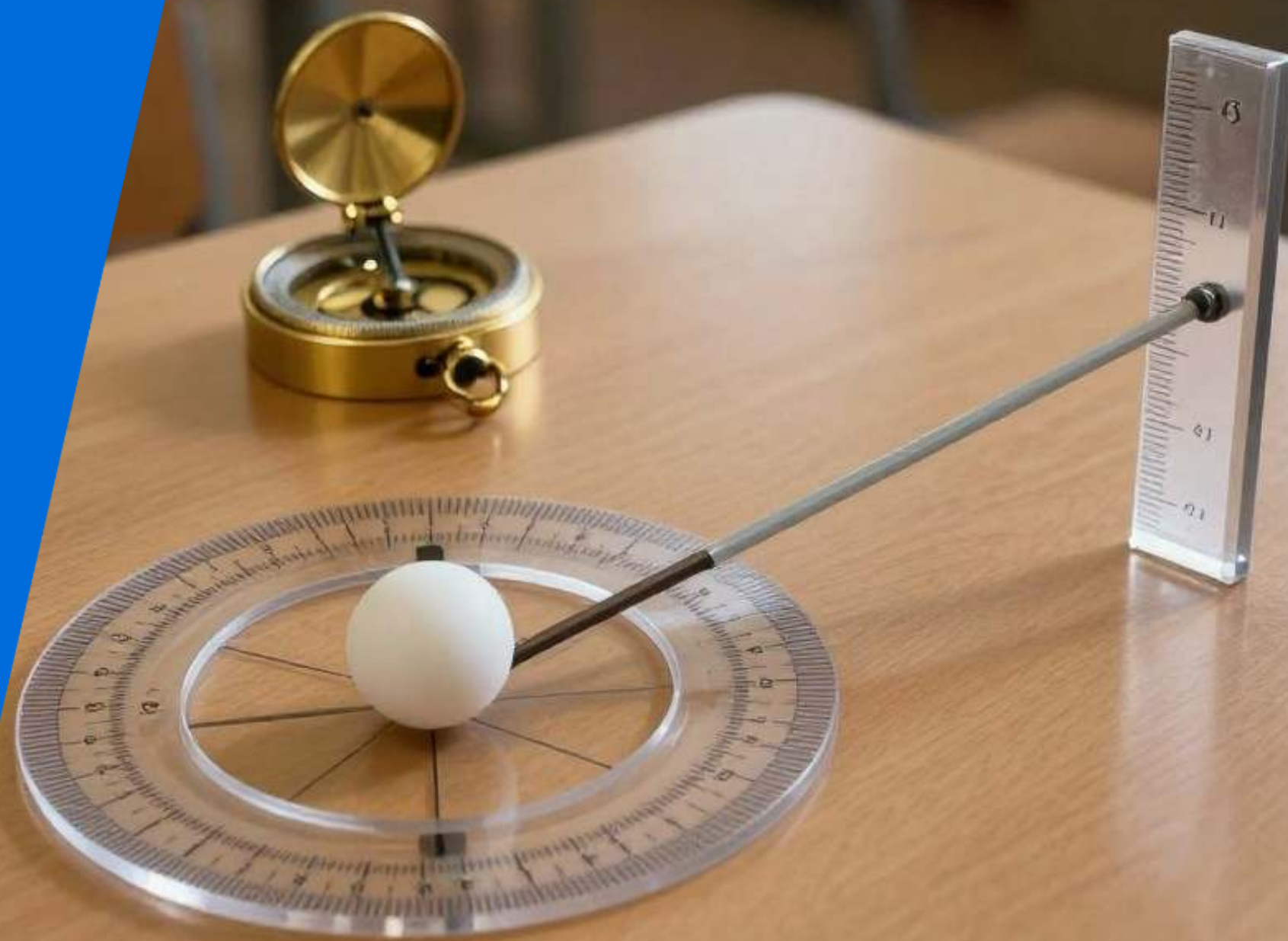


Арккосинус и уравнение $\cos t = a$

Понимаем арккосинус и учимся решать $\cos t = a$ с учётом диапазона, периода и симметрии.



Почему эта тема изучается в 10 классе

Арккосинус входит в тригонометрию и опирается на единичную окружность, периодичность и график косинуса. Уравнение $\cos t = a$ — базовая модель, где важно помнить: косинус принимает только значения от -1 до 1 и повторяется с периодом 2π .



Косинус на единичной окружности

На единичной окружности значение $\cos t$ равно абсциссе точки, соответствующей углу t . Именно координата по оси Ox определяет, в какую «сторону» поворачивается точка для данного $\cos t$.

Максимум $\cos t$ равен 1 и достигается при $t = 2\pi k$, а минимум равен -1 и достигается при $t = \pi + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. В этих положениях точка лежит на концах диаметра.

Между максимумом и минимумом функция меняется непрерывно: при увеличении t косинус проходит путь от 1 до -1 и обратно. Поэтому уровень $y = a$ может пересекаться с графиком по-разному в зависимости от a .

График косинуса и горизонтальная прямая $y = a$

- График $y = \cos t$ пересекает прямую $y = a$ только при $a \in [-1; 1]$. Если $|a| > 1$, пересечений нет, потому что косинус по определению не выходит за границы своего диапазона.
- При $-1 < a < 1$ в каждом периоде обычно получаются две точки пересечения, то есть два семейства решений. Для $a = 1$ и $a = -1$ прямая касается графика в вершинах, поэтому решений ровно по одному семейству.



Как число решений зависит от значения a

Параметр a	Число решений	Форма корней
$a > 1$	нет решений	—
$a = 1$	одно семейство	$t = 2\pi k$
$-1 < a < 1$	два семейства	$t = \pm \dots + 2\pi k$
$a = -1$	одно семейство	$t = \pi + 2\pi k$
$a < -1$	нет решений	—

Таблица параметра a показывает, когда уравнение $\cos t = a$ имеет решения и сколько семейств корней получаются за один период.

Главный вывод: существование решений определяется условием $|a| \leq 1$; при внутренних значениях $(-1, 1)$ уровень пересекает график дважды за период.

Определение арккосинуса

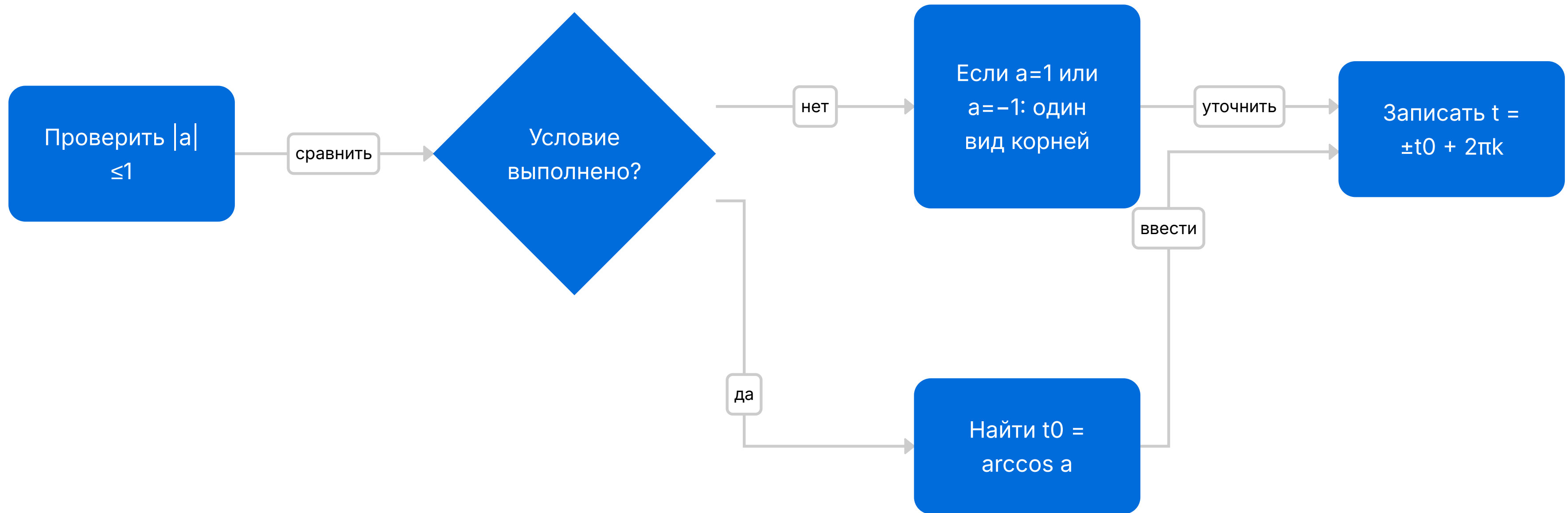
Арккосинус числа a обозначается $\arccos a$. Это угол из отрезка $[0; \pi]$, у которого косинус равен a , то есть $\cos(\arccos a) = a$.

Равенство $\cos(\arccos a) = a$ имеет смысл и верно только при $a \in [-1; 1]$. Если a выходит за этот диапазон, обратиться к $\arccos a$ нельзя: такого угла не существует.

Почему именно $[0; \pi]$? Выбор промежутка делает обратную функцию однозначной: одному значению a сопоставляется ровно один угол, а не бесконечное множество симметричных.

Алгоритм решения уравнения $\cos t = a$

Общий порядок действий основан на диапазоне косинуса, определении $\arccos$ и периодичности 2π .



Симметрия решений на одном периоде

Для $-1 < a < 1$ решения симметричны относительно $t = 0$: если t — корень, то $-t$ тоже является корнем.

За один период уровень $y = a$ пересекает график дважды при внутреннем значении a и один раз в точках касания при $a = \pm 1$.

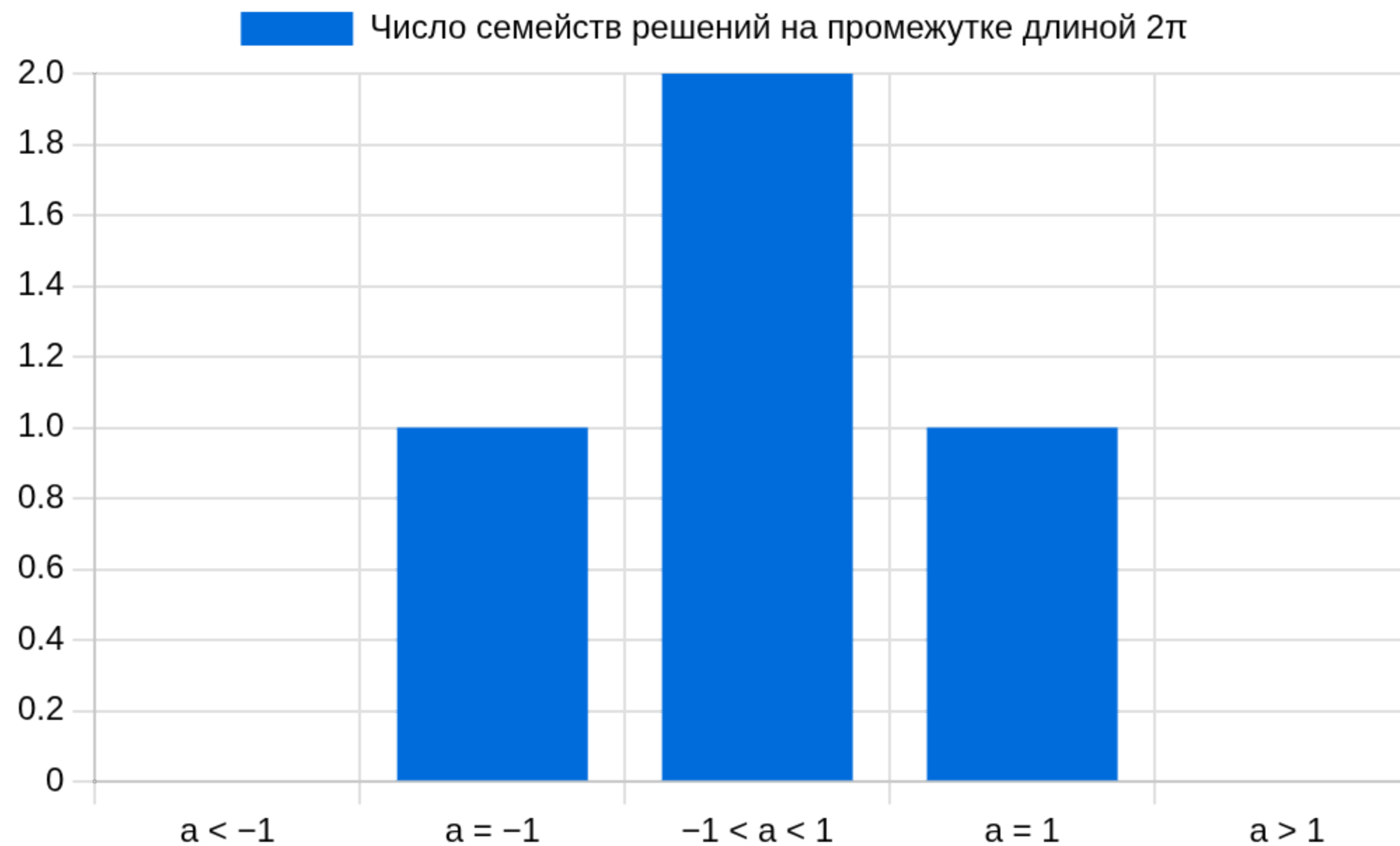


Схема отражает пересечения $y = \cos t$ и $y = a$, с учётом периодичности 2π .

Общая формула решения

При $a \in [-1; 1]$ уравнение $\cos t = a$ записывается через арккосинус: $t = \pm \arccos a + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Эта формула объединяет два семейства корней, которые появляются при $-1 < a < 1$ благодаря симметрии $\cos t = \cos(-t)$.

Если же $|a| > 1$, общая формула не применяется: соответствующего значения косинуса не существует, значит решений нет вовсе.

Особые случаи: $a = 1$ и $a = -1$

При $a = 1$ имеем $\arccos 1 = 0$, поэтому $\cos t = 1$ выполняется только при $t = 2\pi k$. Вершина косинуса даёт единственное семейство корней.

При $a = -1$ получаем $\arccos(-1) = \pi$, и потому $\cos t = -1$ даёт $t = \pi + 2\pi k$. Здесь снова работает один периодический набор.

В этих крайних значениях два «половинных» семейства совпадают, поэтому уравнение не требует отдельного рассмотрения знака $\pm$: ответ один и тот же для всех t за счёт симметрии.

Типичные ошибки при решении

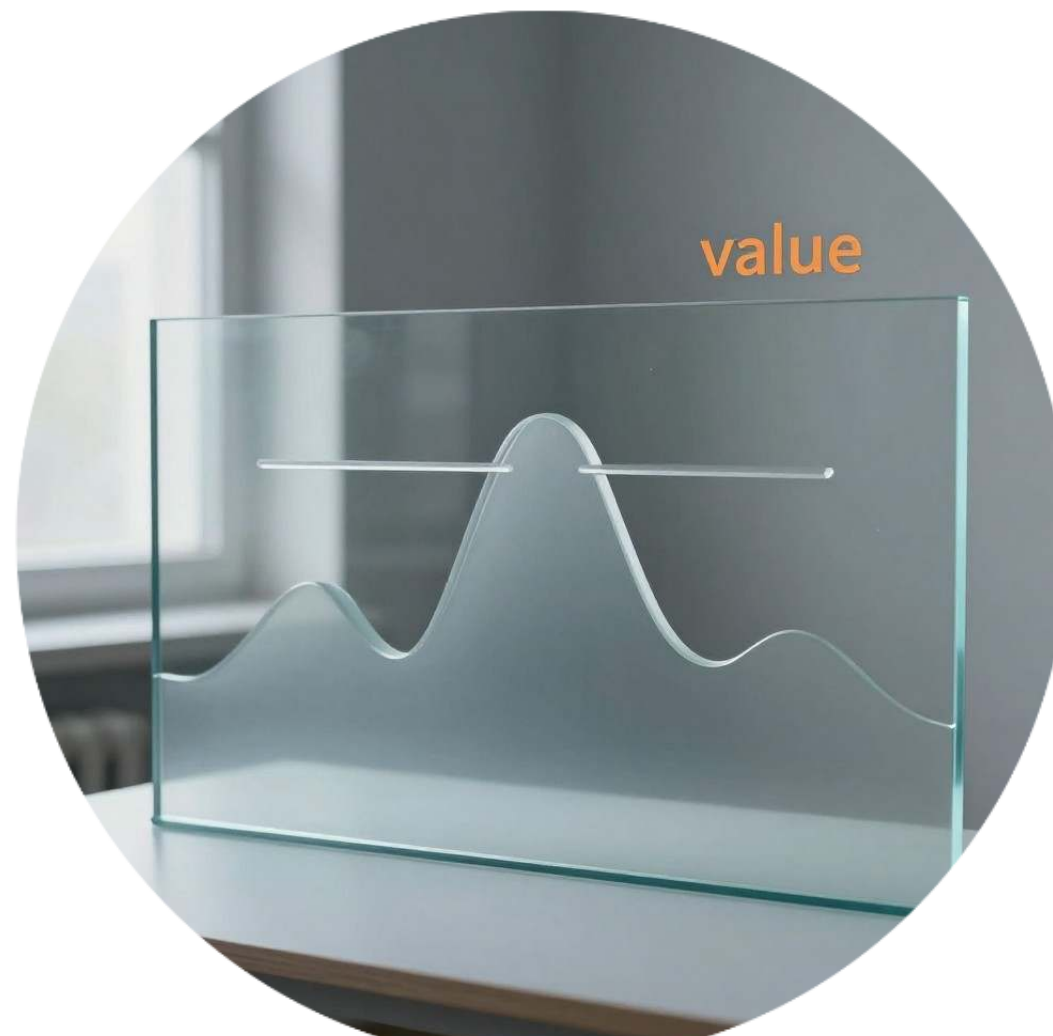
Потеря периодичности: забыли про « $+2\pi k$ »

После вычисления t_0 многие останавливаются на одном угле и пишут $t = \arccos a$ или $t = -\arccos a$. Но косинус повторяется с периодом 2π , поэтому корни нужно собирать семейством $t = \dots + 2\pi k$. В итоге ответ получается неполным, хотя главный угол верный.



Неверное применение арккосинуса при $|a| > 1$

Иногда сразу подставляют a в формулу $t = \pm \arccos a$, не проверив допустимый диапазон значений. Однако арккосинус определён только для $a \in [-1; 1]$, а косинус никогда не выходит за эти границы. При $|a| > 1$ пересечений нет, и решений действительно не существует.



Упущено второе семейство при $-1 < a < 1$

Для внутренних значений a (между -1 и 1) прямая $y = a$ пересекает график $y = \cos t$ дважды за период. Из-за симметрии решений обычно получается $t = +t_0 + 2\pi k$ и $t = -t_0 + 2\pi k$. Если записать только один знак, половина корней потеряется.



Примеры точных значений косинуса

cos t	Углы t
0	$\pi/2 + 2\pi k$ и $3\pi/2 + 2\pi k$
1/2	$\pm\pi/3 + 2\pi k$
-1/2	$\pm 2\pi/3 + 2\pi k$
1	$2\pi k$
-1	$\pi + 2\pi k$

Школьный курс тригонометрии: значения на единичной окружности

Подборка показывает, как конкретные значения косинуса превращаются в точные углы на единичной окружности и дают два семейства корней (кроме крайних случаев).

Точные ответы удобно получать, соотнося a с абсциссой точки окружности. При $-1 < a < 1$ обычно возникает два семейства, при $a = \pm 1$ — одно.

Уравнения вида $\cos f(x)=a$

Когда аргумент косинуса содержит выражение, нельзя считать, что $f(x)$ уже равно углу. Сначала решают базовое уравнение $\cos t=a$, находят t и только потом подставляют результат в $f(x)=t$, получая уравнения относительно x .

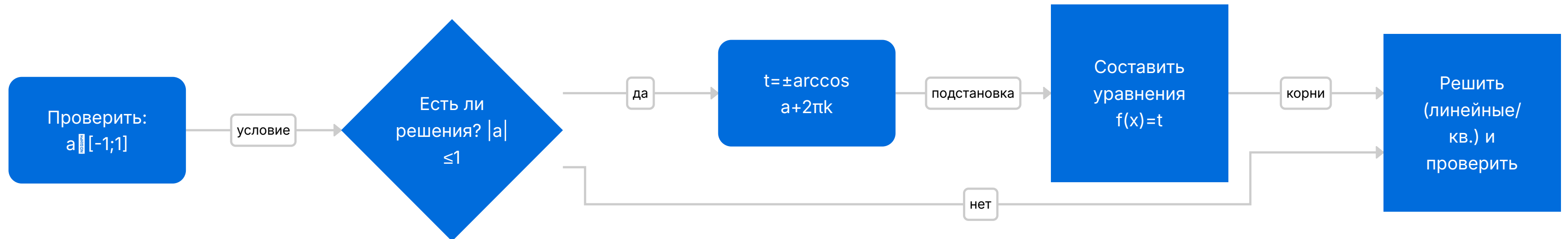
Для $\cos(2x-1)=1/2$ сначала определяют главный угол: $\arccos(1/2)=\pi/3$, значит $2x-1=\pm\pi/3+2\pi k$. Здесь переменная x появляется линейно, поэтому дальнейшие шаги быстро сводятся к двум простым уравнениям.

Запись $\pm\pi/3+2\pi k$ объединяет все решения за счёт периодичности косинуса. Важно удерживать $k\in\mathbb{Z}$ до конца: оно влияет на множество корней, даже если на вид получается одинаковый ответ для разных ветвей.

После получения x следует проверить, что все найденные корни действительно удовлетворяют исходному уравнению, особенно если в $f(x)$ есть ограничения (например, выражение делением или корнем). Это предупреждает ошибки из-за «посторонних» значений.

Решение уравнений с выражением внутри косинуса

Схема показывает общий алгоритм для $\cos f(x)=a$ с учётом периода и проверки условий



Сколько корней имеет уравнение при разных значениях a

Число семейств определяется тем, пересекает ли прямая $y=a$ график косинуса за один период. Внутри диапазона возникают две точки, по краям — касание.

Максимум решений за период — при $-1 < a < 1$: две симметричные точки. Вне отрезка решений нет, а при $a = \pm 1$ корни «сливаются» в одно семейство.



Графический анализ пересечений $y = \cos t$ и $y = a$ (школьная тригонометрия, период 2π)

Геометрический смысл уравнения

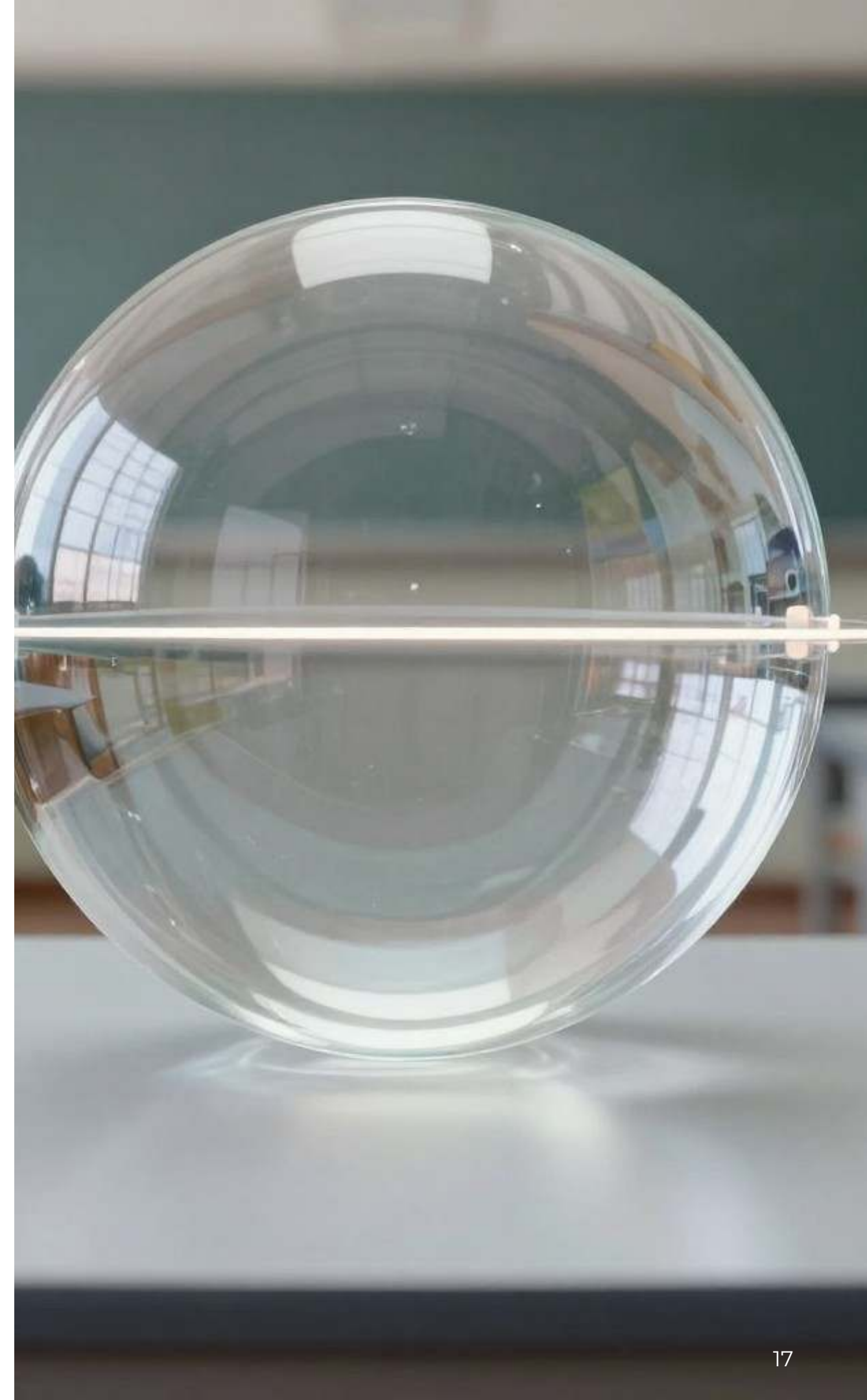
Уравнение $\cos t = a$ можно понимать как поиск точек, где график $y = \cos t$ имеет ординату, равную числу a . Тогда решения — это абсциссы точек пересечения графика с горизонтальной прямой $y = a$.

На единичной окружности каждому углу t соответствует точка с координатой $x = \cos t$. Значит условие $\cos t = a$ превращается в задачу: найти углы, для которых абсцисса равна заданному a .

Геометрия сразу объясняет допустимый диапазон: абсцисса точки окружности не может быть меньше -1 и больше 1 . Поэтому существование решений возможно только при $|a| \leq 1$, иначе пересечений не бывает.

Связь с единичной окружностью

- На единичной окружности для каждого значения косинуса при $-1 < a < 1$ есть две симметричные точки относительно оси Ox . Они соответствуют двум углам: один «справа» и второй «слева» от оси под тем же t по модулю.
- Отсюда следует: один и тот же косинус обычно соответствует двум углам, отличающимся знаком и добавлением периода 2π . Когда $a=1$ или $a=-1$, симметрия вырождается: вместо двух точек получается одна, поэтому остаётся только одно семейство корней.



Сводка формул для ответов

Условие на a	Общий вид решений t
$ a > 1$	нет решений
$-1 < a < 1$	$\pm \arccos a + 2\pi k$
$a = 1$	$2\pi k$
$a = -1$	$\pi + 2\pi k$

Короткая таблица помогает быстро записать общее решение, не забывая про период $2\pi k$ и отдельные случаи при $a = \pm 1$.

Единственный критерий существования корней — принадлежность a отрезку $[-1; 1]$. Внутри него решений два (два семейства), на концах — одно.

Практическое значение темы в школьной математике



Тригонометрические уравнения

Арккосинус помогает находить углы, когда уравнение сводится к виду $\cos t = a$. Умение быстро проверять допустимость a и записывать t с периодом $2\pi k$ напрямую влияет на качество решения задач.



Задачи с параметром

Во многих заданиях параметр входит в a : $\cos t = a(p)$. По условию существования решений ($|a| \leq 1$) можно сразу определить, при каких значениях параметра уравнение имеет корни, а когда — нет.



Сведение сложного к простому

Если встречается $\cos f(x) = a$, сначала решают внешнее уравнение $\cos t = a$, затем приравнивают $f(x) = t$. Такой план превращает задачу в более знакомые алгебраические уравнения и снижает риск ошибок.



Контроль ошибок

Понимание двух семейств корней при $-1 < a < 1$ и особых случаев при $a = \pm 1$ помогает проверять ответы. По геометрии пересечений можно быстро оценить, сколько корней должно получиться за период.

Главный итог: косинус задаёт углы через арккосинус и геометрию

Арккосинус — обратная функция к косинусу на $[0; \pi]$ и используется только при $a \in [-1; 1]$. Для $-1 < a < 1$ корни записываются $t = \pm \arccos a + 2\pi k$, а при $a = \pm 1$ остаётся один тип решений.