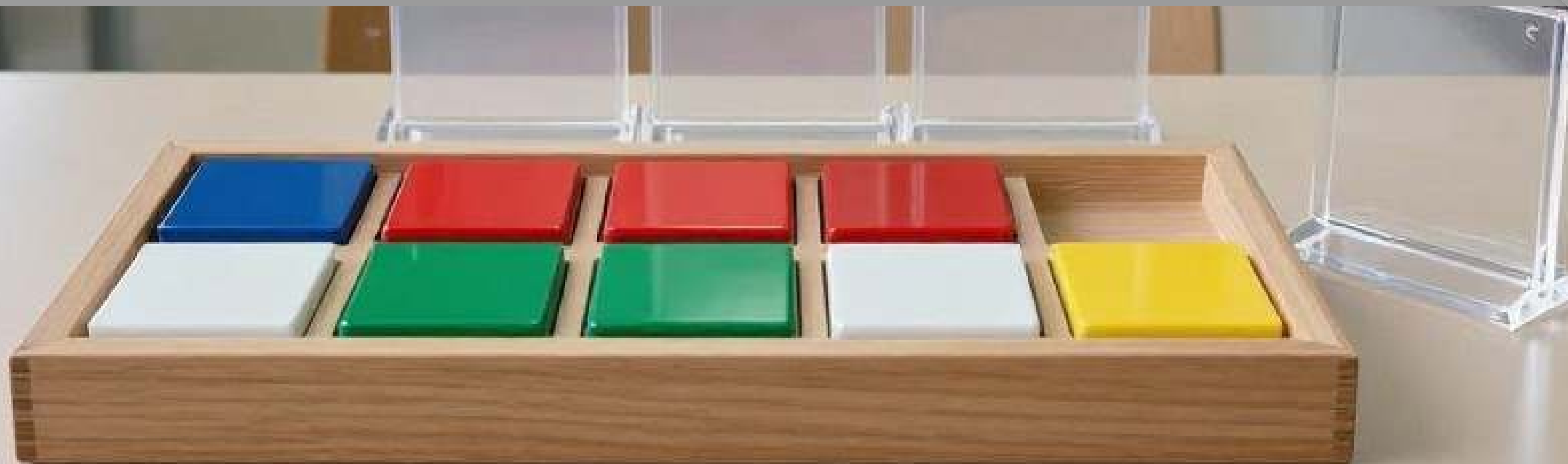


# Размещения: упорядоченный выбор в комбинаторике

Как посчитать варианты, когда порядок выбора действительно важен?



# Комбинаторика и место размещений

Комбинаторика помогает считать варианты выбора и расположения объектов. Размещения показывают, как меняется результат, если важен порядок, а состав элементов может быть одинаковым. Это базовая тема для задач 10 класса.



# Определение размещения без повторений



1

## Упорядоченный выбор

Размещение без повторений — это выбор  $k$  различных объектов из  $n$ , где каждый объект берется не более одного раза, а порядок расположения выбранных элементов обязательно учитывается.



2

## Разные порядки — разные варианты

Если те же самые объекты поставить в другом порядке, получится новый вариант. Поэтому при размещениях важны не только выбранные элементы, но и их последовательность.



3

## Пример из школы

Назначение президента, вице-президента и секретаря из 12 учеников — это размещение без повторений: роли различны, значит, перестановка людей по должностям меняет итоговый результат.

# Формула числа размещений без повторений

4



# Сравнение видов комбинаторного выбора

| Вид                       | Порядок | Формула   |
|---------------------------|---------|-----------|
| Размещения без повторений | Да      | $A(n, k)$ |
| Размещения с повторениями | Да      | $n^k$     |
| Сочетания                 | Нет     | $C(n, k)$ |
| Перестановки              | Да      | $n!$      |

- Сопоставление основных типов выбора помогает быстро определить нужную формулу по смыслу задачи.
- Порядок отличает размещения от сочетаний, а перестановки используют все объекты сразу. Повторения ведут к отдельной формуле  $n^k$ .



## Примеры размещений из школьной жизни

### Призовые места

На олимпиаде или конкурсе I, II и III места образуют размещение: участники одни и те же, но порядок награждения меняет итоговый вариант.

### Распределение ролей

Если в классе назначают старосту, заместителя и ответственного за проект, то выбор считается размещением, потому что каждая должность отличается от других.

### Дежурства и графики

При составлении расписания дежурств порядок распределения учеников по дням или постам важен, поэтому такие задачи удобно описывать размещениями.

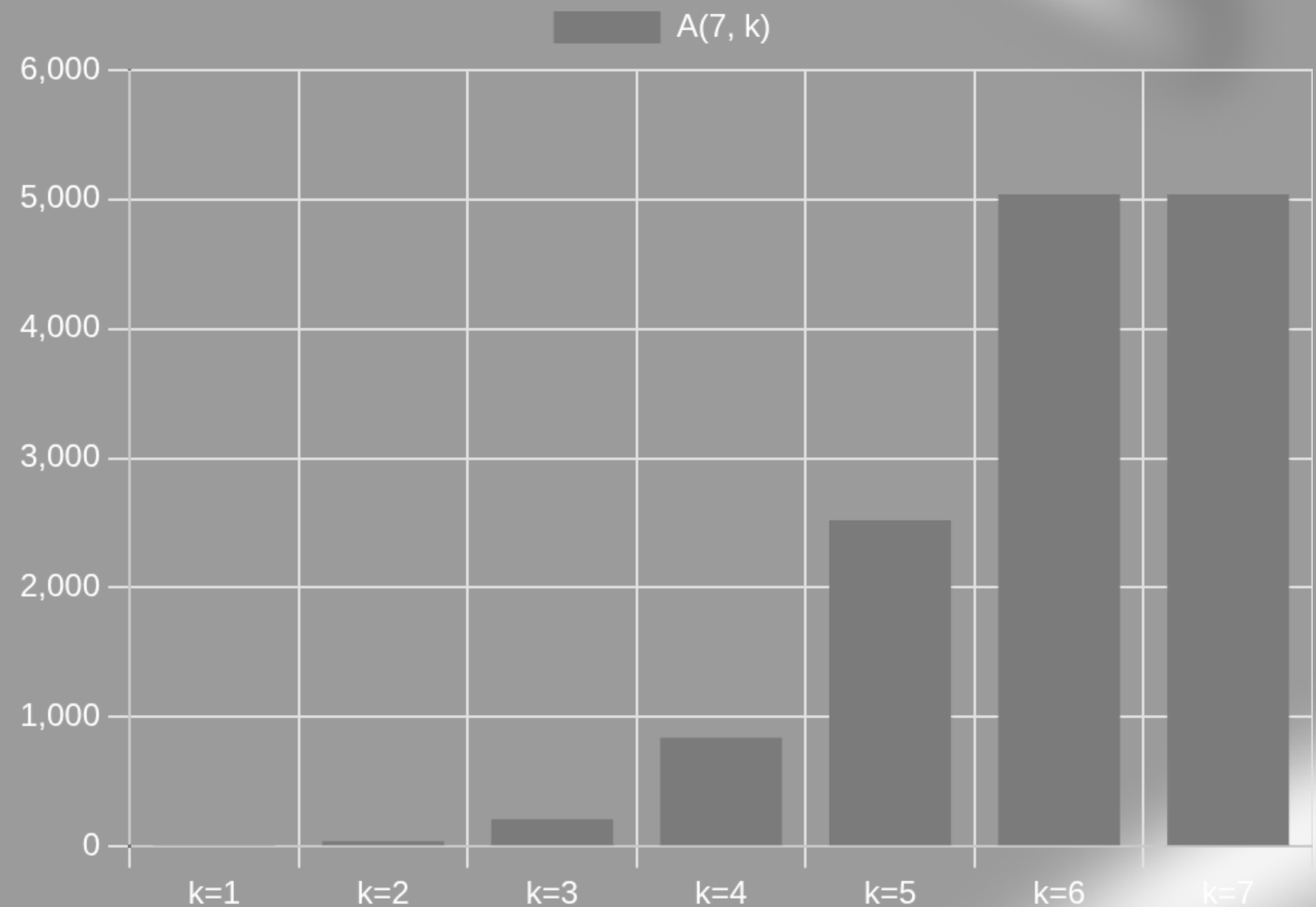
### Наглядный вывод

Во всех этих ситуациях один и тот же набор людей даёт разные результаты, если меняется последовательность или роль каждого участника.

# Рост числа размещений при увеличении $k$

7

- При фиксированном  $n=7$  добавление каждого нового места резко увеличивает число вариантов, потому что к выбору подключается ещё один множитель.
- Число размещений растёт очень быстро и при  $k=n$  достигает  $7!$ , то есть максимума для неповторного упорядоченного выбора.



Вычисления по формуле  $A(n, k) = n! / (n-k)!$

# Размещения с повторениями



## Когда повторения допустимы

Если один и тот же объект можно использовать несколько раз, речь идёт о размещениях с повторениями. Тогда каждый из  $k$  шагов имеет по  $n$  вариантов.

## Формула подсчёта

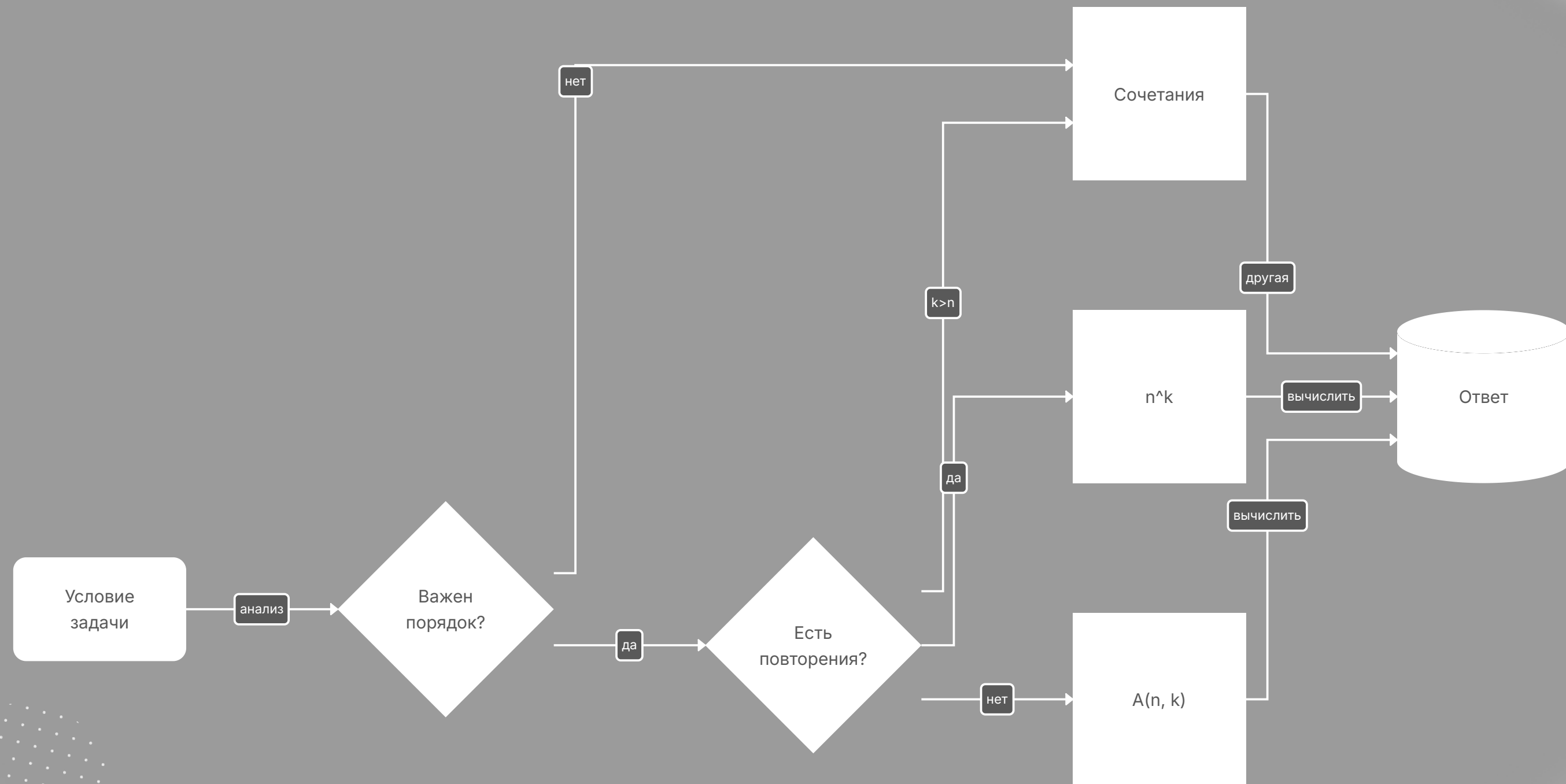
Число таких вариантов вычисляют по формуле  $A(n, k) = n^k$ . Она особенно удобна, когда выбор идёт по позициям, а ограничения на повторение отсутствуют.

## Пример с PIN-кодом

Для четырёхзначного PIN-кода из 10 цифр получаем  $10^4 = 10000$  вариантов. Разрешение повторений заметно расширяет пространство возможных кодов.

# Алгоритм решения задач на размещения

Схема показывает последовательность проверки условий перед выбором формулы.



# Как отличить размещения от сочетаний

10

## Роль порядка

Если перестановка тех же элементов даёт новый вариант, это размещение. Когда порядок не влияет на результат, речь идёт о сочетании.

## Смысл выбора

Размещение используют, когда нужно распределить места, должности или позиции. Сочетание подходит для выбора группы без закрепления ролей.

## Проверка на примере

Капитан и его помощник из одной команды — это размещение, потому что роли различны. Два ученика в команду без ролей — это сочетание.

# Граничные случаи и важные свойства

**1**

## Один выбранный объект

Если нужно выбрать только один объект, то число вариантов равно количеству доступных элементов:  $A(n, 1) = n$ . Это естественный частный случай, который удобно использовать для быстрой проверки формулы и ответа.

**2**

## Используются все объекты

Когда выбирают все  $n$  объектов и порядок важен, получаем  $A(n, n) = n!$ , то есть число всех перестановок. Такое равенство показывает, что размещения без повторений обобщают перестановки.

**3**

## Выбор больше наличия

При  $k > n$  размещения без повторений невозможны, потому что нельзя составить упорядоченный набор из большего числа различных позиций, чем есть объектов. Это условие сразу отсеивает некорректные задачи.

**4**

## Проверка результата

Эти свойства помогают контролировать вычисления: если ответ при  $k=1$  не равен  $n$  или при  $k=n$  не совпадает с факториалом, значит, формула применена неверно либо условие задачи понято ошибочно.

# Типовые числовые примеры

- Примеры показывают, как меняется число вариантов при разных n, k и типе размещения.
- Даже небольшое увеличение числа позиций резко повышает количество вариантов, а повторения делают рост ещё заметнее.

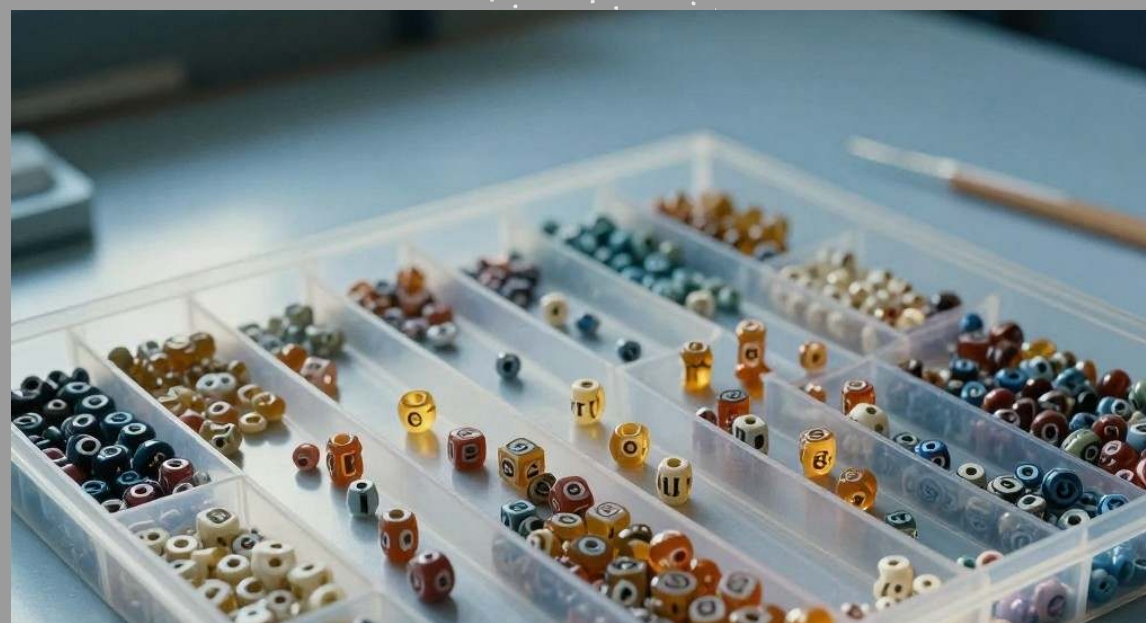
| n  | k | Вид            | Значение |
|----|---|----------------|----------|
| 6  | 2 | без повторений | 30       |
| 8  | 3 | без повторений | 336      |
| 10 | 4 | без повторений | 5040     |
| 10 | 3 | с повторениями | 1000     |

# Размещения и безопасность паролей



## Почему длина пароля важна

Чем длиннее пароль, тем больше возможных последовательностей можно составить из заданного набора символов. На практике это означает, что даже несколько дополнительных знаков заметно усложняют подбор и повышают устойчивость к перебору.



## Повторения резко увеличивают число вариантов

Если один символ может встречаться несколько раз, число паролей растёт по правилу  $n^k$ . Для 8 букв латинского алфавита это  $26^8$  вариантов, что намного больше, чем при запрете повторений, где выбор быстро исчерпывается.

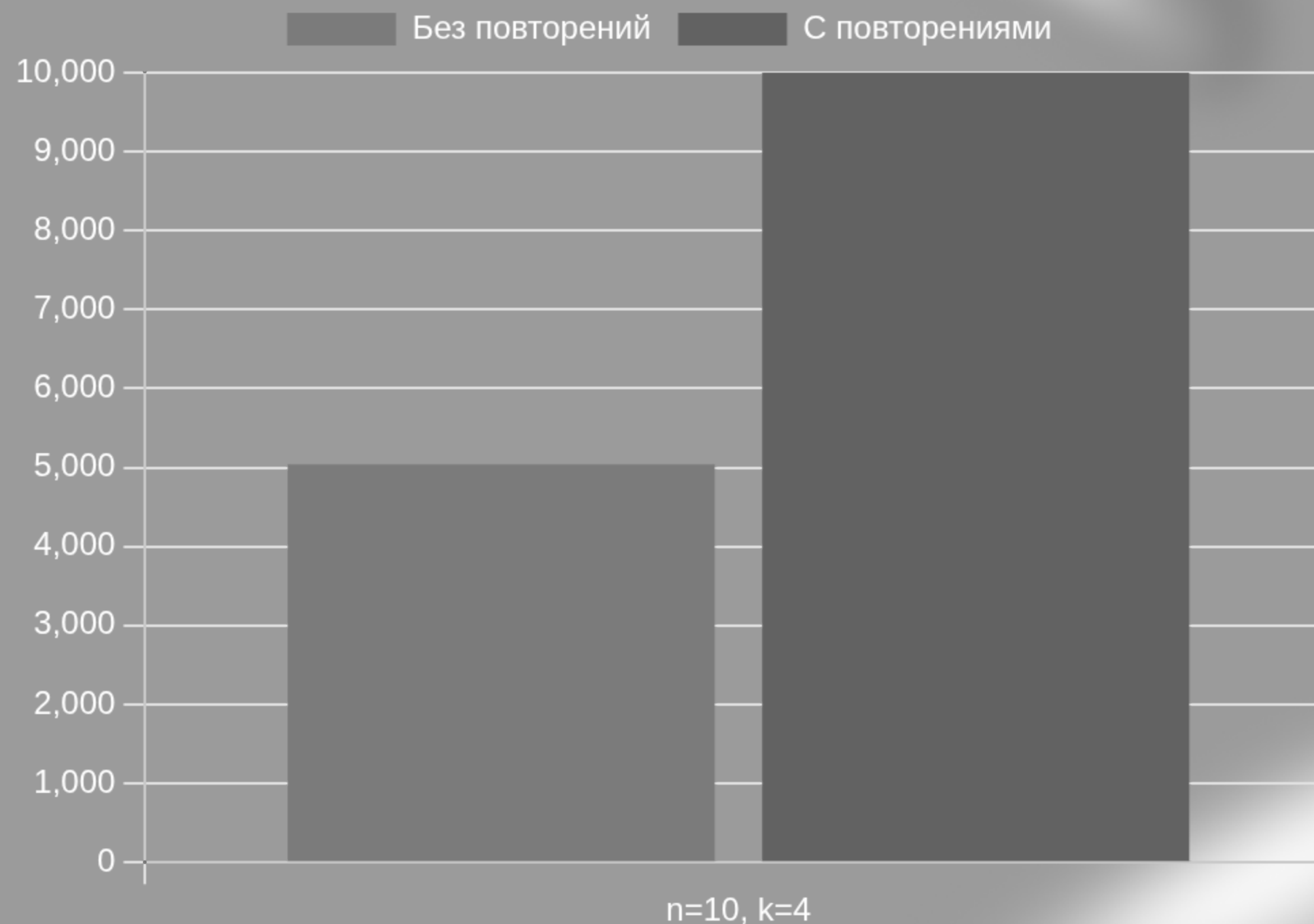


## Комбинаторика в цифровой защите

Идея размещений помогает понять, почему надёжные пароли строят из разных типов символов и достаточной длины. На изображении клавиатура и случайный набор знаков подчёркивают связь между математическим подсчётом и реальной безопасностью.

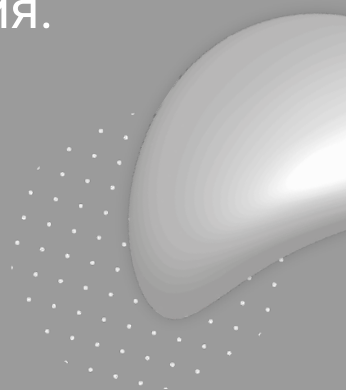
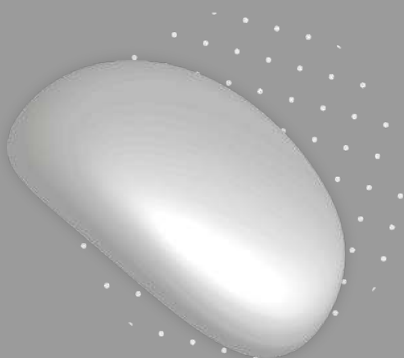
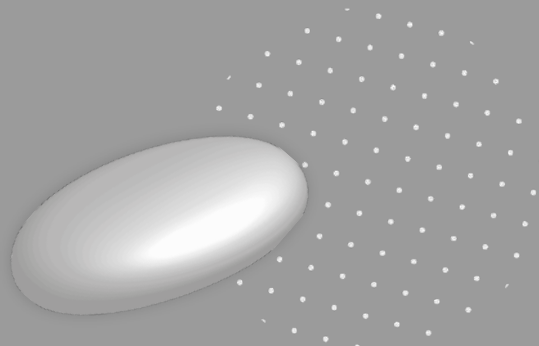
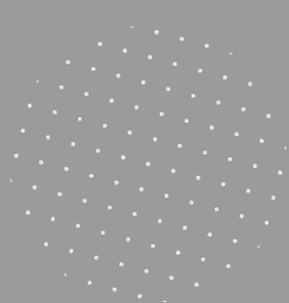
# Сравнение числа вариантов с повторениями и без повторений

- Обе величины относятся к одной и той же задаче, но различие в условии полностью меняет итоговый счёт вариантов.
- Разрешение повторений почти удваивает число вариантов, поэтому это условие всегда нужно проверять в первую очередь.



Расчёт по формулам  $A(10,4)=5040$  и  $10^4=10000$ .

# Правило произведения как основа формулы размещений



1

## Шаг за шагом

Если выбор происходит последовательно, то число итоговых вариантов находится перемножением возможностей на каждом этапе. Сначала считают варианты первого шага, затем второго и так далее, не смешивая их между собой.

2

## Связь с размещениями

Для размещений без повторений на каждом следующем месте остаётся на один объект меньше. Именно поэтому формула  $A(n, k)$  получается из правила произведения:  $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots$  до  $k$  множителей.

3

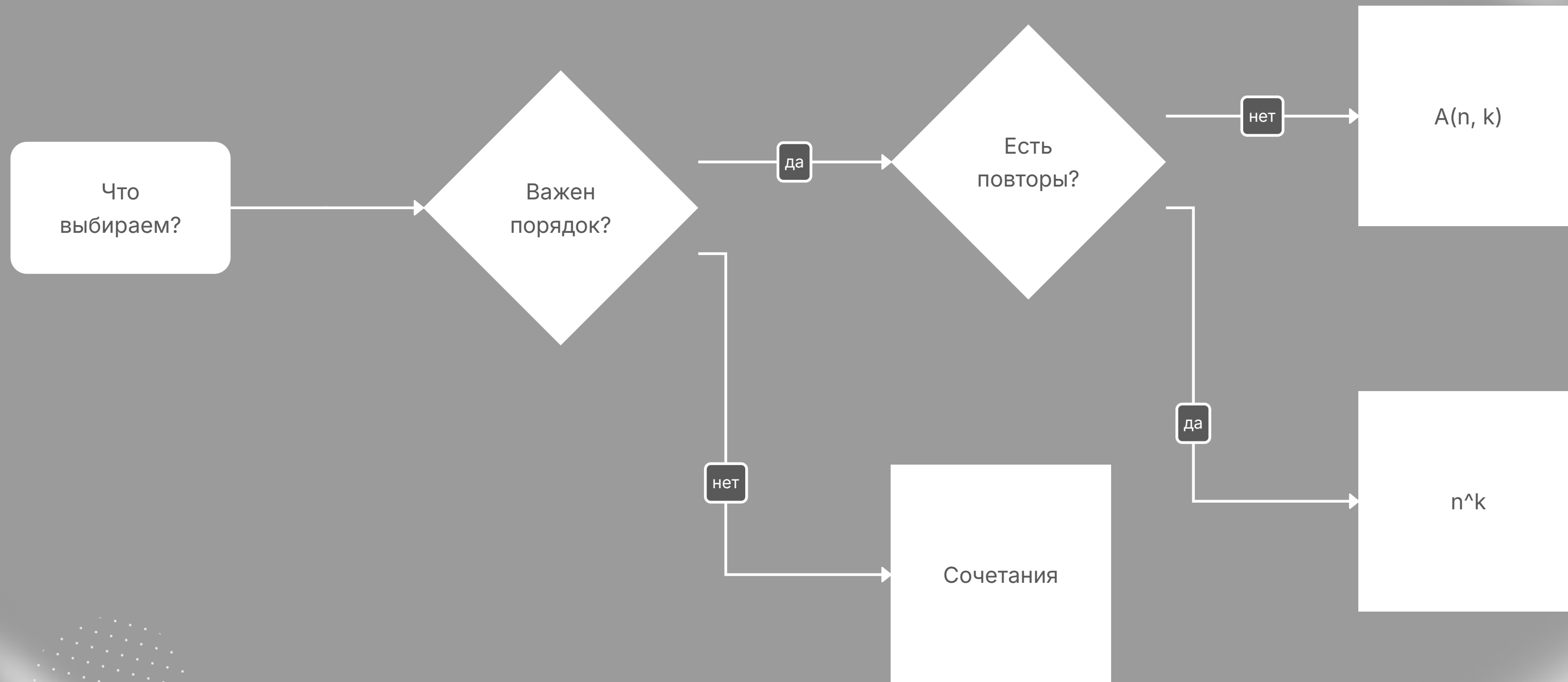
## Простой пример

Если на первое место подходят 5 объектов, на второе — 4, а на третье — 3, то всего получается  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$  вариантов. Такой расчёт помогает видеть смысл формулы без механического запоминания.

# Выбор формулы по условию задачи

16

Последовательность проверки условий перед вычислением числа вариантов.



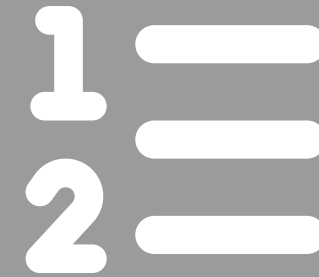
# Типичные ошибки при решении задач

17



## Путаница с сочетаниями

Часто школьники выбирают формулу размещений там, где порядок не влияет на результат. Если набор элементов рассматривается как один и тот же независимо от перестановки, нужна другая модель подсчёта.



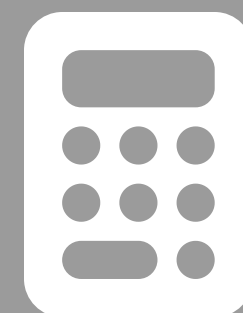
## Игнорирование порядка

Если роли различаются, порядок становится частью ответа. Ошибка возникает, когда капитана и помощника считают как одинаковую пару, хотя перестановка этих двух учеников даёт другой вариант.



## Неверные границы

Для размещений без повторений обязательно условие  $k \leq n$ . Если выбранных позиций больше, чем объектов, задача не имеет смысла в этой модели, и ответ нельзя получить по формуле механически.

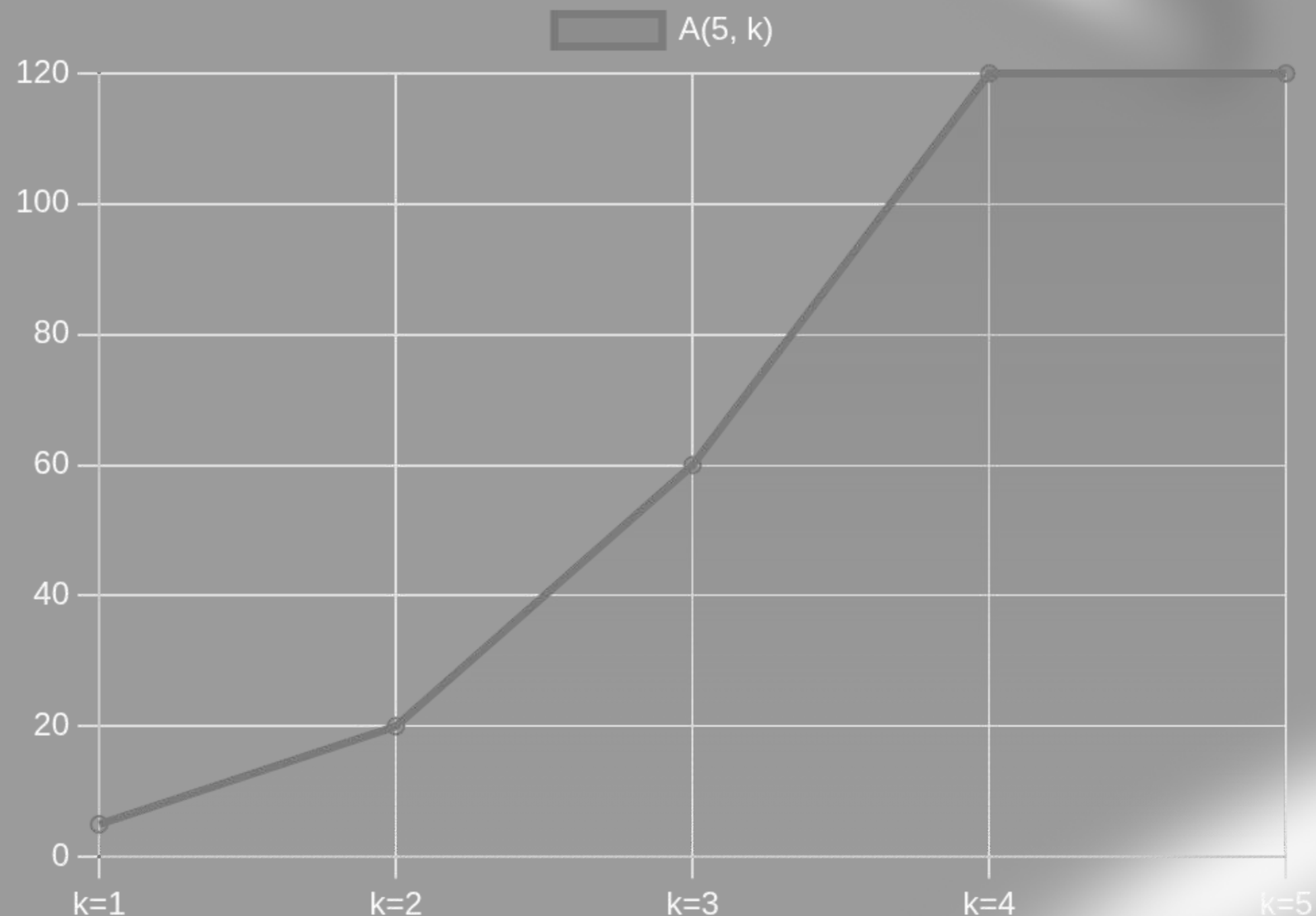


## Счётные неточности

Ошибки в факториалах и пропуск проверки на повторения приводят к неверному результату даже при правильной идее. Аккуратная запись условия и выделение ключевых слов помогают избежать таких сбоев.

# Изменение числа размещений при фиксированном $n$

- Для  $n=5$  каждое новое место резко повышает число упорядоченных вариантов, потому что множитель уменьшается лишь постепенно.
- Максимум достигается при  $k=n$ , где число размещений совпадает с  $5!$ , а затем больше не увеличивается.



Расчёт по формуле  $A(5, k) = 5! / (5-k)!$ .

# Практическое значение темы для алгебры и информатики

19



## Подсчёт вариантов

Размещения лежат в основе многих задач на перечисление исходов, где важно учитывать порядок элементов. Это помогает уверенно работать с комбинаторными моделями и проверять, не пропущены ли какие-либо случаи.



## Олимпиадные задачи

В математических соревнованиях размещения часто появляются в нестандартной форме. Умение распознать их по условию экономит время и позволяет быстрее перейти от словесного описания к точной формуле.



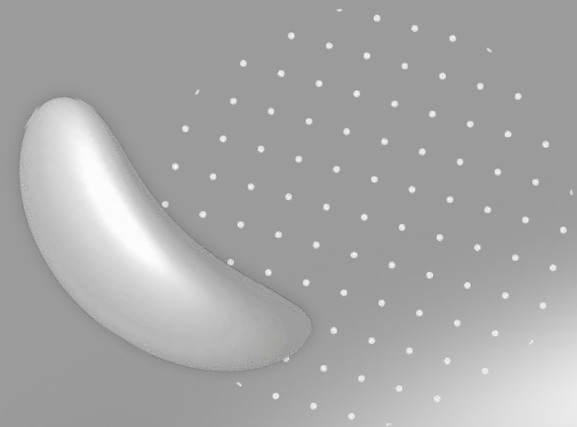
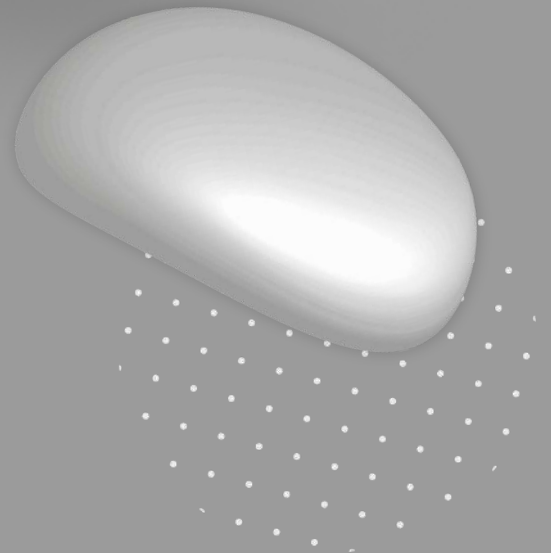
## Информатика и кодирование

В информатике тема связана с паролями, кодами и распределением ресурсов. Подсчёт числа комбинаций помогает оценивать надёжность решений и понимать, насколько велико пространство возможных вариантов.



## Расписания и распределение

При составлении расписаний, назначении дежурств или распределении мест важно учитывать роли и порядок. Именно поэтому размещения удобно использовать там, где одинаковый набор участников даёт разные результаты.



# Главное о размещениях

Размещения учат видеть, когда порядок действительно меняет ответ, и переводить текст задачи в точную комбинаторную модель. Зная формулы  $A(n, k)$  и  $n^k$ , можно уверенно решать практические задачи подсчёта вариантов.