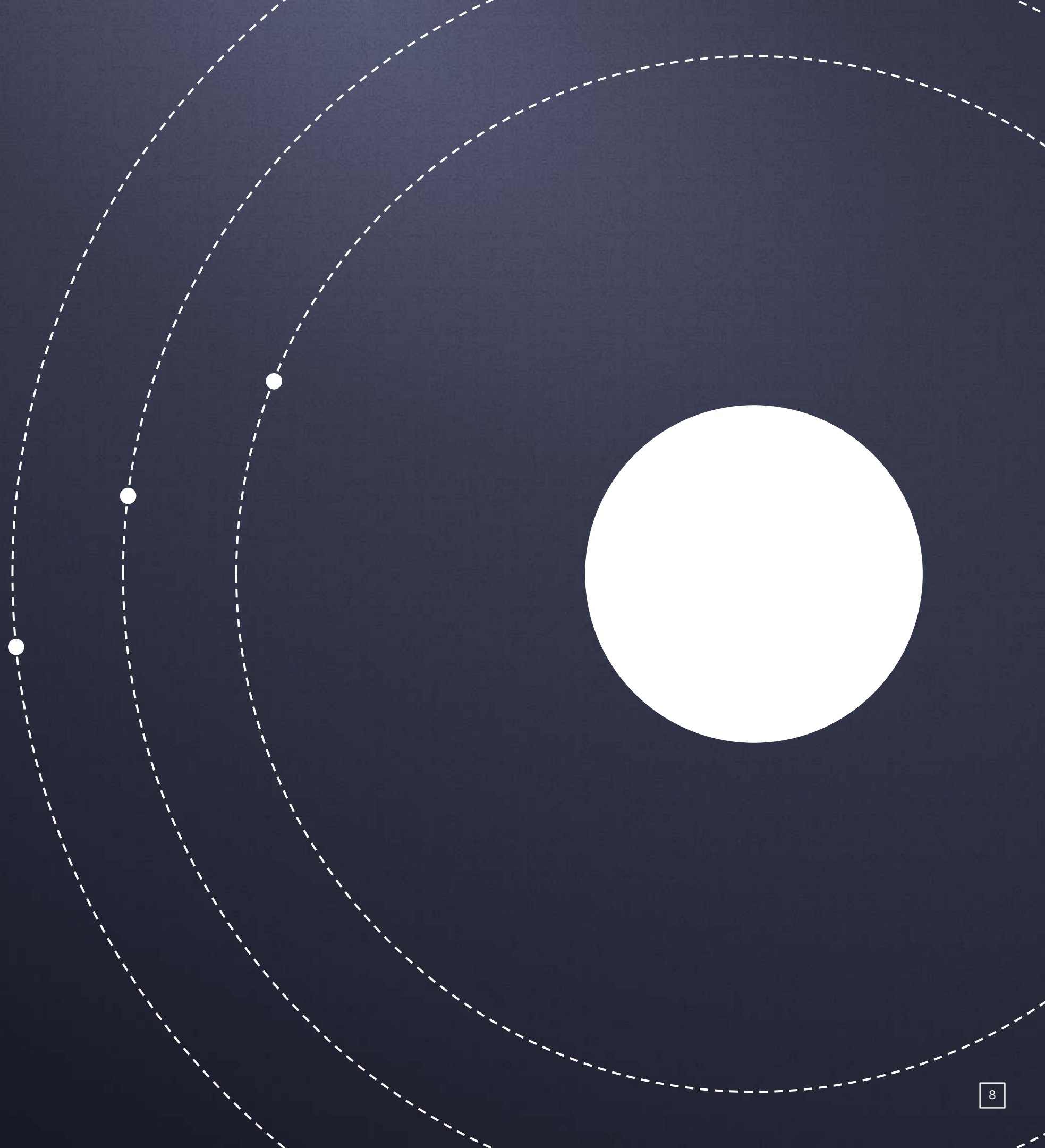
Что означают буквы

b_1 — первый член последовательности, q — знаменатель, n — номер нужного члена. Все три величины нужны для точного вычисления.

03

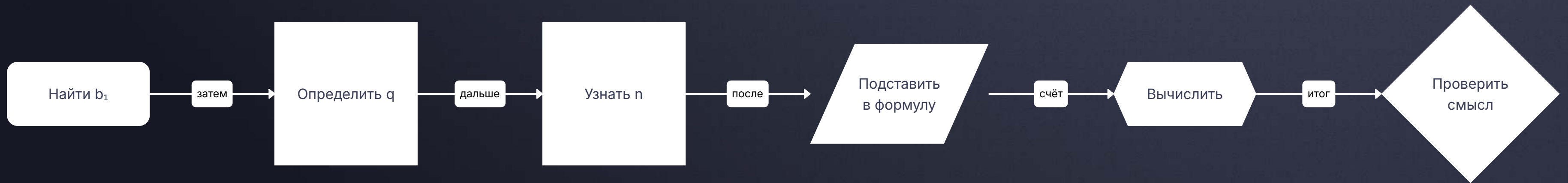
Пример вычисления

Если $b_1 = 5$ и $q = 3$, то $b_5 = 5 \cdot 3^4 = 405$. Формула избавляет от необходимости выписывать все промежуточные члены.



Алгоритм нахождения члена геометрической прогрессии

Последовательность действий при решении задачи по формуле $b_n = b_1 \cdot q^{(n-1)}$



Свойство соседних членов и проверка последовательности

Сравнить отношения

В геометрической прогрессии отношения соседних членов одинаковы: $b_2/b_1 = b_3/b_2 = b_4/b_3 = q$. Это первое, на что нужно смотреть при проверке.

Проверить последовательность

Если все отношения совпадают, последовательность можно считать геометрической. Если хотя бы одно отличается, правило уже нарушено.

Найти пропущенный член

Когда известны три подряд идущих числа, неизвестный член подбирают так, чтобы соседние отношения остались равными. Это помогает восстанавливать цепочку чисел.

Типичные ошибки при работе с геометрической прогрессией

Ошибка	Причина	Как правильно
Сложение	Путают с АП	Умножать на q
Нет $n-1$	Забывают номер	Подставлять точно
Потеря знака	$q < 0$	Следить за знаком
Неверный b_1	Путают члены	Проверять по формуле

Обобщение типичных ошибок при изучении геометрической прогрессии в школьном курсе алгебры.

Таблица показывает самые частые ошибки, их причины и способы избежать неточностей при вычислениях и проверке ответа.

Главная причина ошибок — смешение правил арифметической и геометрической прогрессий; проверка через отношение соседних членов быстро выявляет неточность.

Геометрическая прогрессия в жизни и на уроках

Банковский вклад растёт по шагам

Если деньги вкладу добавляют процент за процентом, сумма увеличивается не на одно и то же число, а каждый раз на новый процент от предыдущего результата. Именно так проявляется геометрическая прогрессия в финансовых расчётах и примерах про накопление.



Клетки и рост в природе

Когда клетка делится, количество может удваиваться, а не прибавляться понемногу. Такой рост удобно описывать геометрической прогрессией, потому что каждый следующий этап зависит от предыдущего и повторяет одно и то же правило умножения.

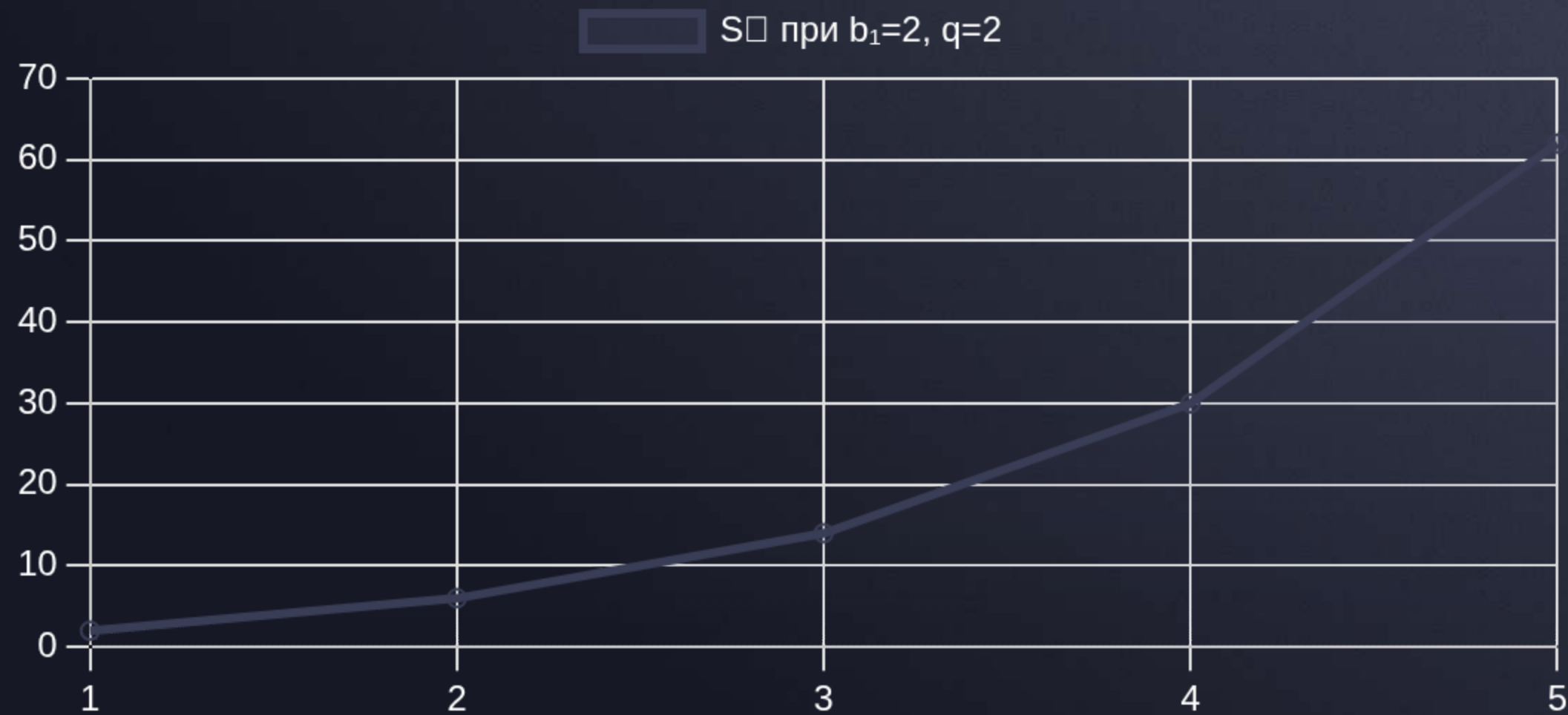


Масштабирование и изображение

При уменьшении картинки или схеме с повторяющимся делением размеры последовательно меняются в одинаковое число раз. Это помогает увидеть геометрическую прогрессию в технике, чертежах и моделях, где важно сохранять общий коэффициент изменения.



Как растёт сумма первых членов



Даже при небольшом первом члене сумма быстро увеличивается, потому что каждый новый член тоже растёт и добавляется к предыдущим.

Сумма зависит одновременно от первого члена, знаменателя и количества слагаемых; при $q>1$ рост становится особенно заметным.

Расчёт по формуле суммы первых членов для последовательности $b_1=2, q=2$.

Формула суммы первых n членов

01

Когда q не равно 1

Для геометрической прогрессии с $q \neq 1$ удобно использовать формулу $S_n = b_1 \cdot (q^n - 1) / (q - 1)$. Она сокращает длинные вычисления и помогает быстро получить сумму большого числа членов.

02

Особый случай $q=1$

Если $q=1$, все члены одинаковы и равны b_1 . Тогда сумма находится ещё проще: $S_n = b_1 \cdot n$, потому что каждое слагаемое повторяется без изменений.

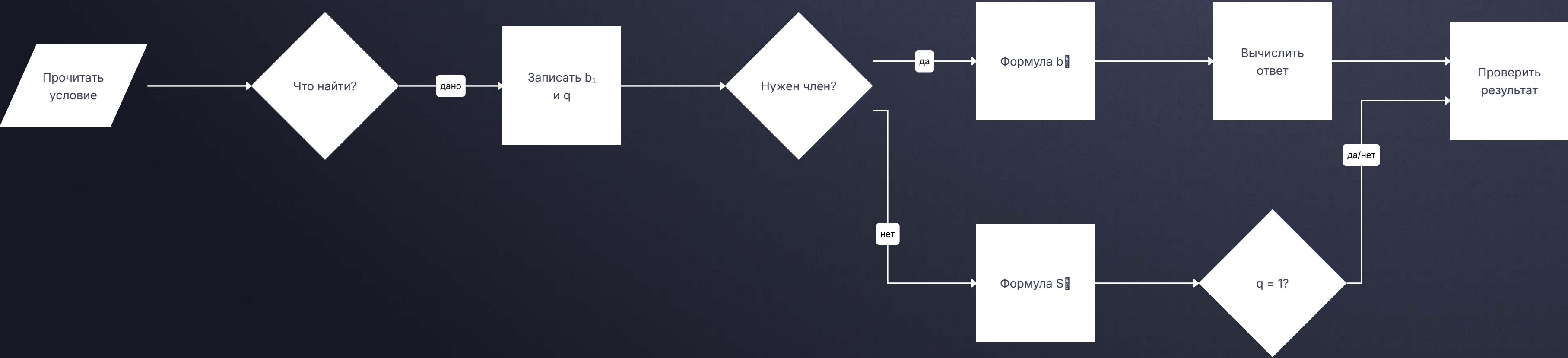
03

Где формула особенно полезна

Эта запись нужна в задачах на проценты, накопление и повторяющиеся действия. Она позволяет сразу увидеть, как меняется результат при изменении первого члена, знаменателя или числа шагов.

Алгоритм решения задач на сумму членов

Последовательность шагов помогает не перепутать формулу для отдельного члена и формулу суммы.



Геометрическая средняя и пропущенный член



Связь трёх членов

Если между двумя числами нужно вставить одно число, чтобы получилась геометрическая прогрессия, его называют геометрической средней. Для трёх подряд идущих членов выполняется правило $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$.



Как найти значение

Из равенства следует $b_2 = \sqrt{b_1 \cdot b_3}$, если нужны положительные числа. Так можно быстро восстановить пропущенный член, не подбирая его перебором и не выписывая всю последовательность.



Простой пример

Между 4 и 36 легко вставить 12, потому что $12^2 = 4 \cdot 36$. Проверка показывает, что отношение соседних членов остаётся одинаковым и прогрессия сохраняется.

Сравнение прогрессий с разными знаменателями



Одинаковый первый член позволяет увидеть, что именно знаменатель определяет форму последовательности и скорость изменения значений.

Чем больше q при $q > 1$, тем быстрее рост; при $0 < q < 1$ значения убывают и быстро стремятся к малым числам.

Вычисления по формуле $b_n = b_1 \cdot q^{(n-1)}$ при $b_1=1$.

Мини-задачи для проверки понимания

Найти шестой член

Для последовательности 2, 4, 8, 16, ... нужно определить, как меняется каждый член, и затем найти b_6 по формуле. Такое задание проверяет умение видеть постоянное умножение.

Вставить пропущенный член

Если дано 5, —, 45, нужно подобрать число так, чтобы отношение соседних членов осталось одинаковым. Здесь полезно вспомнить правило геометрической средней и проверить ответ умножением.

Определить знаменатель

В последовательности 81, 27, 9, 3, ... важно сравнить соседние числа и установить, на какое число каждый раз делят. Это помогает точно найти q и распознать убывание.

Проверить тип последовательности

Последовательность 7, 14, 28, 56, ... можно сразу проверить по отношению соседних членов. Если оно постоянно, значит перед нами геометрическая прогрессия, а не просто случайный ряд чисел.

Где ещё встречается геометрическая прогрессия

Жизнь клетки и деление без остановки

Когда одна клетка делится на две, а затем каждая из них тоже делится, число быстро увеличивается по одинаковому правилу. Такой процесс удобно описывать геометрической прогрессией, потому что каждый шаг повторяет предыдущее умножение.



От ветки дерева до снежинки Коха

В природе и в моделях можно увидеть повторение одной и той же схемы: маленькие части похожи на большие, а детали появляются снова и снова. Фрактальные рисунки показывают, как простое правило создаёт сложную форму и напоминает геометрический рост.



Главные выводы по теме «Геометрическая прогрессия»

Геометрическая прогрессия помогает описывать быстрый рост и убывание, а её формулы позволяют считать члены и суммы без лишних шагов. Эта тема нужна для задач, где всё меняется по одному и тому же правилу.

