

Обратные тригонометри- ческие функции

Узнаём угол по известному
тригонометрическому значению.



Почему это важно



Обычные тригонометрические функции повторяются, поэтому без ограничения области они не дают единственного ответа. Главные ветви делают синус, косинус, тангенс и котангенс однозначными и удобными для вычислений углов и преобразований.



Определение главных значений

1

$\arcsin$

$\arcsin x$ — это единственное число из отрезка $[-\pi/2; \pi/2]$, синус которого равен x . Такое ограничение сразу убирает бесконечное число возможных углов и оставляет один ответ.

2

$\arccos$

$\arccos x$ определяют как число из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен x . Выбор именно этого диапазона позволяет согласовать обратимость с привычной геометрической интерпретацией углов.

3

$\arctan$

$\arctan x$ — это угол из интервала $(-\pi/2; \pi/2)$, тангенс которого равен x . На этой ветви функция сохраняет однозначность и подходит для работы с любыми действительными числами.

4

arccot

$\operatorname{arccot} x$ — это число из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен x . Ограничение области значений делает запись удобной и исключает неоднозначность при восстановлении угла.

Области определения и значения



Функция	D	E	Монот.
$\arcsin$	$[-1; 1]$	$[-\pi/2; \pi/2]$	возр.
$\arccos$	$[-1; 1]$	$[0; \pi]$	убыв.
$\arctan$	$\mathbb{R}$	$(-\pi/2; \pi/2)$	возр.
arccot	$\mathbb{R}$	$(0; \pi)$	убыв.

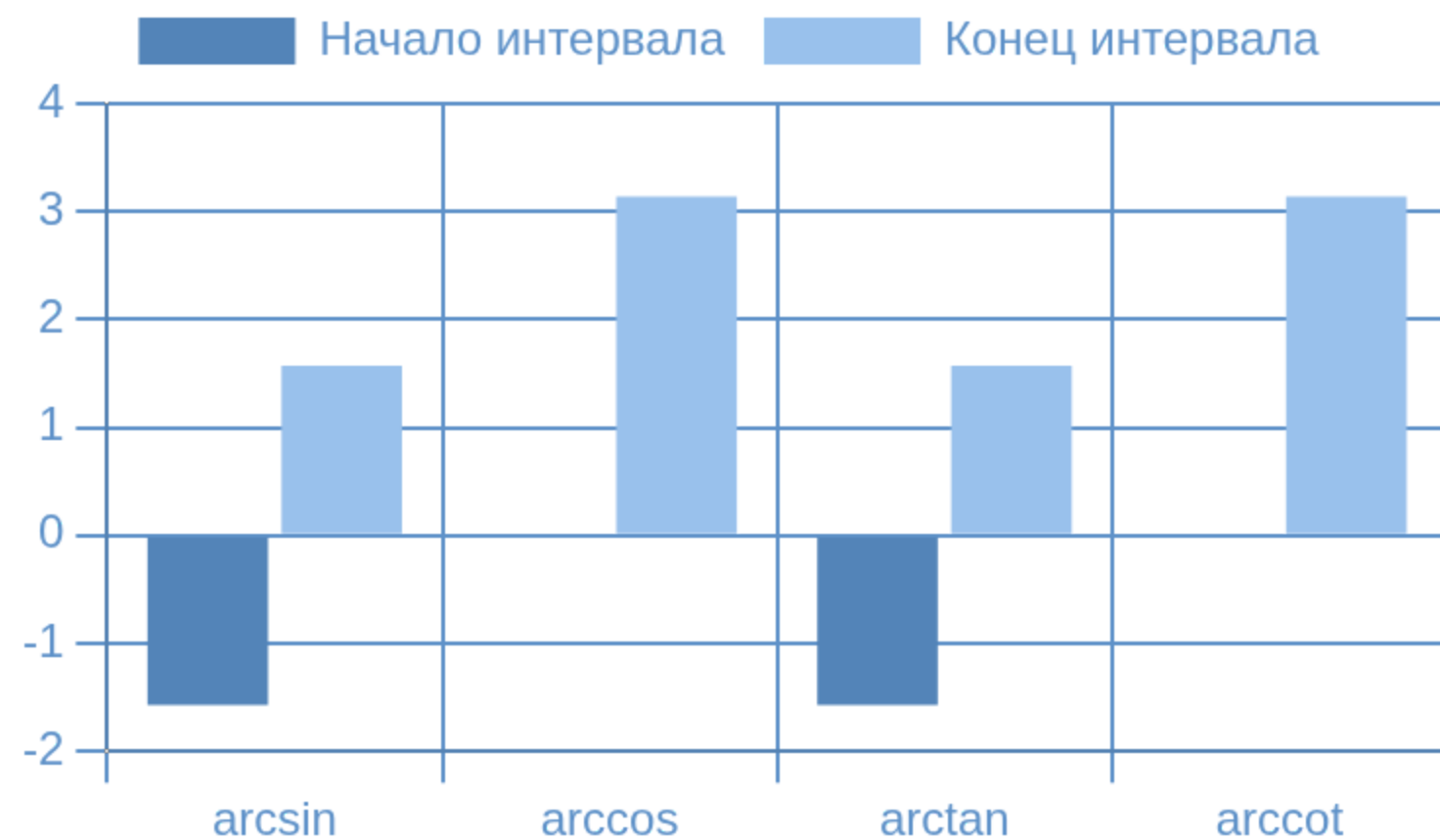
- + Сопоставим основные свойства четырёх обратных тригонометрических функций в одной таблице.
- + Ограничения по аргументу и по результату необходимы, чтобы обратная функция существовала и была однозначной.
- Определения главных значений обратных тригонометрических функций

Графики обратных тригонометрических функций :::



+ arcsin и arctan Графики $\arcsin x$ и $\arctan x$ на своих областях определения идут вверх, поэтому каждому допустимому значению аргумента соответствует ровно один результат. Это и обеспечивает их обратимость на главной ветви.	+ arccos График $\arccos x$ убывает на отрезке $[-1; 1]$: чем больше x, тем меньше значение функции. Такая форма хорошо отражает переход от большего косинуса к меньшему углу.	+ arccot График $\operatorname{arccot} x$ также убывает, но уже на всей числовой прямой. Это удобно для анализа предельных значений и сравнения поведения функции при больших положительных и отрицательных аргументах.	+ Опорные точки Для построения достаточно запомнить несколько точек: $\arcsin 0 = 0$, $\arccos 1 = 0$, $\arctan 0 = 0$, $\operatorname{arccot} 1 = \pi/4$. Они задают форму кривых и помогают быстро проверять ответы.
--	---	--	--

Сравнение диапазонов значений



На диаграмме видно не только длину, но и расположение главных ветвей: интервалы симметричны или смещены относительно нуля.

У всех четырёх функций ширина главной ветви равна π , но интервалы занимают разные положения на числовой оси.

Главные значения $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$, arccot

Основные формулы связи

1

Связь $\arcsin$ и $\arccos$

Для любого x из отрезка $[-1; 1]$ выполняется равенство $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$. Оно удобно для проверки вычислений и позволяет быстро переходить от одной обратной функции к другой.

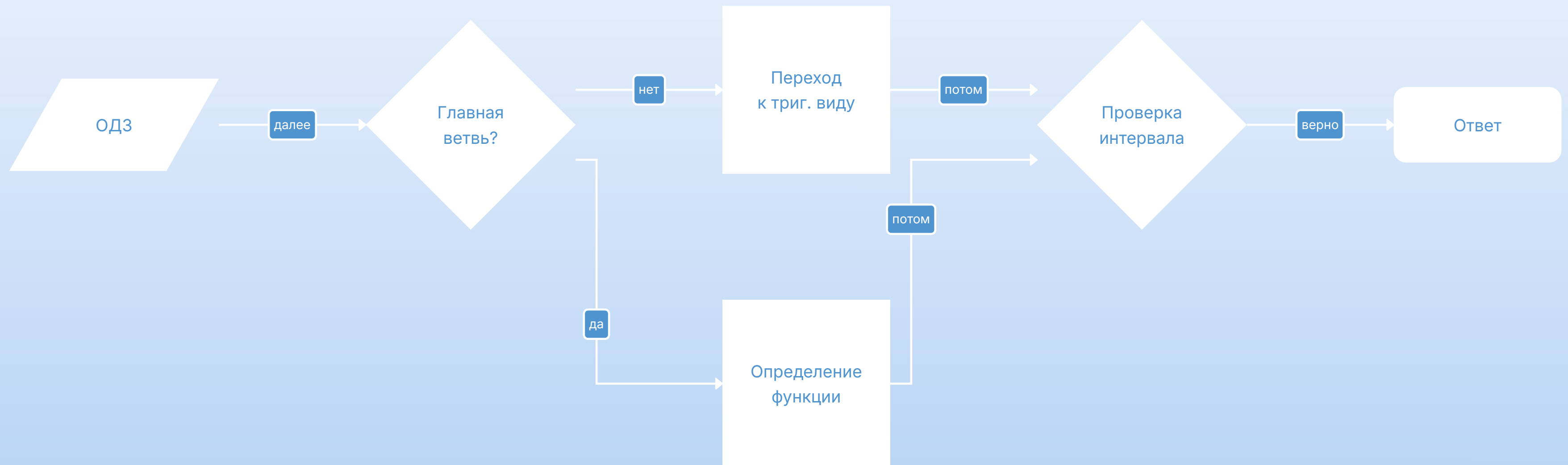
2

Связь $\arctan$ и arccot

В школьной записи часто используют формулу $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \pi/2$. Она связывает две функции с согласованными главными значениями и помогает упрощать выражения без потери точности.

Алгоритм работы с выражениями

Последовательность действий при преобразовании выражений с обратными тригонометрическими функциями



Симметрии и формулы для отрицательных аргументов



+

$\arcsin$

Формула $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ показывает нечётность функции. График симметричен относительно начала координат, поэтому отрицательному аргументу соответствует противоположный по знаку угол.

+

$\arccos$

Соотношение $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ отражает не нечётность, а зеркальное преобразование внутри отрезка $[0; \pi]$. Значение смещается к противоположной стороне главной ветви.

+

$\arctan$

Для $\arctan$ выполняется $\arctan(-x) = -\arctan x$. Это тоже нечётная функция, и её график сохраняет симметрию относительно начала координат на всей области определения.

+

arccot

Формула $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$ работает по тому же принципу, что и для $\arccos$. Она показывает отражение значений относительно середины интервала $(0; \pi)$.

Точные значения для стандартных аргументов

- Табличные углы $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ и определения главных значений

x	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x / \operatorname{arccot} x$
0	0	$\pi/2$	$0 / \pi/2$
$1/2$	$\pi/6$	$\pi/3$	—
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$	$\pi/4$	—
$\sqrt{3}/2$	$\pi/3$	$\pi/6$	—

Соберём наиболее частые табличные значения, которые встречаются в школьных задачах.

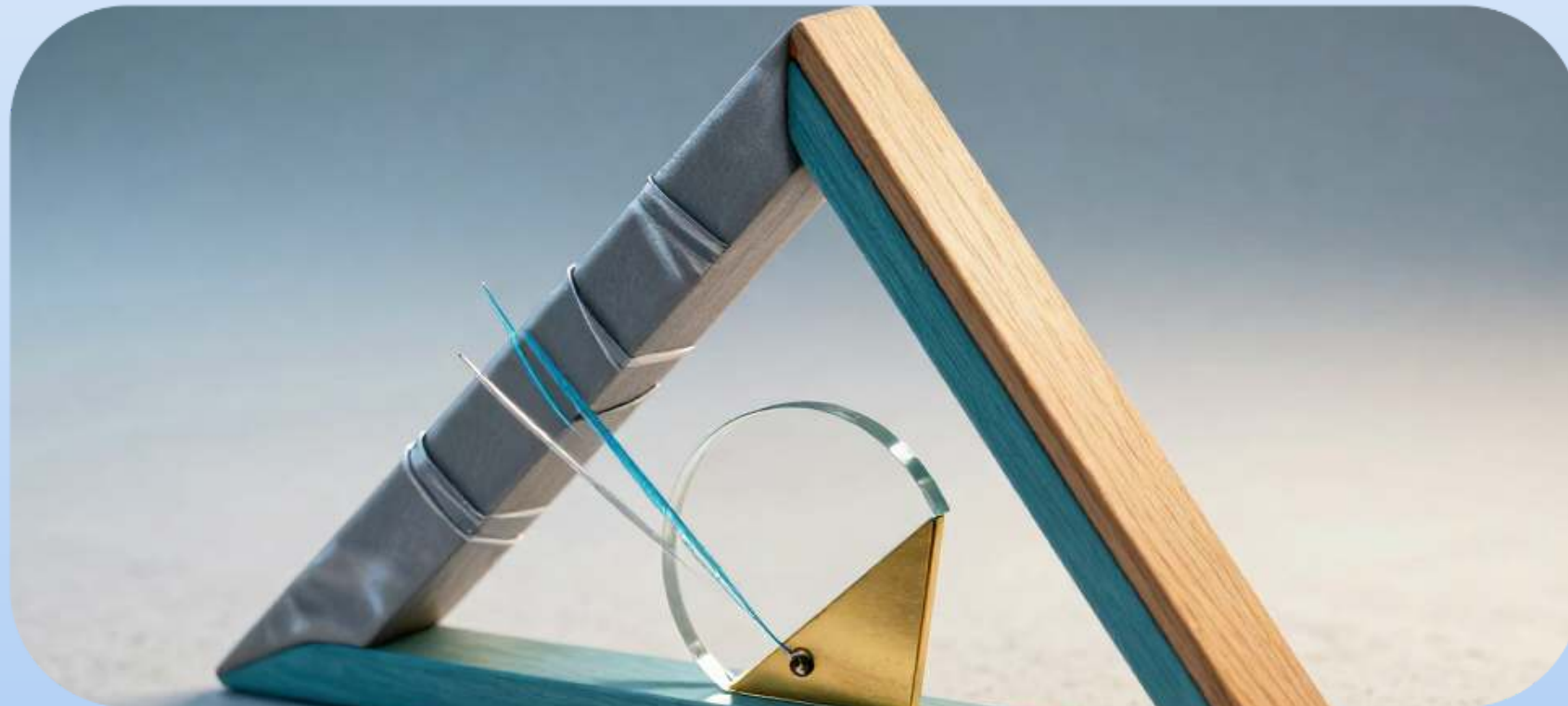
Многие стандартные значения выражаются через известные углы, поэтому ответы часто находятся без вычислительных преобразований.

Геометрический смысл через прямоугольный треугольник



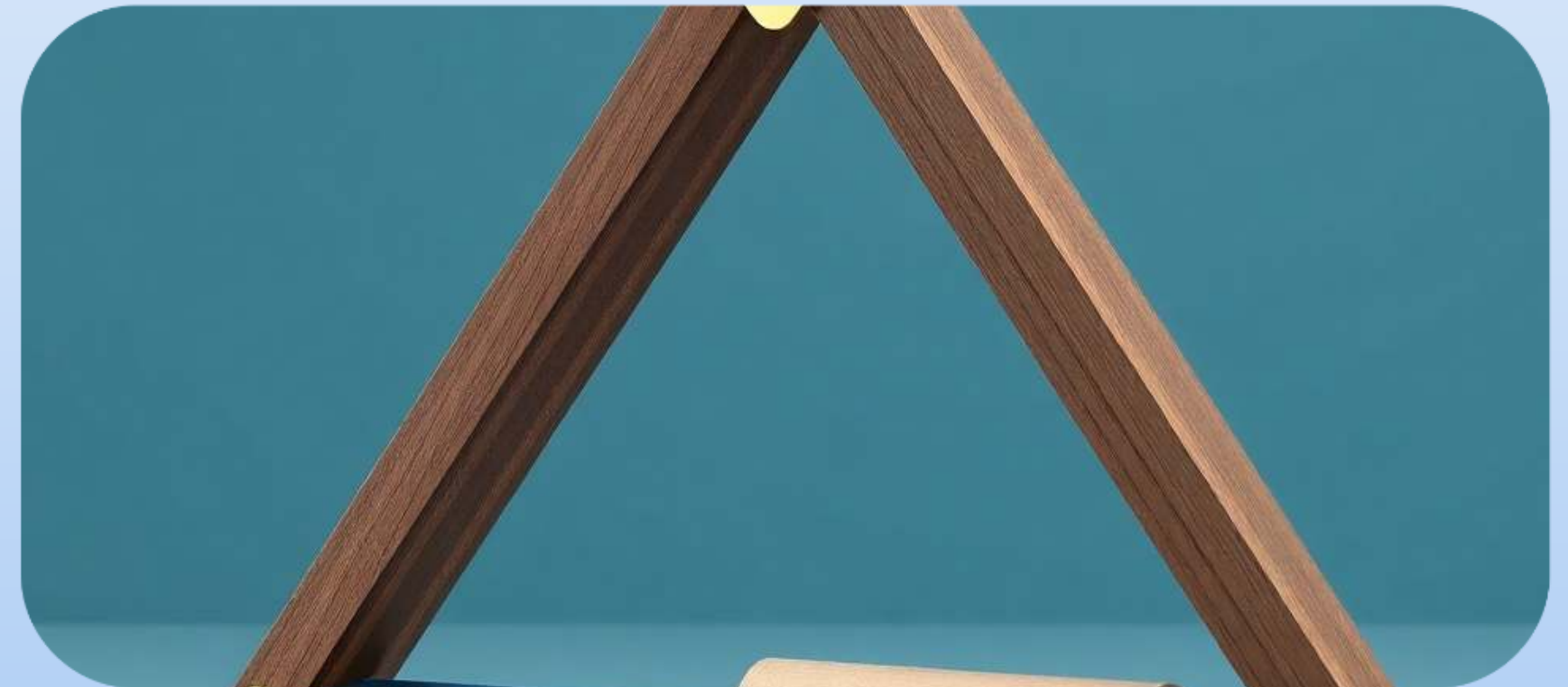
Угол по отношению сторон

Если в прямоугольном треугольнике известны катет и гипотенуза, то можно восстановить угол по отношению этих сторон. Именно так работает $\arcsin$: по значению синуса она возвращает искомый угол в пределах главной ветви.

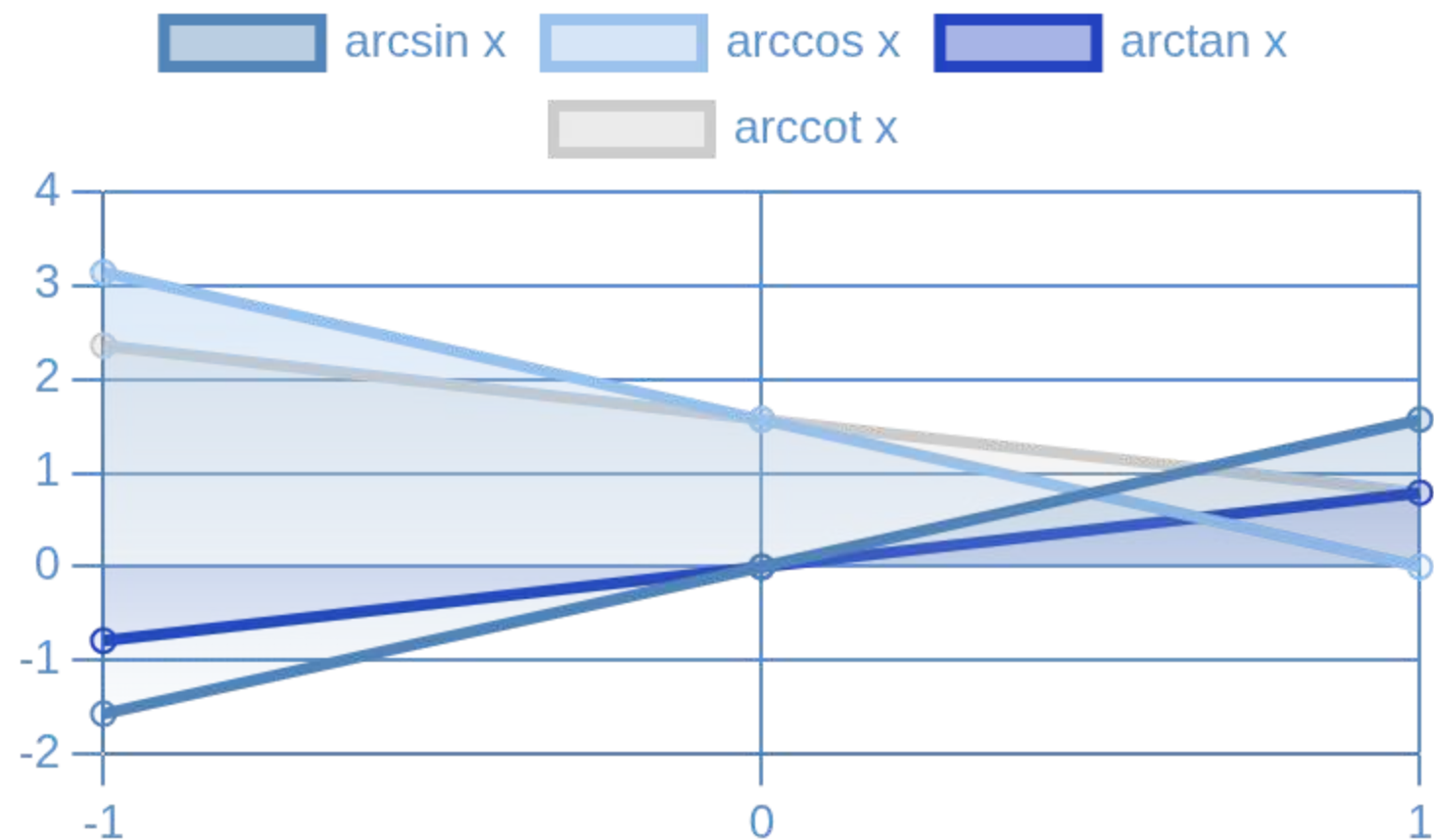


Угол по двум катетам

Когда заданы оба катета, удобнее использовать $\arctan$. Отношение противолежащего катета к прилежащему сразу задаёт тангенс, а обратная функция позволяет перейти от числа к углу без дополнительных построений.



Монотонность как основа обратимости



На главных ветвях каждая функция ведёт себя предсказуемо: либо возрастает, либо убывает без разрывов. Это и делает возможным единственное обратное значение для каждого допустимого аргумента.

Монотонность гарантирует однозначность обратной функции на выбранном промежутке; именно поэтому ограничение области значений не является формальностью.

Учебные свойства обратных тригонометрических функций; контрольные точки: $x = -1, 0, 1$

Основные формулы преобразования выражений

1

Запись через $\sin$

Если $\arcsin x = y$, то $\sin y = x$, причём y лежит в отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$. Эта запись удобна для перехода от обратной функции к обычной тригонометрической форме.

2

Запись через $\cos$

Если $\arccos x = y$, то $\cos y = x$, а угол y принадлежит промежутку $[0; \pi]$. Такое уточнение особенно важно, когда нужно выбрать единственный ответ из двух возможных.

3

Запись через $\tan$

Если $\arctan x = y$, то $\tan y = x$, где y лежит в интервале $(-\pi/2; \pi/2)$. Именно это ограничение исключает лишние углы и делает ответ однозначным.

4

Запись через $\cot$

Если $\operatorname{arccot} x = y$, то $\cot y = x$ и y принадлежит промежутку $(0; \pi)$. При вычислениях нужно помнить, что равенства вида $\operatorname{tg}(\arctan x) = x$ верны только на допустимой области.

Решение простейших уравнений

1

Проверка диапазона

Сначала определяют, может ли правая часть быть значением соответствующей обратной функции. Если число не принадлежит области значений, уравнение не имеет решения, и дальнейшие преобразования бессмысленны.

2

Переход к углу

Если значение допустимо, уравнение сводят к обычной тригонометрической записи: $x = \sin a$, $x = \cos a$, $x = \tan a$ или $x = \cot a$. Затем выбирают только тот угол, который лежит в главной ветви.

3

Примеры и ответ

Например, из $\arcsin x = \pi/6$ получаем $x = 1/2$, а из $\arctan x = 1 - x = 1$, потому что $\tan(\pi/4)=1$. Для $\arccos x = 0$ ответом будет $x = 1$.

Где встречаются обратные тригонометрические функции



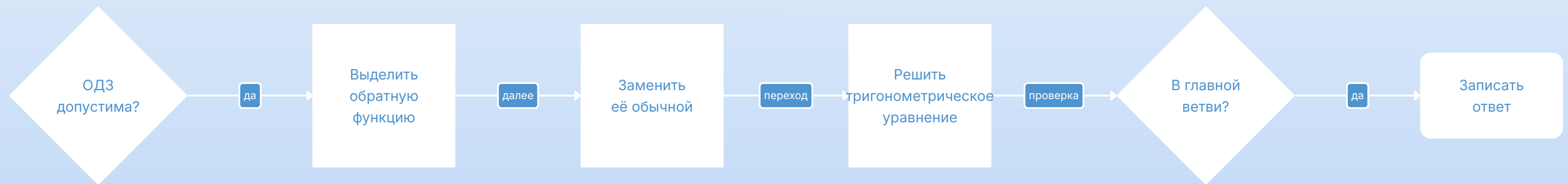
Эти функции особенно полезны там, где требуется восстановить угол по измеренным величинам или координатам. Поэтому они часто появляются в прикладных задачах с векторами, траекториями и моделями движения.

Наибольшая практическая ценность связана с вычислением углов по данным измерений, а также с преобразованием координат в направление.

Обобщение типичных школьных и прикладных задач по тригонометрии

Алгоритм решения уравнений с обратными функциями

Последовательность действий при преобразовании и проверке ответа



Типичные ошибки при вычислениях



Путаница в записи

Запись $\operatorname{tg}^{-1} x$ часто принимают за обычную обратную дробь, хотя речь идёт именно об $\arctan x$. Из-за этого теряется смысл области значений и появляется неверный ответ.



Игнорирование ветви

Если не учитывать главную ветвь, можно получить несколько углов вместо одного. В обратных тригонометрических функциях такой подход недопустим, потому что результат должен быть однозначным.



Неверное преобразование

Ещё одна ошибка — подмена обратной функции степенью или простым обращением дроби. Такие операции не эквивалентны и приводят к формально красивым, но неверным вычислениям.



Отсутствие проверки

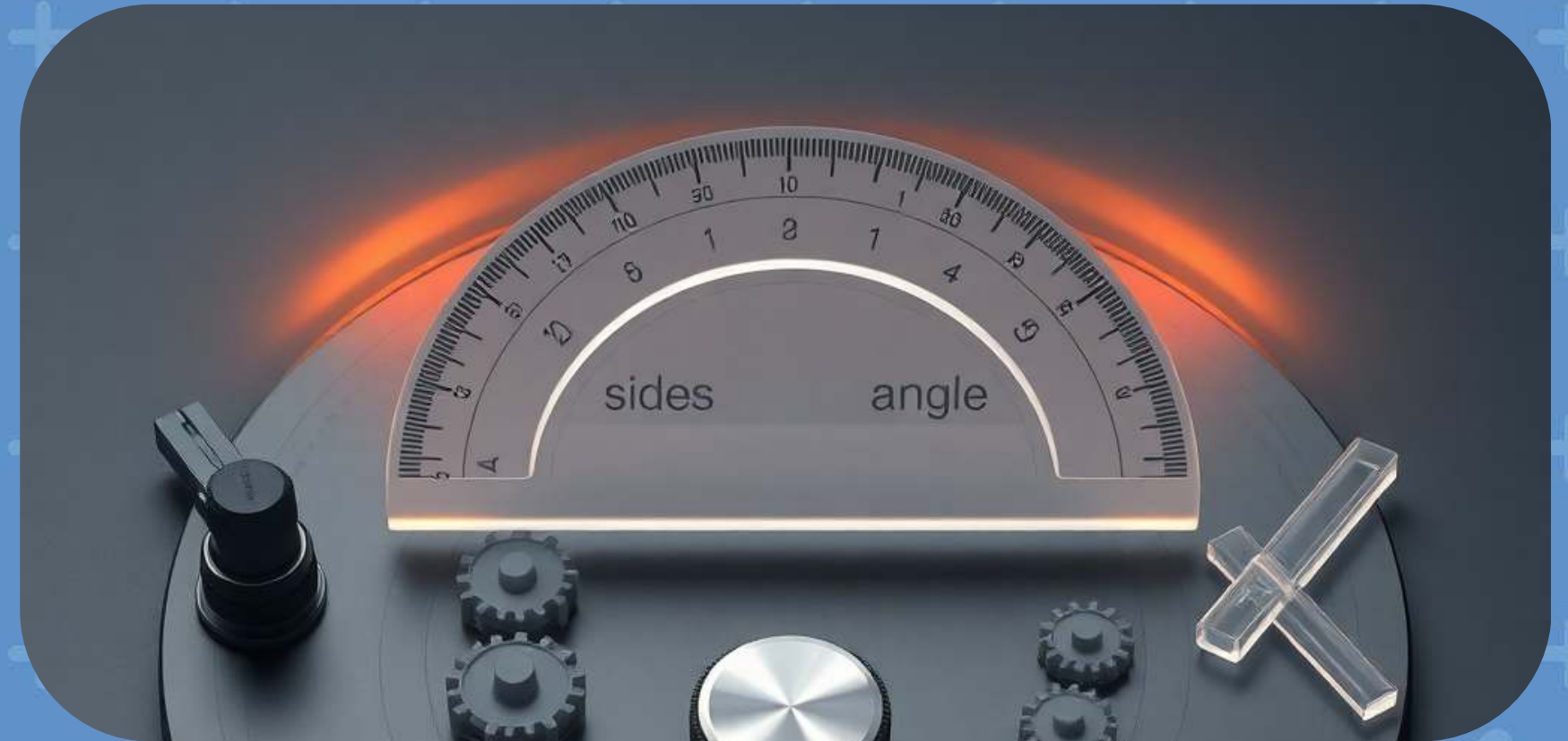
После преобразований легко потерять решения или добавить посторонние. Поэтому итог всегда нужно сверять с областью определения и областью значений исходной функции.

История и развитие школьной записи



От таблиц к формулам

Первые тригонометрические таблицы создавались задолго до школьной записи $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$ и arccot . Они помогали астрономам, геодезистам и морякам вычислять углы и расстояния, когда аналитических калькуляторов ещё не существовало.



Преимственность идей

Современные графики обратных функций продолжают ту же логику: от численного значения к углу и обратно. Меняются обозначения и инструменты, но сама идея однозначного восстановления угла по отношению сторон остаётся той же.

Сводная таблица свойств



Функция	Область	Значения	Монотонность	Пример
$\arcsin$	$[-1; 1]$	$[-\pi/2; \pi/2]$	возрастает	$\arcsin(1/2) = \pi/6$
$\arccos$	$[-1; 1]$	$[0; \pi]$	убывает	$\arccos(1/2) = \pi/3$
$\arctan$	$\mathbb{R}$	$(-\pi/2; \pi/2)$	возрастает	$\arctan(1) = \pi/4$
arccot	$\mathbb{R}$	$(0; \pi)$	убывает	$\text{arccot}(1) = \pi/4$



Краткое сравнение четырёх обратных тригонометрических функций по самым важным признакам.



Все четыре функции становятся однозначными только после выбора главной ветви; это и обеспечивает корректные вычисления углов и решение уравнений.



Стандартные определения обратных тригонометрических функций

Что важно запомнить

Обратные тригонометрические функции помогают находить углы по известным отношениям сторон и координат. Их сила — в главной ветви, точных значениях и строгой проверке области определения.