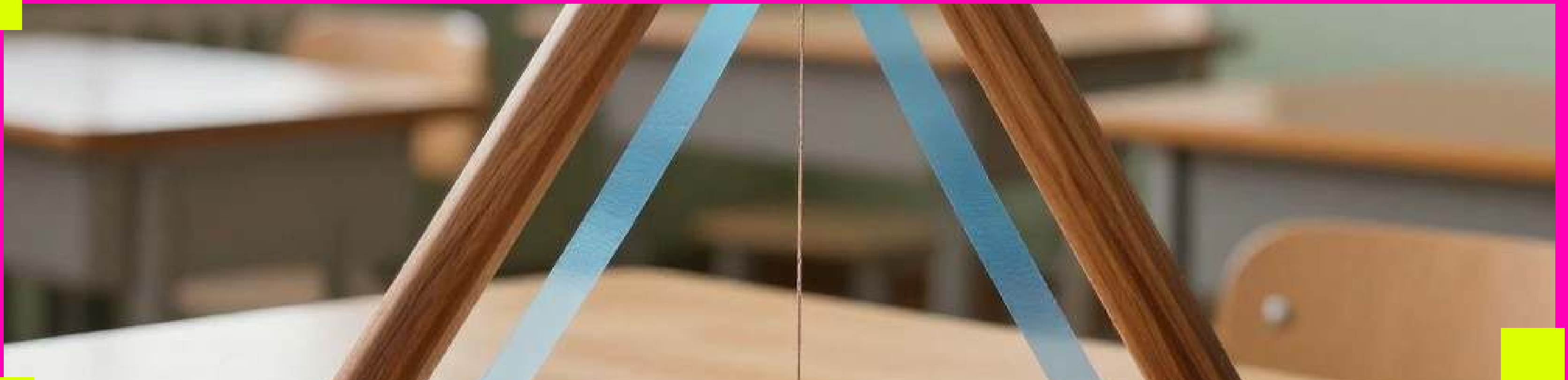


Замечательные точки треугольника

Пересечения медиан, высот, биссектрис и серединных перпендикуляров дают особые центры треугольника.



Почему эта тема входит в школьную геометрию

Замечательные точки изучают после медиан, высот, биссектрис и серединных перпендикуляров. Их используют в доказательствах, построениях и задачах на длины и углы. В олимпиадах и на контрольных такие точки помогают быстро находить нужные связи.

Основные линии в треугольнике

Медиана соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны. Она помогает связать длины сторон и подводит к центроиду, который появляется при пересечении нескольких таких отрезков.

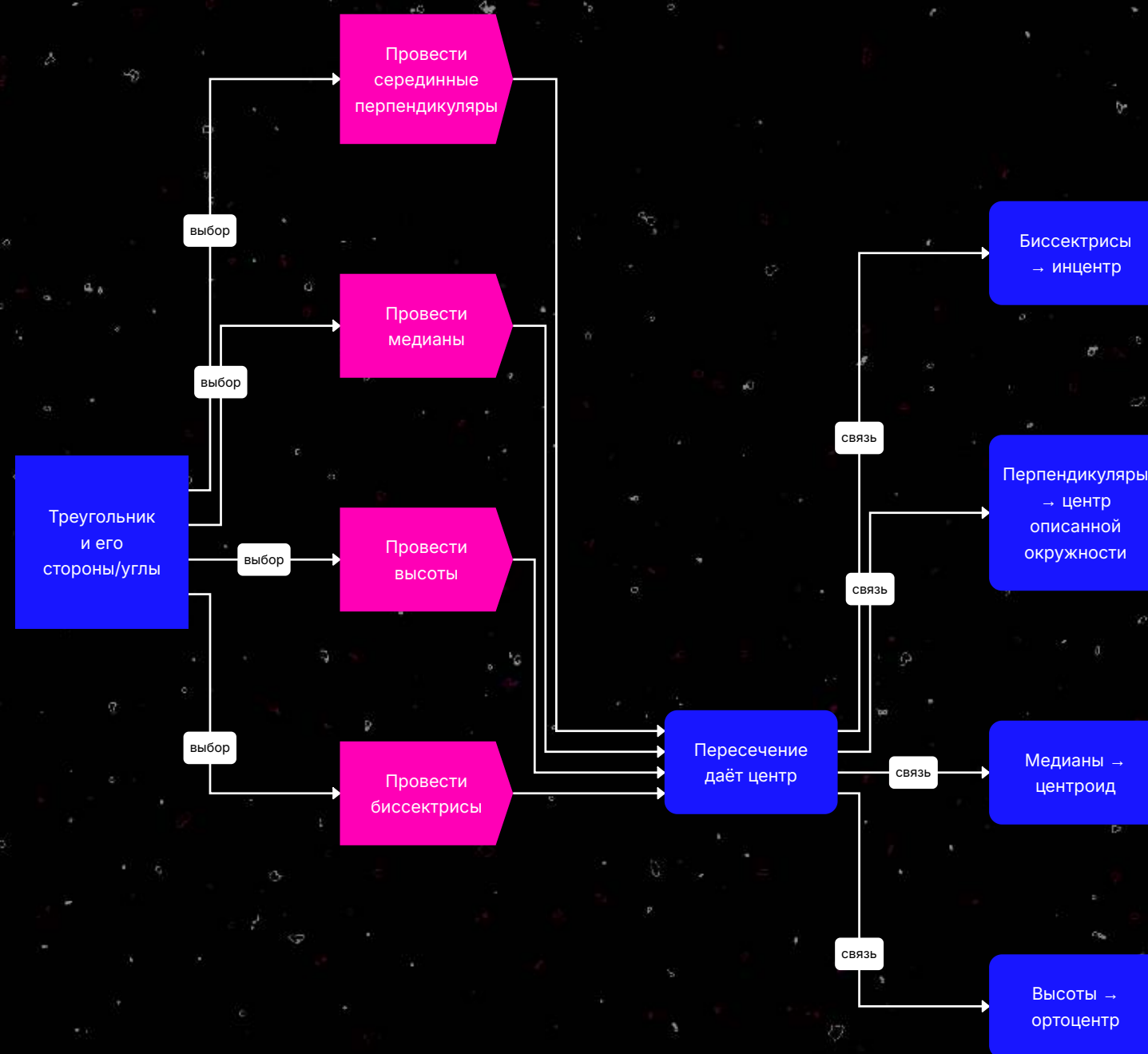
Высота проводится из вершины перпендикулярно противоположной стороне (или её продолжению). Пересечение высот приводит к ортоцентру и позволяет распознавать вид треугольника по положению этой точки.

Биссектриса делит угол на две равные части. На её основе возникает инцентр, а также появляется удобный способ работать с расстояниями от точки до сторон и радиусами вписанной окружности.

Серединный перпендикуляр проходит через середину стороны и образует с ней прямой угол. Когда такие перпендикуляры проведены к трём сторонам, они пересекаются в центре описанной окружности.

Как возникают замечательные точки

Из одного и того же треугольника проводим линии одного типа, и они пересекаются в особых центрах.



Центроид — точка пересечения медиан

Центр масс и равновесие

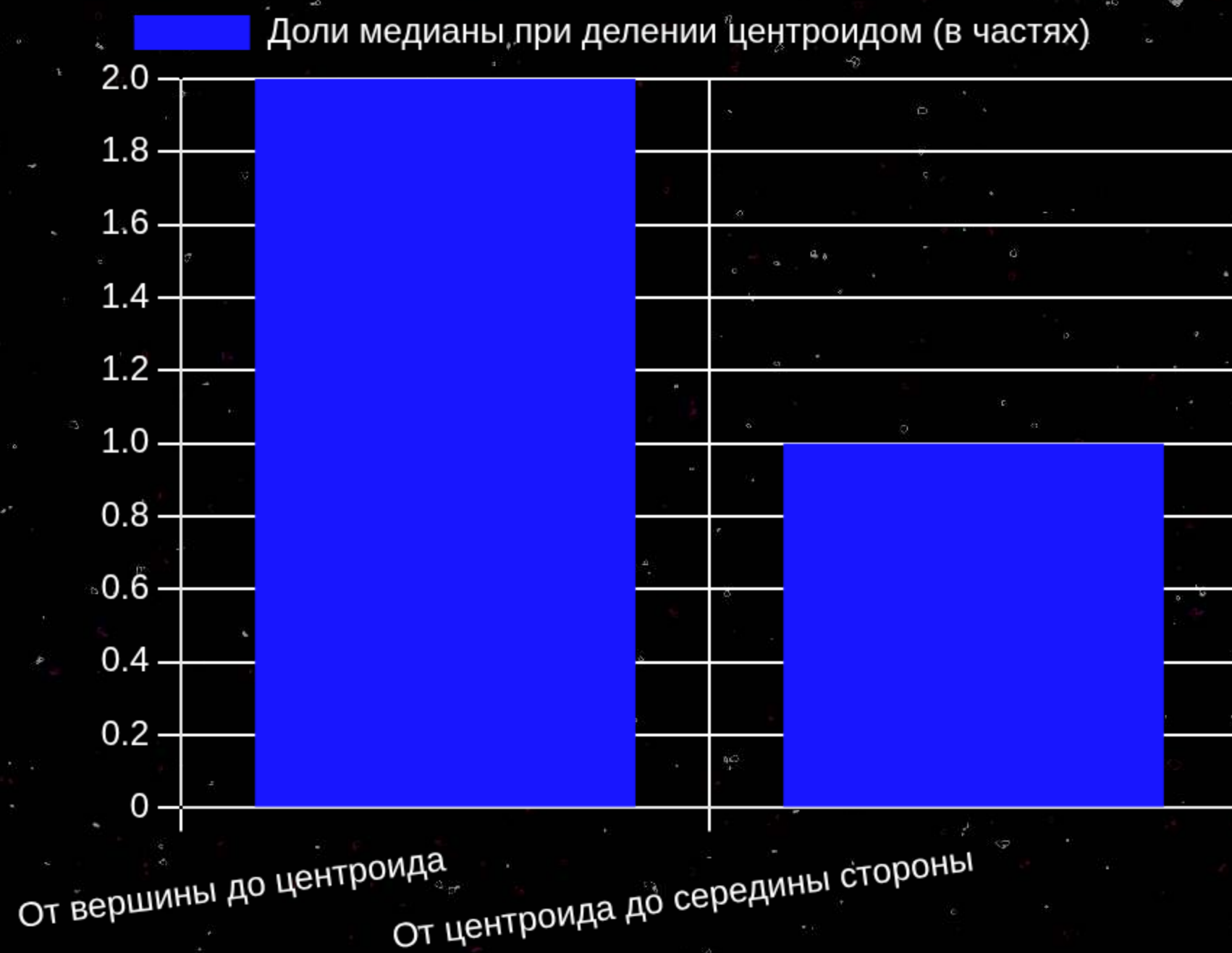
Центроид расположен в точке пересечения трёх медиан треугольника. Эту точку связывают с центром масс однородной треугольной пластинки, поэтому идея равновесия здесь особенно наглядна.



Деление медианы

Центроид делит каждую медиану в отношении 2:1, если считать от вершины. Обычно на рисунке показывают треугольник с тремя медианами и отмечают их внутреннюю точку пересечения.

Как центроид делит медиану



Если известна вся медиана, то одна её треть равна отрезку от центроида до середины стороны.

Диаграмма показывает постоянную пропорцию: медиана всегда делится центроидом на 2 равные части относительно большей и меньшей долей.

Геометрическое свойство центроида: отношение 2:1 для каждой медианы.

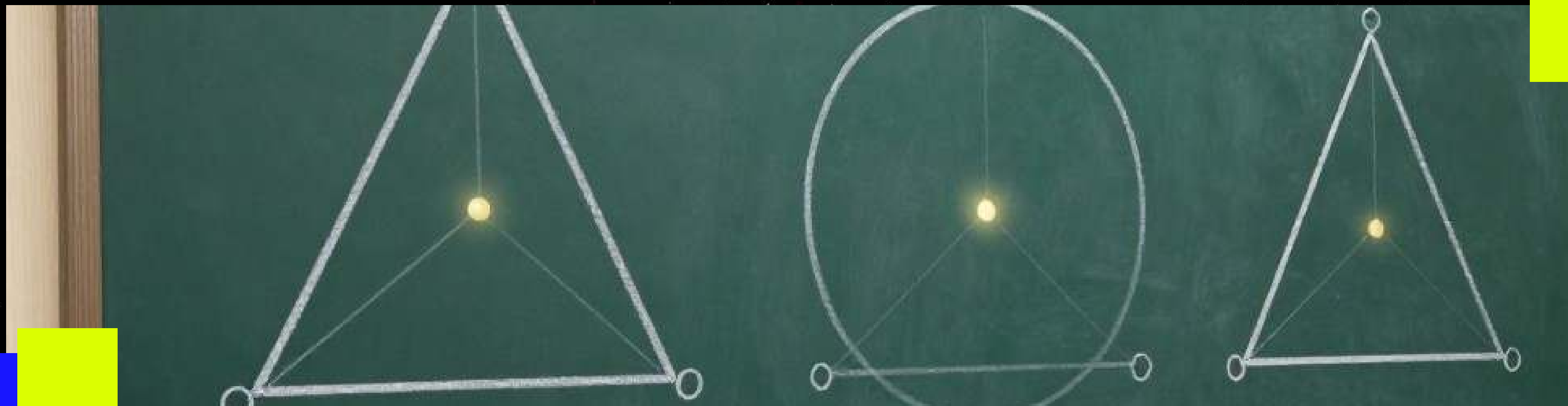
Ортоцентр и высоты треугольника

Ортоцентр — точка пересечения трёх высот треугольника. Высоты образуют перпендикуляры к сторонам, поэтому ортоцентр связан с “геометрией под прямыми углами”.

В остроугольном треугольнике ортоцентр находится внутри фигуры. Это помогает при проверке: если высоты пересекаются внутри, значит треугольник острый.

В прямоугольном треугольнике ортоцентр совпадает с вершиной прямого угла. В тупоугольном треугольнике он расположен вне треугольника, что тоже заметно по положению пересечений.

Центр описанной окружности



Центр описанной окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Он равноудалён от всех трёх вершин, значит существует одна окружность, проходящая через них.

Геометрическое расположение зависит от вида треугольника: в остроугольном центре описанной окружности внутри, в прямоугольном — на середине гипотенузы, в тупоугольном — снаружи.

Сравнение четырех основных центров треугольника

Точки отличаются тем, какие линии вы пересекаете, и какой “геометрический смысл” они несут: перпендикулярность, равенство расстояний или деление отрезков.

Каждая “особая точка” связана с отдельным набором равенств, поэтому её можно искать по типу линий, а не случайными построениями.

Точка	По каким линиям	Где находится / главное свойство
Центроид	Медианы	Обычно внутри; делит медиану 2:1 от вершины
Ортоцентр	Высоты	Внутри/в вершине/вне; пересечение высот
Центр описанной окружности	Серединные перпендикуляры	Равноудалён от вершин; внутри/на гипотенузе/вне
Инцентр	Биссектрисы	Всегда внутри; равноудалён от сторон

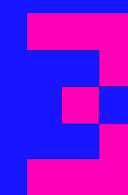
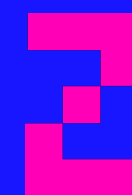
Сводка школьных свойств замечательных точек треугольника.

Центр вписанной окружности

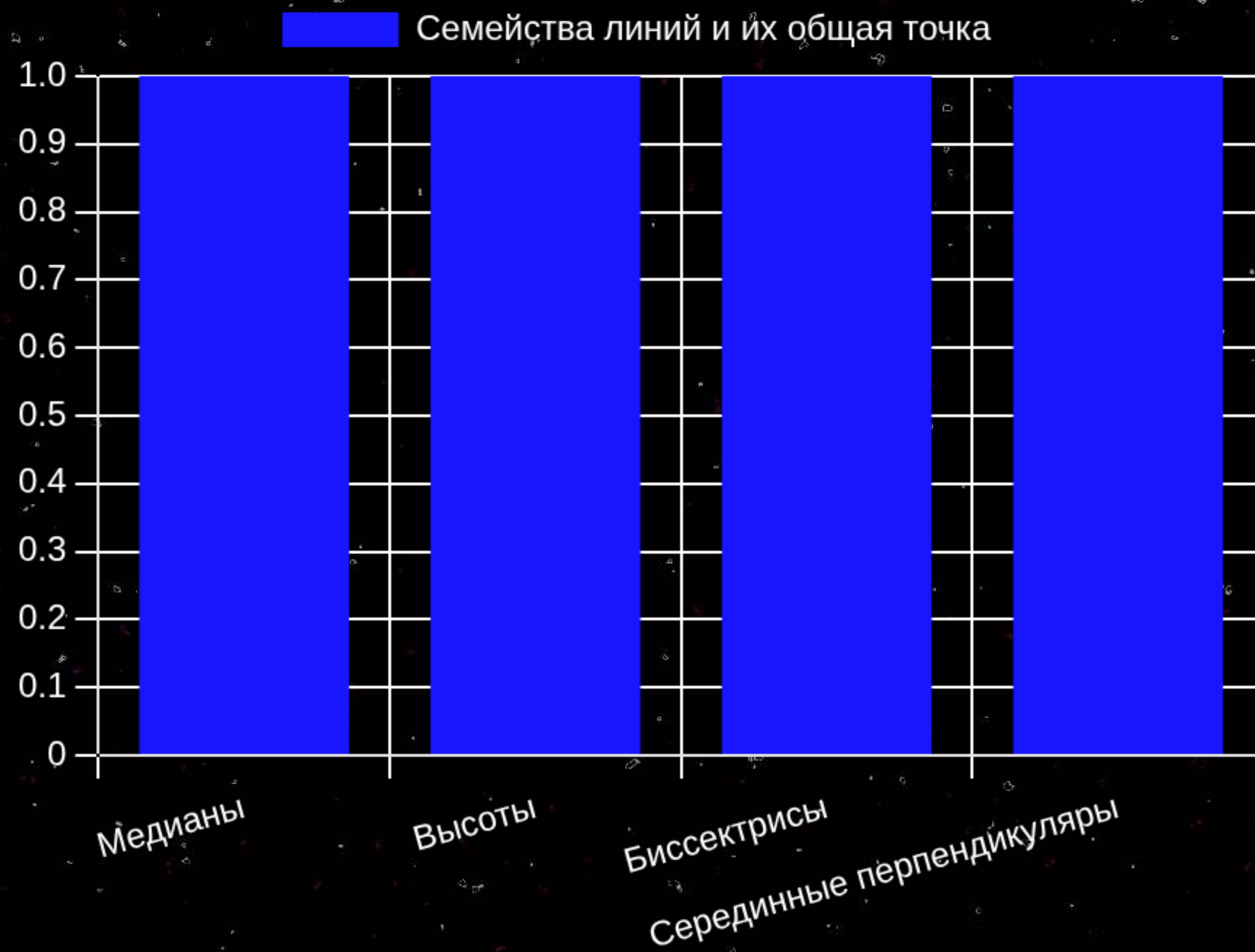
Центр вписанной окружности, или инцентр, находится в точке пересечения биссектрис углов треугольника. Он получается из равенства угловых частей, поэтому его поиск начинается именно с биссектрис.

Инцентр равноудалён от всех трёх сторон. Благодаря этому из него можно провести окружность, которая касается каждой стороны треугольника в одной точке.

Инцентр всегда лежит внутри треугольника. Поэтому он часто удобен в задачах на вписанную окружность и радиус: достаточно связать расстояния от точки до сторон.



Какие линии дают одну общую точку



Каждое семейство линий определяется одним правилом для сторон и углов. Поэтому пересечение не «случайно», а напрямую связано с геометрическим свойством треугольника.

Сводная схема показывает: разные системы линий приводят к различным центрам. Это помогает выбрать подходящую конструкцию под задачу и сократить доказательства.

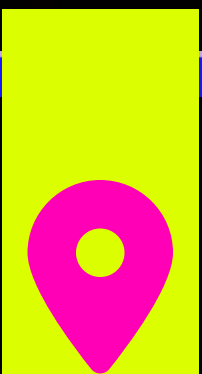
Школьный курс планиметрии (материал по медианам, высотам, биссектрисам и серединным перпендикулярам); актуально на 2026 год.

Построение центра вписанной окружности (инцентра)

Основано на том, что инцентр лежит в точке пересечения биссектрис углов треугольника; радиус — перпендикуляр от инцентра к стороне.

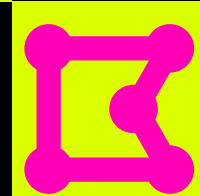
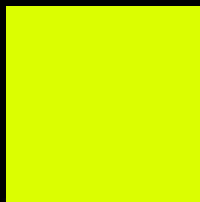


Дополнительные замечательные точки



Точка Нагеля

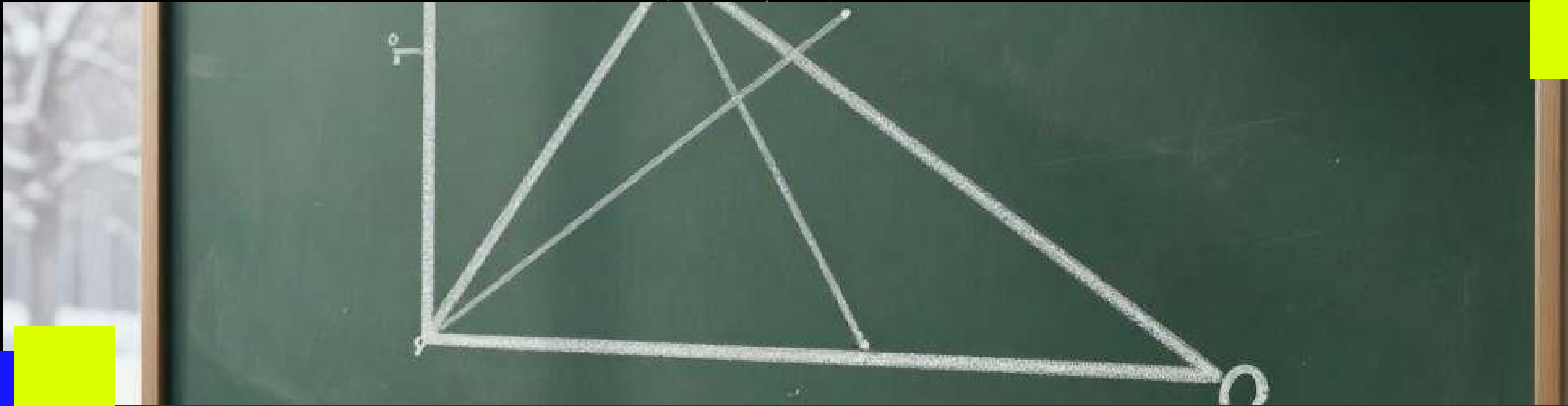
Точка Нагеля связана с внеписанными окружностями: она возникает в задачах, где рассматривают их касания и используют соотношения, отражающие деление периметра треугольника.



Точка Жергонна

Точка Жергонна появляется в треугольнике, когда изучают касания вписанной окружности со сторонами. Через неё формулируются красивые свойства касательных отрезков.

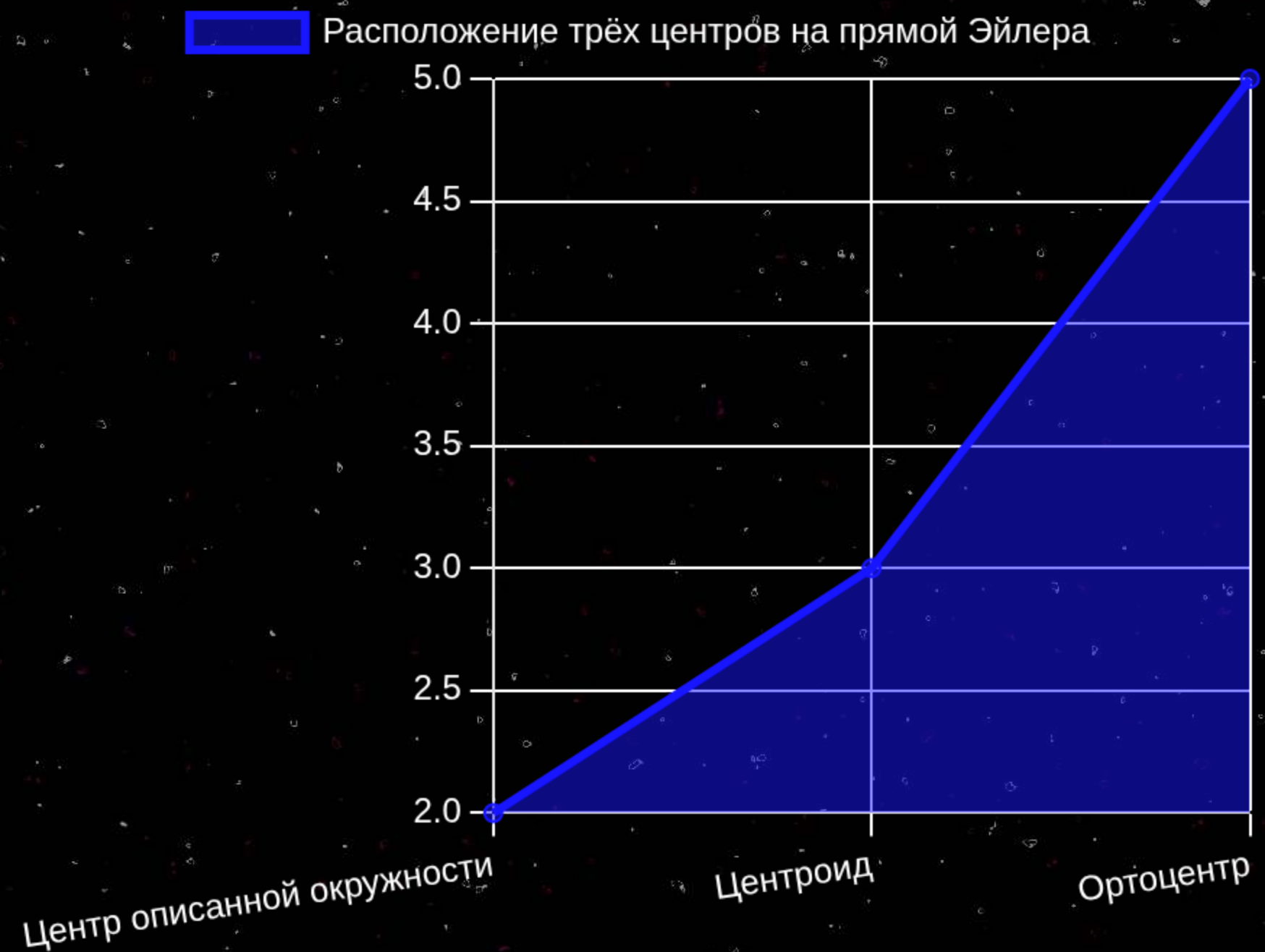
Прямая Эйлера



В любом невырожденном треугольнике ортоцентр, центроид и центр описанной окружности лежат на одной прямой — прямой Эйлера. Она помогает связать высоты, медианы и серединные перпендикуляры в одной схеме.

На этой прямой центроид делит отрезок между ортоцентром и центром описанной окружности в отношении 2:1. Благодаря этому можно быстро находить нужные отрезки и проверять решения в олимпиадных задачах.

Порядок точек на прямой Эйлера



Три точки всегда выстраиваются в одном порядке вдоль прямой: центроид оказывается между центром описанной окружности и ортоцентром.

Линейная диаграмма подчёркивает не только расположение, но и «меру расстояния»: больший участок вдвое больше меньшего, что фиксирует отношение 1:2.

Школьная геометрия: свойства прямой Эйлера; формулировка отношения (2:1) и порядок точек общеприняты.

Где находятся замечательные точки в разных треугольниках

Тип треугольника	Центроид	Ортоцентр	Центр описанной окружности	Центр вписанной окружности
Остроугольный	внутри	внутри	внутри	внутри
Прямоугольный	внутри	в вершине	на середине гипотенузы	внутри
Тупоугольный	внутри	вне	вне	внутри

В таблице отражено, где обычно располагаются центры в зависимости от типа треугольника: остроугольного, прямоугольного и тупоугольного.

Только центр описанной окружности меняет место относительно треугольника столь резко: он уходит наружу при тупом угле, тогда как инцентр сохраняет внутреннее положение.

Планиметрия, раздел о положении центров в зависимости от знаков углов; обобщённые школьные результаты.

История имен и открытий



XVIII век

В работах европейских математиков формировались системные связи между высотами, медианами и окружностями. Это подготовило почву для объединения ключевых центров треугольника в одну теорию.

Начало–середина XVIII века

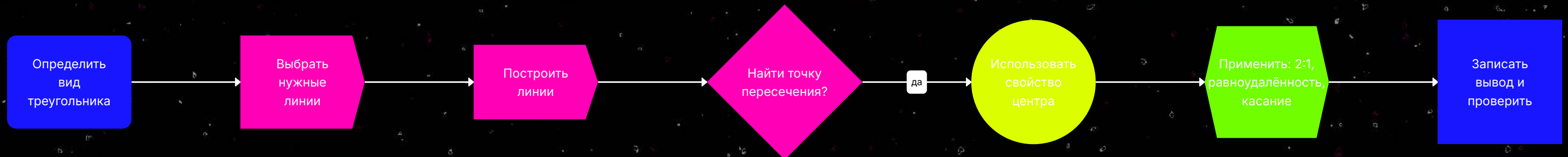
Леонард Эйлер связал в единую систему ортоцентр, центроид и центр описанной окружности. Так появилась прямая Эйлера — факт, который и сегодня служит опорой для задач.

XIX век

Точки Нагеля и Жергонна получили распространение в связи со свойствами вневписанных и вписанных окружностей. История их изучения показывает, как школьные темы развивались вместе с математикой.

Алгоритм решения задач по теме

Основано на выборе нужного семейства линий и использовании свойств пересечения: деление отрезков, равноудалённость и перпендикулярность.



Где применяются замечательные точки



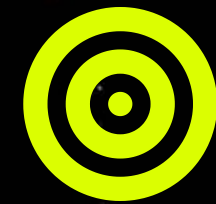
Геометрические построения

Центры треугольника помогают при построениях окружностей и при поиске точек касания. Часто достаточно построить нужные линии, чтобы получить центр без длинных вычислений.



Доказательства в задачах

В доказательствах центры выступают как «опорные» точки: они задают равенства расстояний и перпендикулярность. Так сокращаются рассуждения и уменьшается число промежуточных построений.



Центры окружностей

По замечательным точкам находят центры описанной и вписанной окружностей. Это облегчает решение задач на радиус и проверку касания: достаточно учесть равные расстояния до вершин или сторон.



Координатные задачи и модели

В координатной геометрии такие точки удобно задавать формулами, когда геометрия «превращается» в расчёты. Также они полезны при проверке моделей из картона и чертежей.

Внутренний порядок треугольника в четырёх центрах

У треугольника есть несколько особых центров, и каждый из них связан с определенной системой линий. Центроид — с медианами, ортоцентр — с высотами, центр описанной окружности — с серединными перпендикулярами, инцентр — с биссектрисами. Эти точки помогают увидеть порядок внутри треугольника и решать задачи доказательно и точно, поэтому они занимают важное место в геометрии 9 класса.