

Разложение многочленов на множители с помощью формул сокращённого умножения

Учимся узнавать формулы и быстро
раскладывать многочлены.





Почему эта тема важна в 7 классе

Разложение на множители помогает переходить от длинной записи к удобному виду. Оно связано со скобками, формулами сокращённого умножения, преобразованием выражений и первыми уравнениями, поэтому встречается почти в каждом разделе алгебры 7 класса.

Три основные формулы сокращённого умножения

1

Квадрат суммы

Если нужно раскрыть квадрат суммы, используют формулу $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Она показывает, как из произведения получается многочлен с тремя членами и положительным средним.

2

Квадрат разности

Для выражения с вычитанием подходит формула $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Здесь важно помнить, что средний член всегда имеет минус, хотя два крайних члена остаются квадратами.

3

Разность квадратов

Когда перед нами разность двух квадратов, применяют $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Эта формула особенно удобна, потому что сразу даёт произведение двух скобок с разными знаками.

Квадрат суммы на примере выражения x^2+6x+9

Первый и последний члены

Первый член x^2 — это квадрат переменной, а последний член 9 — квадрат числа 3. Такие границы подсказывают, что выражение может быть полным квадратом.

Средний член

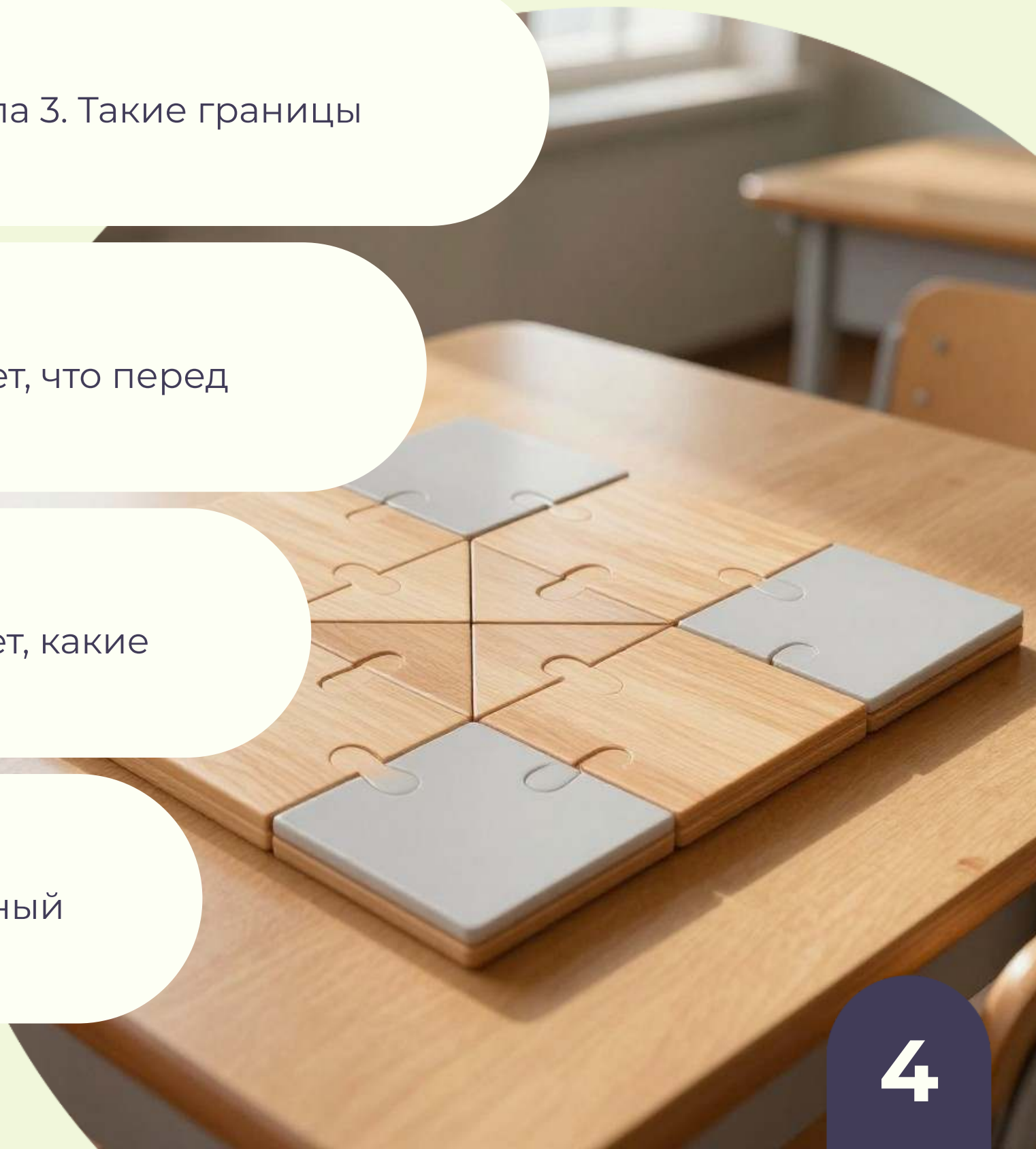
Число $6x$ равно удвоенному произведению x и 3: $2 \cdot x \cdot 3$. Именно это подтверждает, что перед нами квадрат суммы, а не другой вид многочлена.

Запись в виде квадрата

По признакам получаем $x^2+6x+9 = (x+3)^2$. Такая форма короче и сразу показывает, какие множители скрыты внутри многочлена.

Визуальный смысл

Геометрически это можно представить как квадрат со стороной $x+3$, составленный из частей x^2 , $3x$, $3x$ и 9. Так легче увидеть происхождение каждого слагаемого.



Квадрат разности и его признаки

1

Подходящий шаблон

Выражение $a^2 - 10a + 25$ удобно представить как $(a - 5)^2$. Оно соответствует формуле квадрата разности и помогает быстро заметить скрытое произведение.

2

Крайние члены

Первый член a^2 — квадрат переменной, а последний член 25 — квадрат числа 5. Если оба края являются квадратами, стоит проверить полный квадрат.

3

Средний член

Средний член равен $-10a$, то есть минус удвоенное произведение a и 5. Именно отрицательный знак отличает квадрат разности от квадрата суммы.

4

Главный признак

При формуле $(a - b)^2$ средний член всегда отрицательный. Если знак в середине другой, нужно искать иной способ разложения.

5

Разность квадратов как особый вид многочлена

Сама формула

Формула $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ работает только тогда, когда перед нами именно разность двух квадратов. Она не подходит для сумм и не требует среднего члена.

Ещё один пример

Аналогично $16y^2 - 1 = (4y - 1)(4y + 1)$, ведь $16y^2$ — это $(4y)^2$, а 1 — это 1^2 . Знаки в скобках всегда разные.

Пример с числом

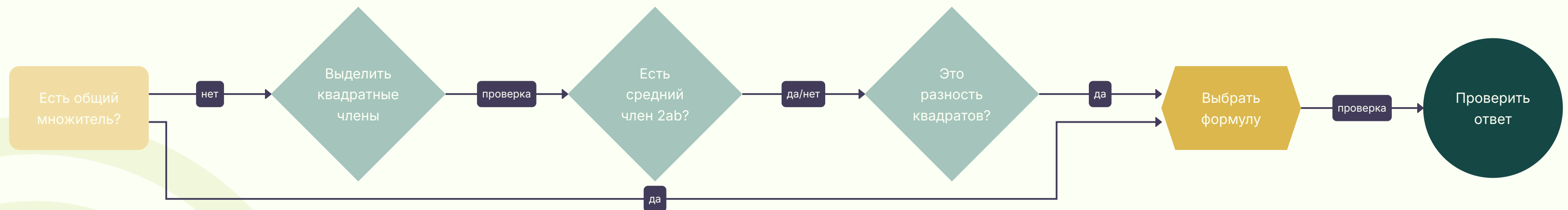
Выражение $x^2 - 49$ раскладывается как $(x - 7)(x + 7)$, потому что $49 = 7^2$. Здесь хорошо видно, как один квадрат превращается в две скобки.

Когда формула не подходит

В выражении $x^2 + 9$ нет разности, поэтому разность квадратов применить нельзя. Сумму квадратов разложить по этой формуле невозможно.

Как выбрать подходящую формулу

Последовательность проверки помогает определить нужный способ разложения многочлена.



Сравнение трёх формул сокращённого умножения

Формула	Вид	Пример
$a^2+2ab+b^2$	квадрат суммы	$x^2+8x+16$
$a^2-2ab+b^2$	квадрат разности	$y^2-14y+49$
a^2-b^2	разность квадратов	$25m^2-4$

Школьные формулы сокращённого умножения, 7 класс

Таблица показывает, как по виду многочлена определить нужную формулу и быстро проверить свой выбор по примеру.

Наличие среднего члена помогает различить первые две формулы, а его отсутствие указывает на разность квадратов.

Типичные ошибки при разложении на множители

Ошибки чаще возникают не из-за самой формулы, а из-за невнимательности к каждому члену многочлена и знакам.

Чаще всего путают похожие шаблоны и забывают проверять результат, поэтому полезно каждый раз сверять ответ обратным умножением.



Учебные наблюдения по теме 7 класса

Вынесение общего множителя перед применением формул

1 Начать с простого
Сначала нужно посмотреть, нет ли общего множителя во всех членах многочлена. Этот шаг часто делает выражение короче и заметно упрощает дальнейшее разложение.

2 Пример преобразования
Например, $3x^2+6x$ можно записать как $3x(x+2)$. После вынесения общего множителя выражение становится удобнее для дальнейшей работы и проверки.

3 Почему это важно
Иногда именно общий множитель помогает увидеть знакомую формулу сокращённого умножения. Поэтому в 7 классе его проверяют раньше остальных действий.

Проверка разложения раскрытием скобок



Сначала умножают обратно

Любое разложение на множители нужно проверить обратным действием: раскрыть скобки и сравнить результат с исходным многочленом. Если выражения совпадают, преобразование выполнено верно.

Находят скрытую ошибку

Проверка быстро показывает, где допущена неточность: в знаке, в выборе числа под квадратом или в самих множителях. Это особенно важно, когда выражения внешне очень похожи.

Удобная цепочка действий

Полезно помнить последовательность: многочлен, разложение, умножение скобок, исходный вид. Такая схема помогает не просто записать ответ, а убедиться, что он действительно правильный.

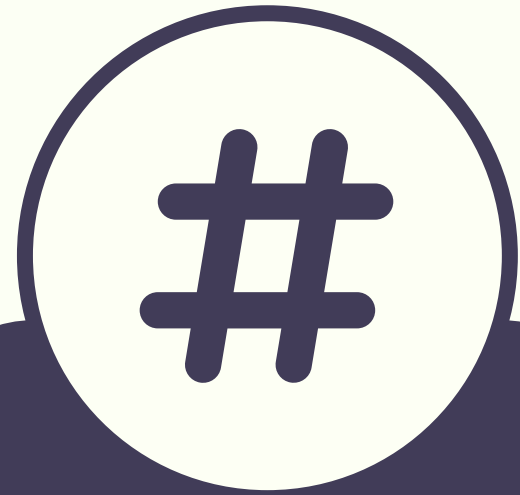


Самые частые ошибки семиклассников



Путают знак среднего члена

В формулах сокращённого умножения знак среднего члена меняется не случайно. Если не заметить плюс или минус, получится другое выражение, которое уже не совпадает с исходным многочленом.



Забывают член $2ab$

При квадрате суммы или разности многие записывают только первые и последние члены. Но именно удвоенное произведение двух выражений связывает формулу в единое целое и помогает узнать её.



Неверно узнают квадраты

Иногда число или букву принимают за квадрат, хотя это не так. Перед разложением важно проверить, можно ли представить первый и последний члены как квадраты.



Не выносят общий множитель

Если в многочлене есть общий множитель, его нужно выделить первым. Без этого выражение может выглядеть сложнее, чем есть на самом деле, и нужная формула не будет заметна.

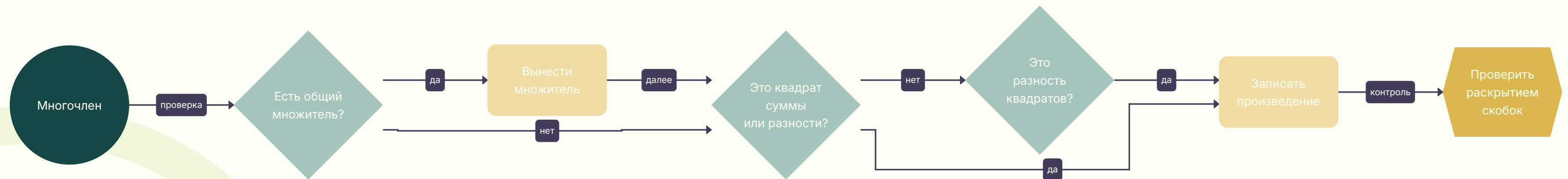


Пропускают проверку ответа

Даже правильный на вид ответ стоит проверить раскрытием скобок. Эта привычка помогает сразу заметить ошибку и учит аккуратно работать с каждым членом многочлена.

Алгоритм разложения многочлена на множители

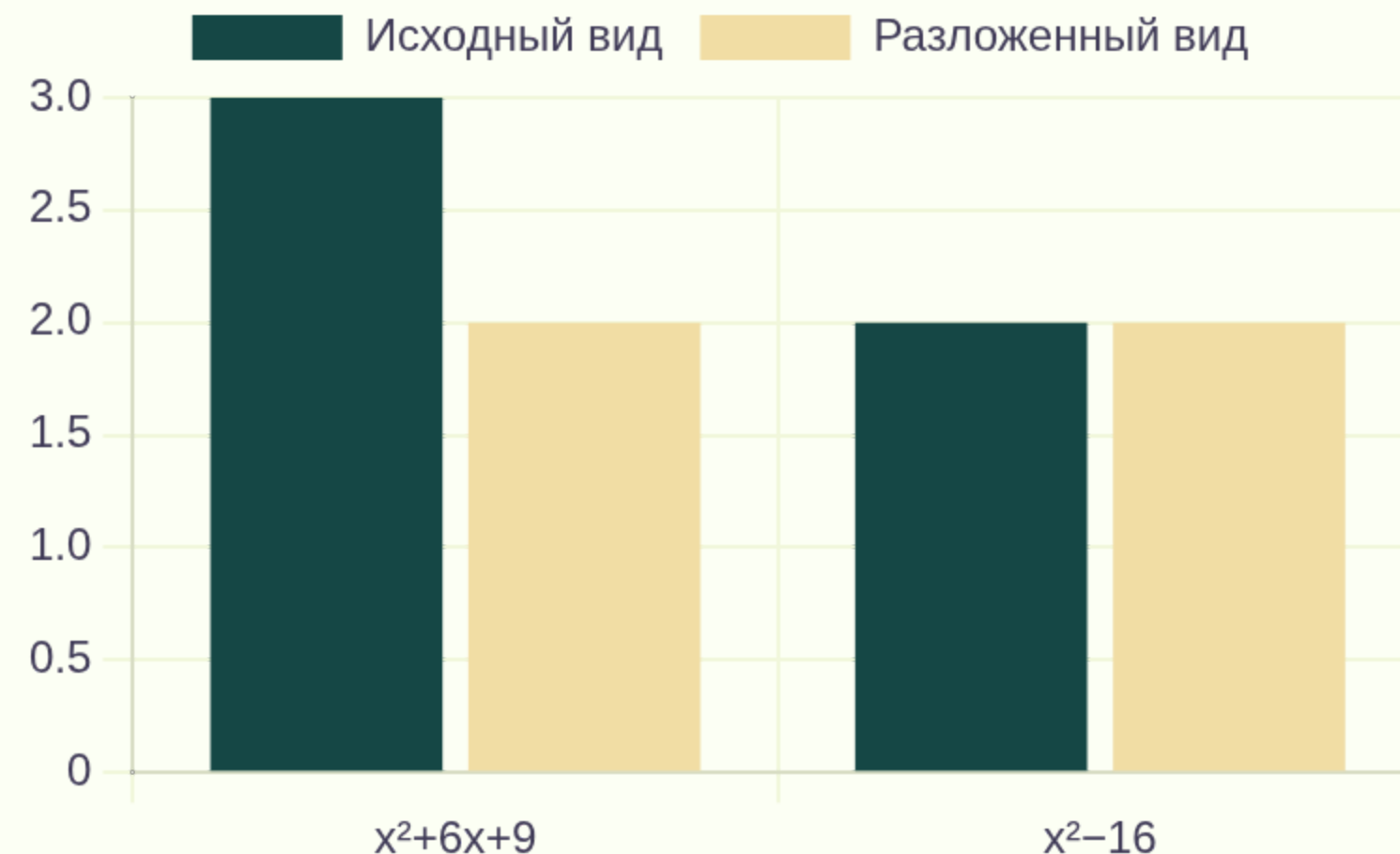
Последовательность поиска подходящей формулы: от общего множителя к проверке результата.



Сравнение исходного и разложенного вида выражений

Разложение делает запись короче и нагляднее. На уроке это особенно удобно, когда нужно быстро увидеть структуру многочлена и перейти к дальнейшим преобразованиям.

Разложенный вид упрощает работу с выражениями и помогает быстрее находить решения в уравнениях и преобразованиях.



Содержательный анализ примеров из темы урока

Примеры разложения многочленов

Многочлен	Разложение	Признак
$x^2+12x+36$	$(x+6)^2$	квадрат суммы
a^2-81	$(a-9)(a+9)$	разность квадратов
$4y^2+20y+25$	$(2y+5)^2$	квадрат суммы
$9m^2-30m+25$	$(3m-5)^2$	квадрат разности

Примеры показывают, как по внешнему виду многочлена выбрать нужную формулу и проверить результат по среднему члену.

Последний член подсказывает число в скобках, а средний член помогает определить знак и проверить правильность разложения.

Учебные примеры по теме «Формулы сокращённого умножения»

Связь разложения на множители с решением уравнений

1

Привести уравнение к удобному виду

Сначала уравнение стараются преобразовать так, чтобы слева остался многочлен, который можно разложить на множители. Это делает дальнейший шаг понятным и коротким.

2

Разложить выражение

Например, $x^2 - 9 = 0$ превращается в $(x-3)(x+3) = 0$, а $x^2 + 6x + 9 = 0$ — в $(x+3)^2 = 0$. Теперь видно, какие множители участвуют в решении.

3

Применить правило нуля

Если произведение равно нулю, то хотя бы один множитель должен быть равен нулю. Это основное правило позволяет перейти от одного уравнения к нескольким простым.

4

Получить корни

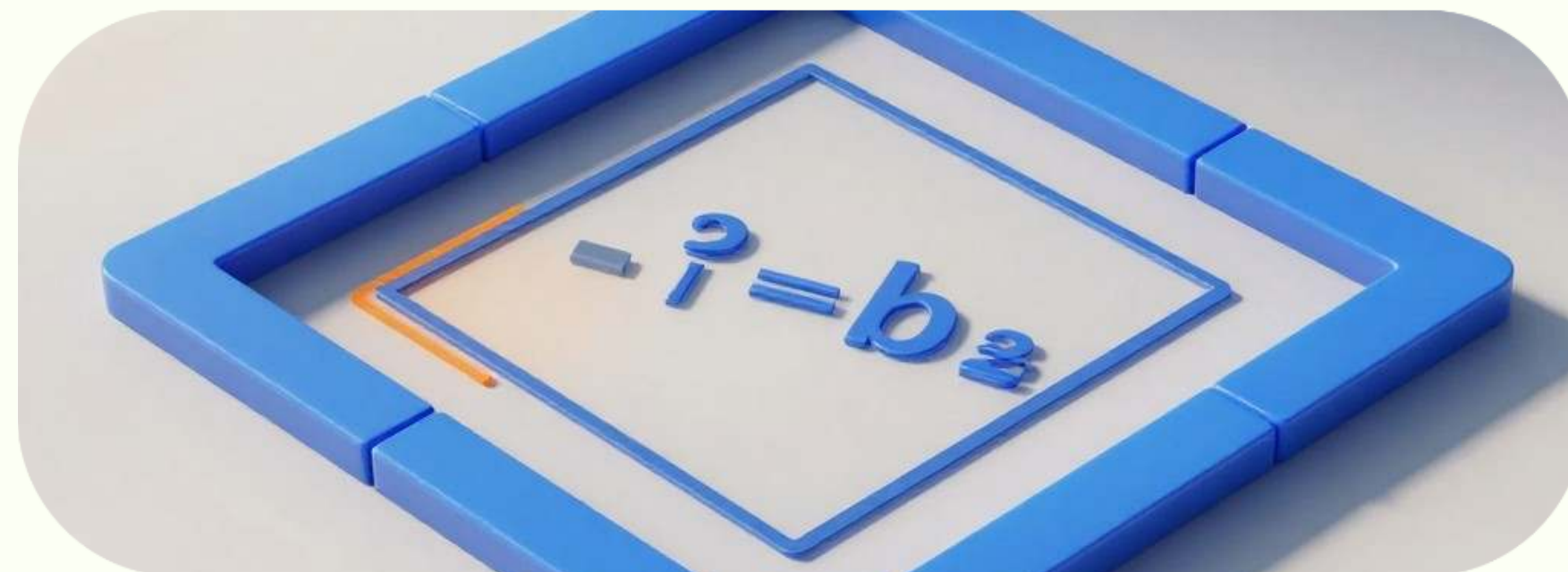
После нахождения нулей множителей записывают ответ. Такой способ помогает решать квадратные уравнения на раннем уровне и показывает практическую пользу формул сокращённого умножения.

Геометрический смысл формул сокращённого умножения



Квадрат, который складывается из частей

Если сторона квадрата равна $x+3$, его площадь можно представить как сумму нескольких участков. Один участок имеет площадь x^2 , два прямоугольника дают $3x$ и $3x$, а маленький квадрат — 9 . В итоге получается выражение x^2+6x+9 .



Разность площадей на чертеже

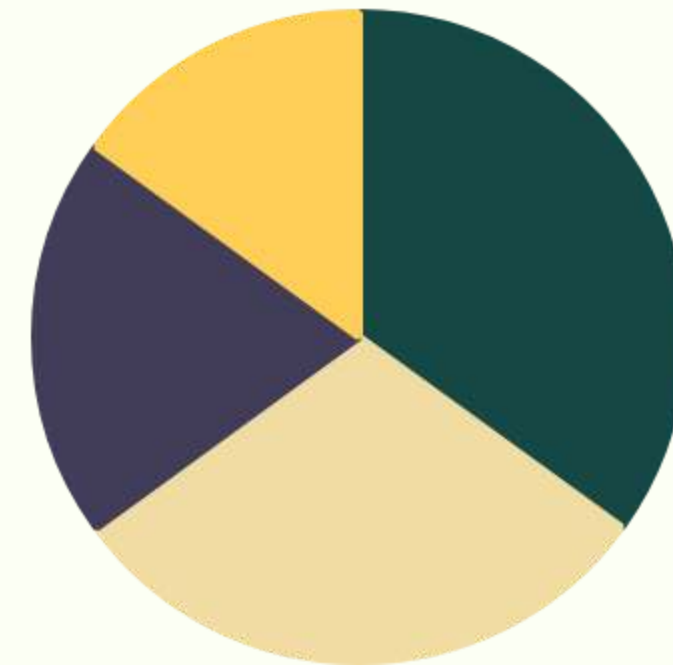
Формулу a^2-b^2 удобно понимать как разницу площадей двух квадратов. Большой квадрат можно мысленно разделить так, чтобы одна часть «убиралась», а оставшееся пространство распадалось на два прямоугольника. Тогда появляется произведение $(a-b)(a+b)$.

Где применяются формулы сокращённого умножения

На уроках 7 класса эти формулы встречаются не только в примерах на разложение, но и в дальнейших алгебраических преобразованиях.

Главные области применения связаны с преобразованием выражений и решением уравнений, поэтому тема становится базовой для всей дальнейшей алгебры.

■ Преобразование выражений
■ Решение уравнений ■ Сокращение дробей
■ Упрощение вычислений



Содержательный обзор учебных задач по теме

Мини-памятка для выбора формулы

1

Проверь общий множитель

Если все члены многочлена делятся на одно и то же выражение, его лучше вынести сразу. Этот шаг часто открывает более простой и знакомый вид записи.

2

Найди полный квадрат

Сравни первый и последний члены с квадратами. Если между ними стоит средний член вида $2ab$, выражение может быть квадратом суммы или квадратом разности.

3

Отличи разность квадратов

Когда виден только вычитание двух квадратов, применяют формулу $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Она не подходит для суммы квадратов, поэтому знаки нужно проверять особенно внимательно.

4

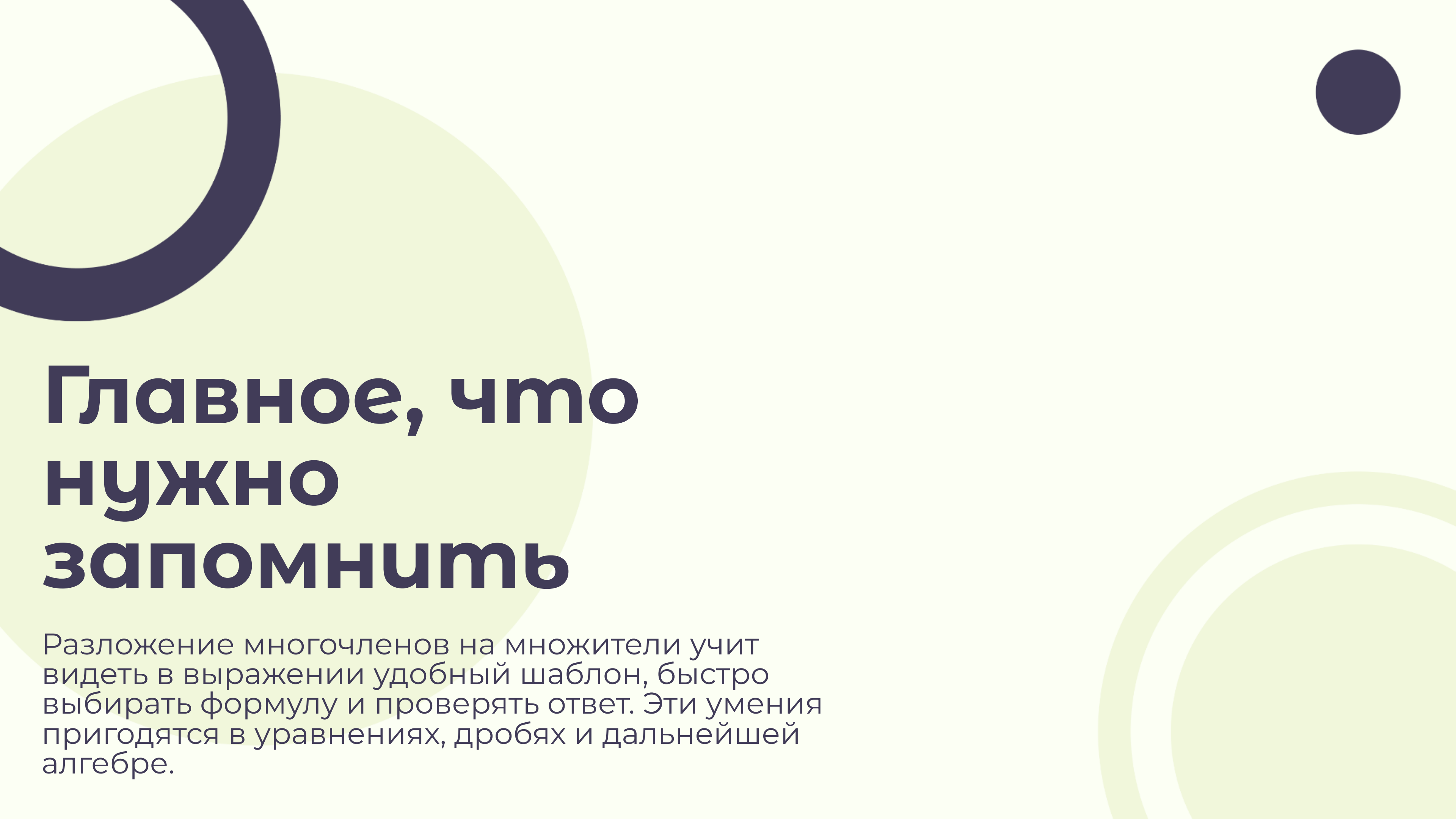
Запиши произведение

После узнавания подходящей формулы сразу переходят от многочлена к произведению множителей. Это помогает не терять структуру выражения и ускоряет решение.

5

Сделай проверку

Последний шаг обязателен: раскрыть скобки и сравнить результат с исходным многочленом. Такая проверка защищает от ошибок в знаке и в выборе числа.



Главное, что нужно запомнить

Разложение многочленов на множители учит видеть в выражении удобный шаблон, быстро выбирать формулу и проверять ответ. Эти умения пригодятся в уравнениях, дробях и дальнейшей алгебре.