



Правило произведения в комбинаторике: подсчёт вариантов по шагам

Считаем исходы поэтапно: каждый шаг умножает число вариантов.

Комбинаторика в 11 классе: считать точно, а не «на глаз»

Правило произведения помогает быстро находить число исходов в задачах на пароли, коды, выбор и маршруты, не перебирая все варианты вручную.



k

**последовательных этапов дают
одно общее число способов, равное
произведению вариантов
на каждом шаге.**

Для каждого шага считается отдельное
число вариантов; затем эти числа
перемножаются.

Формулировка комбинаторного принципа умножения

Пример: выбор одежды из нескольких категорий

Две куртки

Если верхнюю одежду можно выбрать двумя способами, каждый из них является отдельным первым шагом. На этом этапе ещё не учитывается обувь, поэтому число вариантов сохраняется фиксированным.

Три пары обуви

Второй шаг даёт три независимых возможности. Каждая куртка сочетается с каждой парой обуви, поэтому итоговый подсчёт строится как произведение чисел на двух этапах.

Шесть комплектов

Общее число сочетаний равно шести: $2 \cdot 3$. Такой пример удобно показывать схемой связей, чтобы сразу увидеть все комплекты и убедиться, что ни один вариант не пропущен.



Как решать задачи по правилу произведения

Последовательность действий при многошаговом подсчёте вариантов



Дерево вариантов: как видеть все пути



Каждый уровень — этап

На первом уровне дерева показывают первый выбор, на втором — второй и так далее. Такое изображение помогает разделить процесс на понятные шаги и не смешивать разные действия.



Листья — все результаты

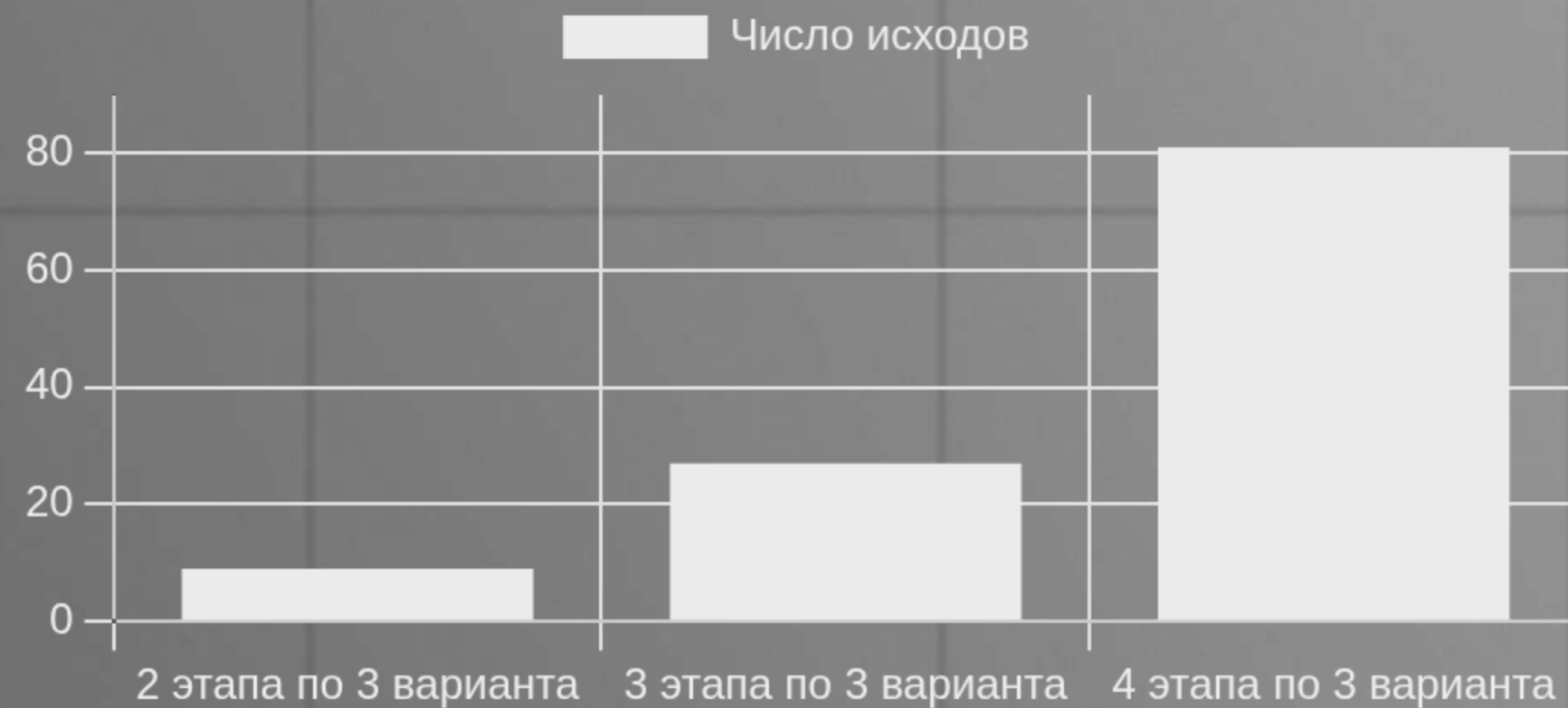
Каждый конечный путь соответствует одному полному варианту решения. Если на уровнях ветвления 2 и 3, то дерево имеет 6 листьев, то есть 6 итоговых исходов.



Проверка полноты

Дерево удобно использовать, чтобы убедиться: все допустимые варианты учтены, а одинаковые результаты не посчитаны дважды. Это особенно важно в задачах с несколькими условиями.

Как быстро растёт число вариантов



Расчёт по правилу произведения: 3^2 , 3^3 , 3^4

Даже при одинаковом числе возможностей на каждом шаге итог меняется очень быстро, потому что каждый новый этап умножает общее количество исходов.

Добавление одного этапа резко увеличивает число результатов: рост идёт по правилу умножения, а не сложения.

Правило произведения и правило суммы

Последовательные шаги

Правило произведения применяют, когда действие идёт по этапам: сначала одно, потом другое. Каждый следующий выбор зависит только от числа доступных вариантов на своём шаге.

Альтернативные случаи

Правило суммы работает, когда нужно выбрать один из несовместимых вариантов. Если ситуации не могут произойти одновременно, их количества складывают, а не умножают.

Не путать логику

Если задача описывает цепочку действий, используют умножение. Если она разбивается на взаимоисключающие случаи, выбирают сложение. Ошибка в этом различии меняет ответ полностью.

Ключ к точности

Перед вычислением важно спросить: это этапы одного процесса или разные альтернативы? Такой вопрос сразу подсказывает, какое правило комбинаторики нужно применить.

Типовые школьные задачи на подсчёт вариантов

Ситуация	Формула	Итог
2 цифры и 3 буквы	$10^2 \cdot 26^3$	по шагам
4 блюда и 2 напитка	$4 \cdot 2$	8 вариантов
5 символов	n^5	если n вариантов

Во многих школьных задачах достаточно выделить этапы выбора и перемножить число возможностей на каждом из них.

Несмотря на разные сюжеты, все примеры сводятся к одной идее: число исходов получается как произведение вариантов на каждом шаге.

Когда формула применима, а когда нет

- 1** **Есть чёткие этапы**
Формула работает, если процесс можно разбить на последовательные шаги, где каждый следующий выбор логически следует за предыдущим и образует единый путь решения.
- 2** **Известно число вариантов**
На каждом этапе должно быть понятно, сколько возможностей доступно. Если количество вариантов заранее не определено, сначала нужно уточнить условия задачи.
- 3** **Ограничения учитываются локально**
Запрет на отдельный вариант изменяет только соответствующий шаг. Например, если в начале кода нельзя ставить ноль, уменьшается лишь число вариантов первой позиции.
- 4** **Не каждый подсчёт — произведение**
Если порядок элементов не важен или случаи пересекаются, правило произведения применять нельзя напрямую. Тогда требуется другой метод подсчёта и отдельный разбор случаев.

Пароли и коды: практический пример применения

Клавиатура как схема выбора

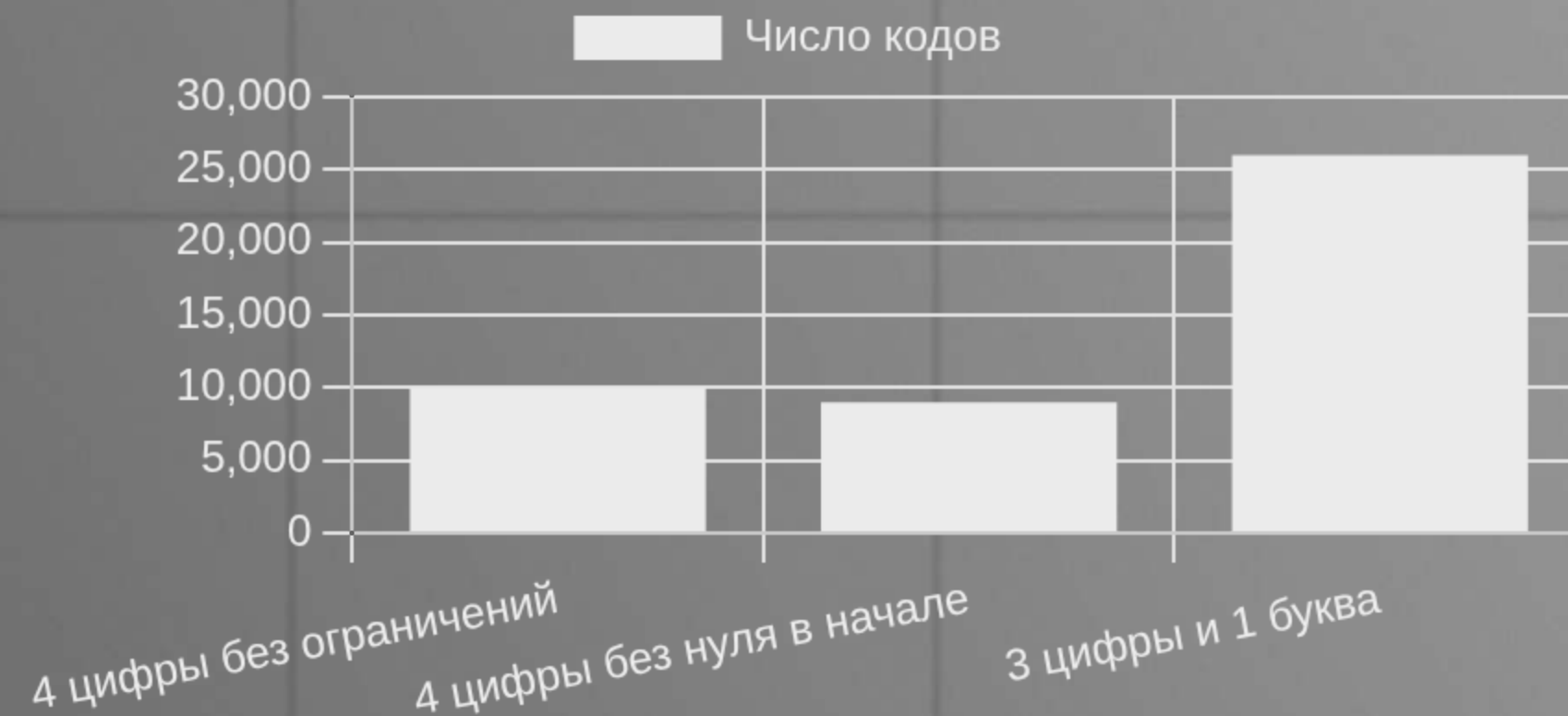
Пароль из четырёх цифр удобно представить как четыре последовательных нажатия клавиш. На каждом шаге доступно по 10 цифр, поэтому общее число кодов равно $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$. Такой пример наглядно показывает, как правило произведения работает в привычной ситуации.

Ограничение на первую цифру

Если первая позиция не может содержать 0, схема сразу меняется: для первого шага остаётся 9 вариантов, а для остальных трёх — по 10. В итоге получается $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ кодов. Одно условие заметно сокращает число допустимых комбинаций.



Как ограничения меняют число кодов



Учебный пример по комбинаторике; расчёты по правилу произведения

Сравнение показывает, что число вариантов определяется не только длиной кода, но и ограничениями на отдельные позиции.

Даже одно дополнительное условие меняет результат на тысячи вариантов, поэтому ограничения нужно учитывать до вычисления произведения.

Типичные ошибки при применении правила

Сложение вместо умножения

При последовательных действиях некоторые ученики складывают числа вариантов, хотя этапы не являются альтернативами. Если выборы идут один за другим, общее количество исходов находят только умножением.

Игнорирование ограничений

Часто забывают, что на одном шаге может быть особое условие, например запрет на ноль в начале кода. Тогда число вариантов на этом этапе нужно уменьшить отдельно.

Двойной счёт

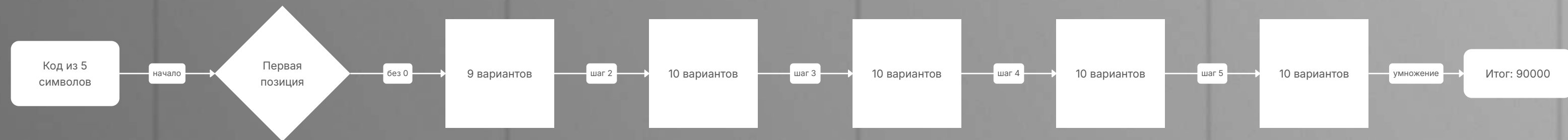
Один и тот же результат иногда получают разными путями и считают дважды. Чтобы избежать ошибки, полезно заранее проверять, не ведут ли разные ветви к одному исходу.

Смешение случаев

Независимые этапы и взаимоисключающие ситуации требуют разных правил подсчёта. Если не разделить задачу на части, легко перепутать сумму и произведение и получить неверный ответ.

Разбор задачи с ограничением на первую позицию

Код из 5 символов: первая позиция не может быть нулём, остальные позиции выбираются свободно.



Связь с перестановками, размещениями и размещениями с повторениями

1

Перестановки

Если нужно упорядочить все n элементов, на каждом новом месте остаётся на один вариант меньше. Поэтому формула перестановок записывается как $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$, то есть $n!$.

2

Размещения

Когда выбирают только k позиций из n элементов без повторений, количество вариантов тоже строится по шагам: $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$. Здесь правило произведения задаёт логику всей формулы.

3

С повторениями

Если один и тот же элемент можно использовать несколько раз, число вариантов на каждом шаге не уменьшается. Тогда общее количество равно n^k , что тоже является результатом повторения одинаковых выборов.

Формулы, построенные на принципе умножения

Объект	Формула	Смысл
Перестановки	$n!$	Все элементы
Размещения	$A(n, k)$	k позиций
С повторениями	n^k	Повторный выбор
Два этапа	$m \cdot n$	Последовательный счёт

Школьный курс комбинаторики

Таблица показывает, что знакомые комбинаторные формулы — это частные случаи одного общего правила подсчёта.

Все представленные формулы основаны на перемножении числа вариантов на каждом шаге, поэтому их удобно изучать как единое семейство правил.

Связь правила произведения с вероятностью



Подсчёт исходов

В комбинаторике мы умножаем числа вариантов на каждом этапе, потому что каждый новый выбор зависит от предыдущей структуры задачи и добавляет отдельный шаг к общему результату.



Совместные события

В вероятности аналогичная логика выражается формулой $P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B|A)$. Сначала рассматривают первое событие, затем — условную вероятность второго при условии, что первое уже произошло.



Единый подход

Обе темы учат видеть последовательность действий и учитывать связь между ними. Поэтому правило произведения помогает не только считать варианты, но и понимать, как строятся вероятностные модели.

Рост числа вариантов при добавлении этапов



Учебный пример по правилу произведения

При одинаковом числе вариантов на каждом шаге результат растёт степенно, а не линейно, поэтому даже короткие цепочки быстро дают большие числа.

Каждый новый этап умножает общее число исходов на 5, поэтому рост становится очень быстрым уже после нескольких шагов.

Стратегия решения комбинаторных задач

- 1** **Выделить шаги**
Сначала нужно разложить ситуацию на последовательные действия: выбор, порядок, ограничение или повторение. Без такой структуризации трудно понять, где применять умножение, а где требуется другой приём подсчёта.
- 2** **Посчитать варианты**
Для каждого шага отдельно определяют число допустимых вариантов, учитывая все запреты и исключения. Этот этап важен, потому что именно здесь чаще всего возникает ошибка в задаче.
- 3** **Составить произведение**
Когда числа вариантов для всех шагов известны, их перемножают в правильном порядке. Полученное выражение отражает полный счёт без пропусков и без повторного перечисления одних и тех же исходов.
- 4** **Проверить ответ**
После вычисления полезно оценить, выглядит ли результат разумно и не нарушены ли условия задачи. Такая проверка помогает заметить перепутанные случаи, лишний счёт или неверное применение суммы.

Главный вывод: правило произведения как универсальный инструмент счёта

Правило произведения делает сложные задачи на подсчёт понятными: достаточно выделить этапы, учесть ограничения и перемножить числа вариантов. Поэтому оно остаётся одним из самых надёжных инструментов в комбинаторике и вероятности.