

Окружность, описанная около правильного многоугольника

Правильный многоугольник и его окружность



Почему эта тема важна

Описанная окружность помогает увидеть связь многоугольника с кругом. Она встречается в задачах по геометрии, черчению и в реальных формах — от часов до узорov и колёс.



Основные определения

Описанная окружность

Окружность, описанная около многоугольника, проходит через все его вершины. Это значит, что каждая вершина лежит на одной и той же линии, а фигура как бы вписана в круг.

1

Центр окружности

Центр описанной окружности — точка, от которой до всех вершин одинаковое расстояние. Именно поэтому она является опорой для построения и помогает находить неизвестные элементы фигуры.

2

Радиус R

Радиус описанной окружности обозначают буквой R . Это отрезок от центра до любой вершины. Для правильного многоугольника все такие отрезки равны между собой.

3

Почему она существует

У правильного многоугольника описанная окружность существует всегда и определяется однозначно. Его симметрия делает вершины расположенными так, что их можно соединить одной окружностью.

4



Правильный многоугольник на окружности

Равные стороны и углы

У правильного многоугольника все стороны одинаковы, и все углы тоже равны. Из-за этого фигура выглядит очень ровной и симметричной, а её вершины удобно расположить на окружности.

Вершины на одной линии

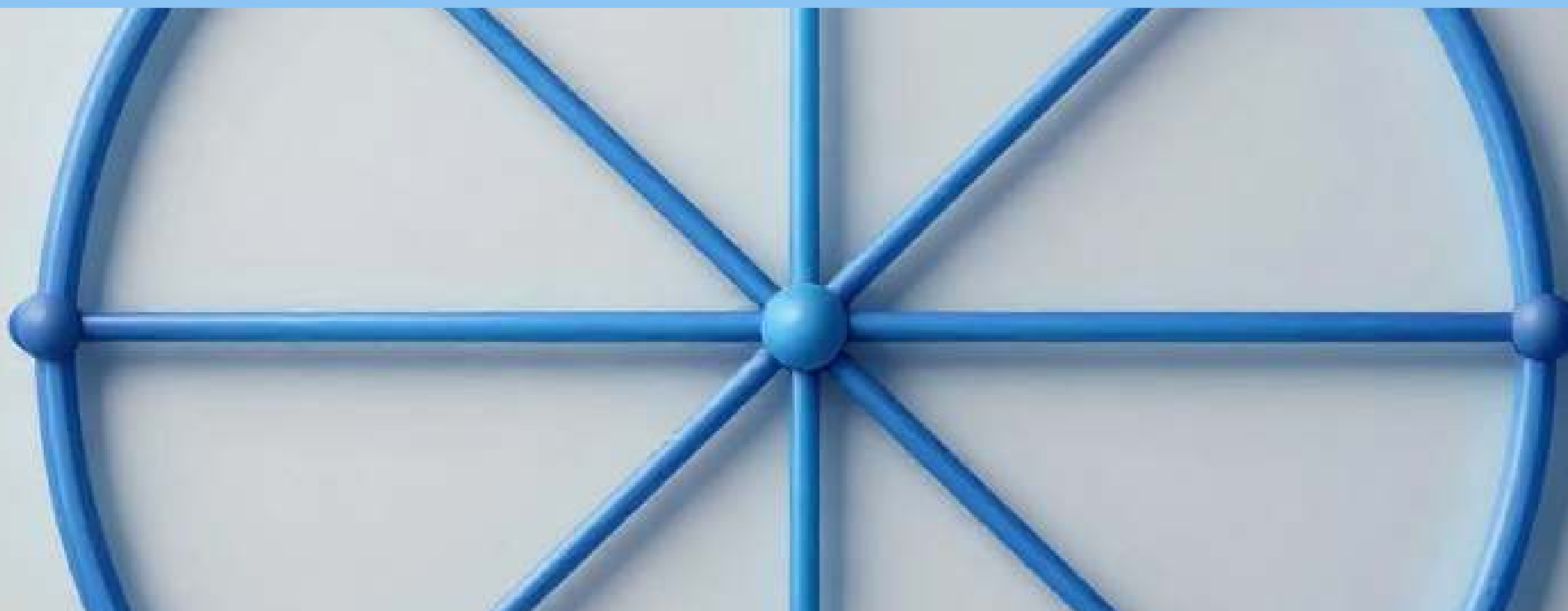
Если соединить вершины правильной фигуры с центром, получится несколько равных радиусов. Все вершины окажутся на одной окружности, потому что расстояние от центра до каждой из них одинаковое.

Подписи на чертеже

На схеме важно обозначить центр O и радиусы OA , OB , OC . Такие подписи помогают увидеть, что все расстояния от центра до вершин равны, а дуги между соседними вершинами одинаковы.

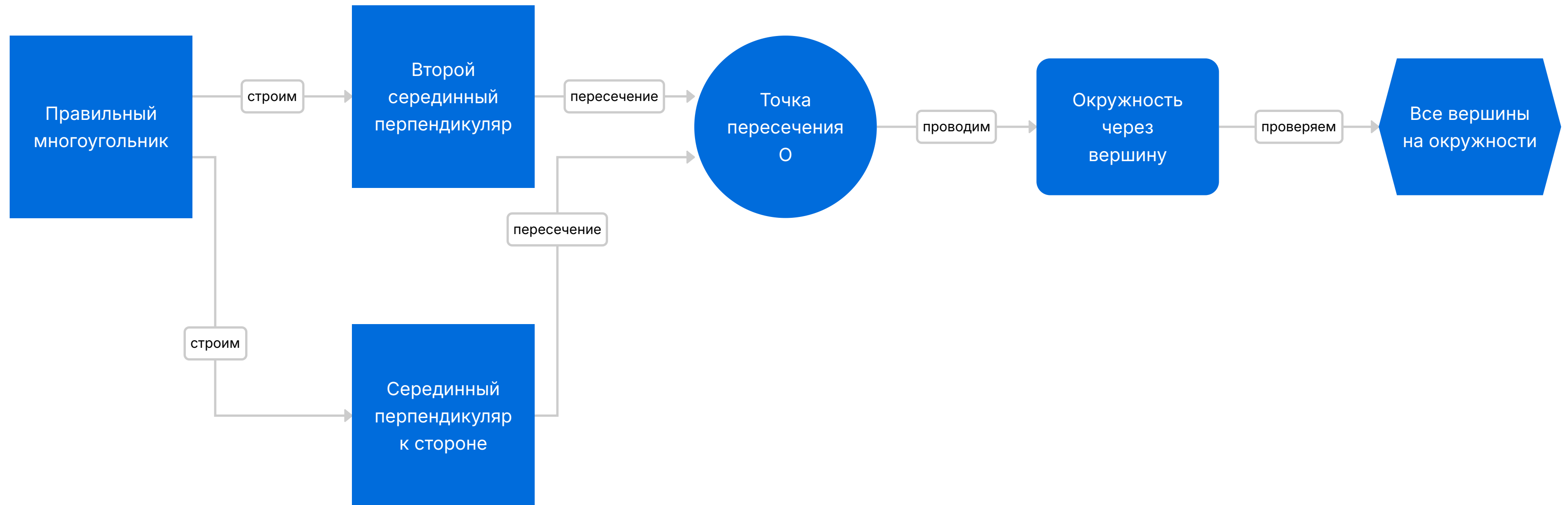
Симметрия фигуры

Рисунок с окружностью показывает сразу две симметрии: осевую и поворотную. Именно поэтому правильные многоугольники часто выглядят уравновешенно и встречаются в орнаментах и декоративных узорах.



Как построить описанную окружность

Последовательность показывает, как найти центр и провести окружность через вершины



Почему центр существует и является единственным

Пересечение перпендикуляров

Серединные перпендикуляры к сторонам правильного многоугольника пересекаются в одной точке. Эта точка одинаково удалена от вершин и подходит на роль центра описанной окружности.

Равное расстояние до вершин

Если провести от найденной точки отрезки к разным вершинам, они окажутся равны. Значит, все вершины лежат на одной окружности, а точка действительно является её центром.

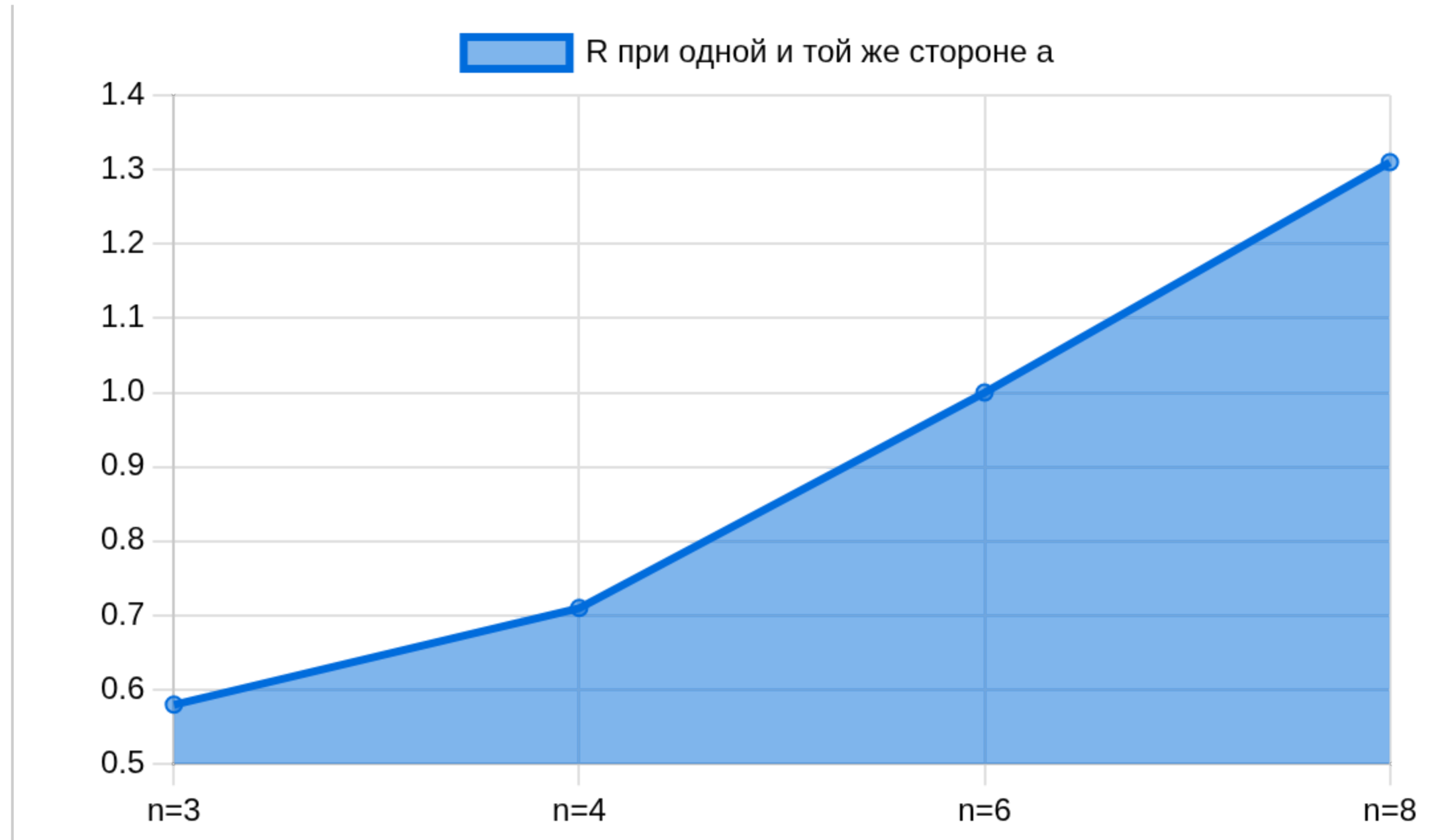
Только одна окружность

Для одного правильного многоугольника нельзя получить две разные описанные окружности. Общий центр и одинаковые расстояния до вершин делают такую окружность единственной.

Как меняется радиус при увеличении числа сторон

При одинаковой стороне фигуры с большим числом сторон требуют более крупной описанной окружности.

Чем больше сторон у правильного многоугольника, тем больше радиус при той же стороне и тем ближе фигура к кругу.



Формула $R = a / (2 \sin(180^\circ/n))$; значения округлены.

Связь радиуса, стороны и центрального угла

1. Центральный угол

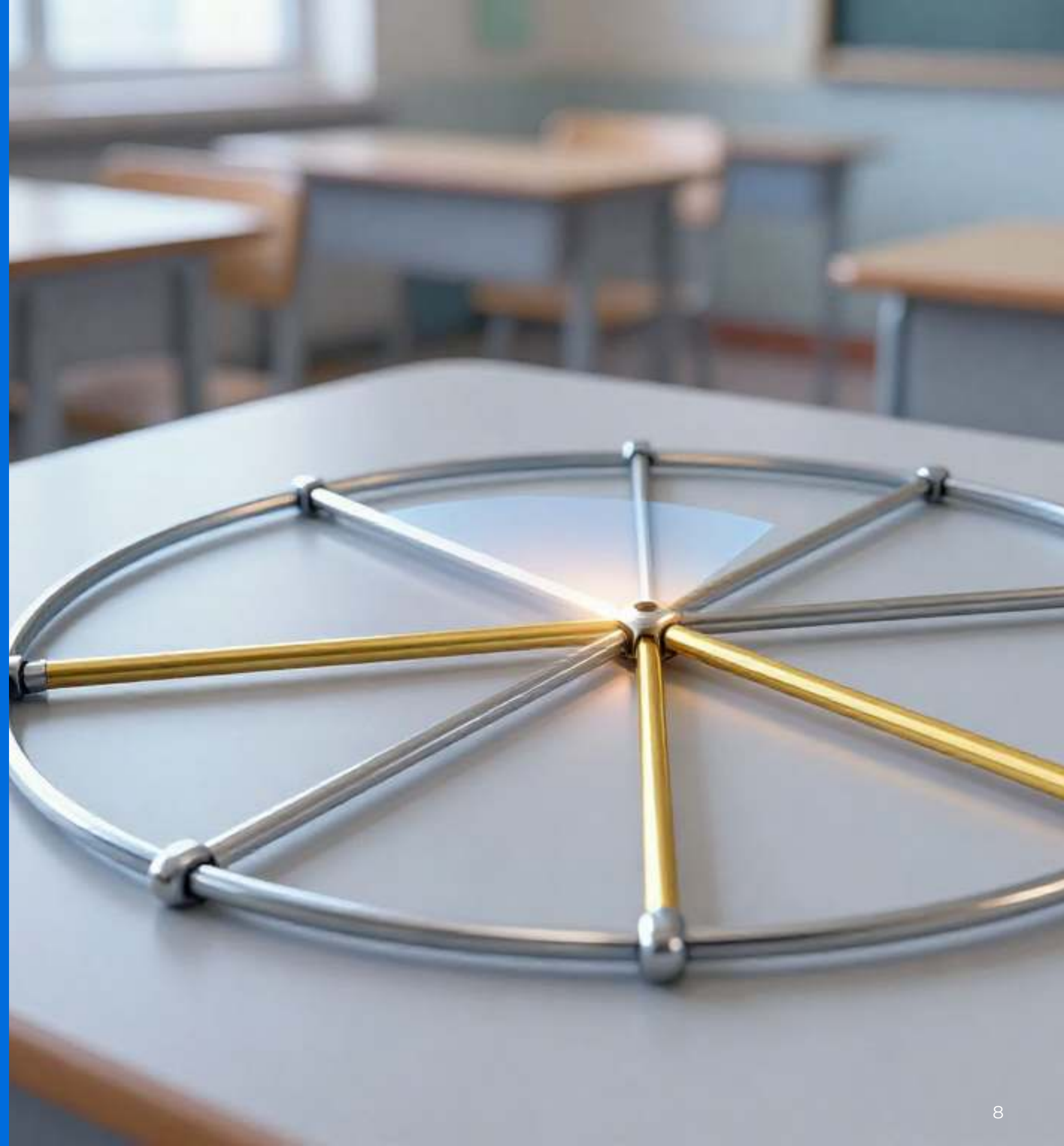
В правильном n -угольнике весь круг делится на равные части. Поэтому центральный угол всегда равен $360^\circ/n$, и его легко найти, если известно число сторон.

2. Сторона как хорда

Каждая сторона правильного многоугольника является хордой описанной окружности. Чем больше сторон у фигуры при одном радиусе, тем короче становится каждая такая хорда.

3. Почему это важно

Эта связь позволяет переходить от рисунка к вычислениям. Зная радиус или сторону, можно найти угол, а затем определить другие элементы многоугольника без лишних построений.



Сравнение правильных многоугольников

Фигура	Стороны	R/a
Треугольник	3	$1/\sqrt{3}$
Квадрат	4	$1/\sqrt{2}$
Пятиугольник	5	$\approx 0,85$
Шестиугольник	6	1

Сравним несколько правильных фигур по числу сторон, центральному углу и отношению радиуса к стороне.

С ростом числа сторон центральный угол уменьшается, а фигура становится более похожей на окружность.

Треугольник, квадрат и шестиугольник

Равносторонний треугольник

Центр описанной окружности у равностороннего треугольника находится в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам. От неё до всех трёх вершин одинаковое расстояние.

1

Квадрат

У квадрата диагонали пересекаются в одном центре, и эта точка одновременно является центром описанной окружности. Одна диагональ здесь выступает как диаметр окружности.

2

Правильный шестиугольник

У правильного шестиугольника особенно удобная связь: его сторона равна радиусу описанной окружности. Поэтому такую фигуру легко строить и проверять по чертежу.

3



Радиус, диаметр и хорда на чертеже

Центр и радиусы

На рисунке обычно отмечают центр O и несколько радиусов, например OA и OB . Все они равны по длине, потому что соединяют центр с точками одной и той же окружности.

Хорда как сторона

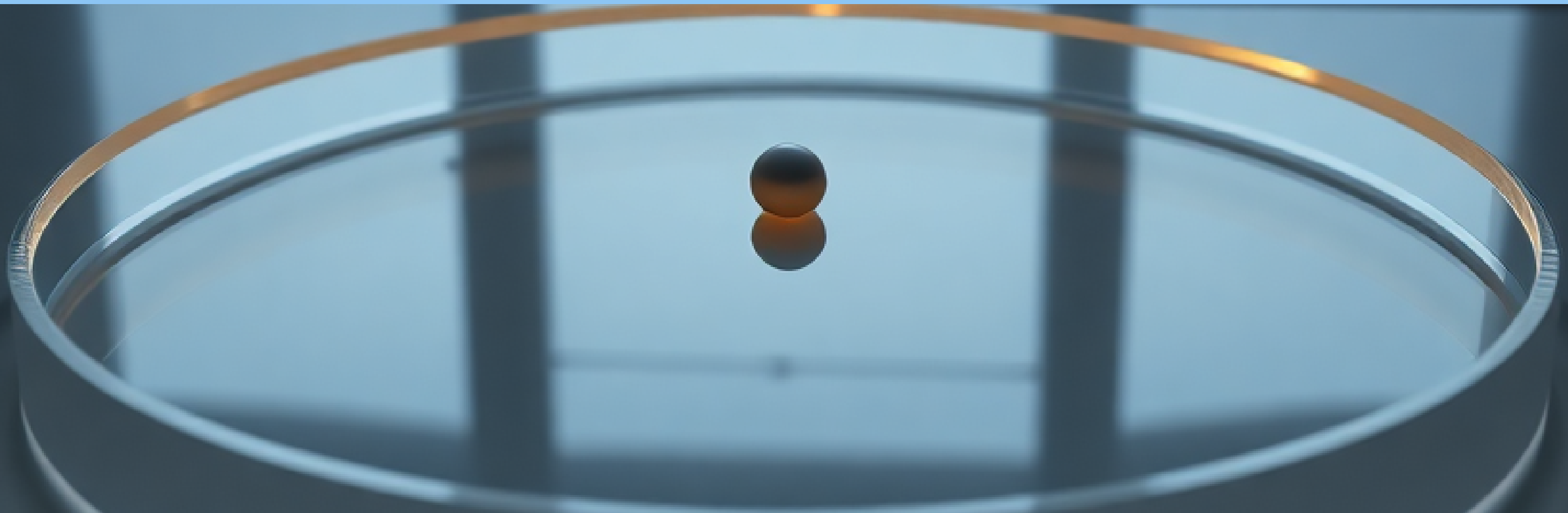
Отрезок AB , соединяющий две вершины, является хордой. У правильного многоугольника такая хорда часто совпадает со стороной, поэтому её удобно использовать в построениях и вычислениях.

Диаметр через центр

Если хорда проходит через центр O , она становится диаметром. Диаметр делит окружность на две равные части и помогает быстрее находить соотношения между элементами фигуры.

Что показывает чертёж

По подписанным радиусам, хорде и диаметру легко увидеть симметрию правильного многоугольника. Такой чертёж показывает, как вершины связаны с центром и почему фигура построена точно.

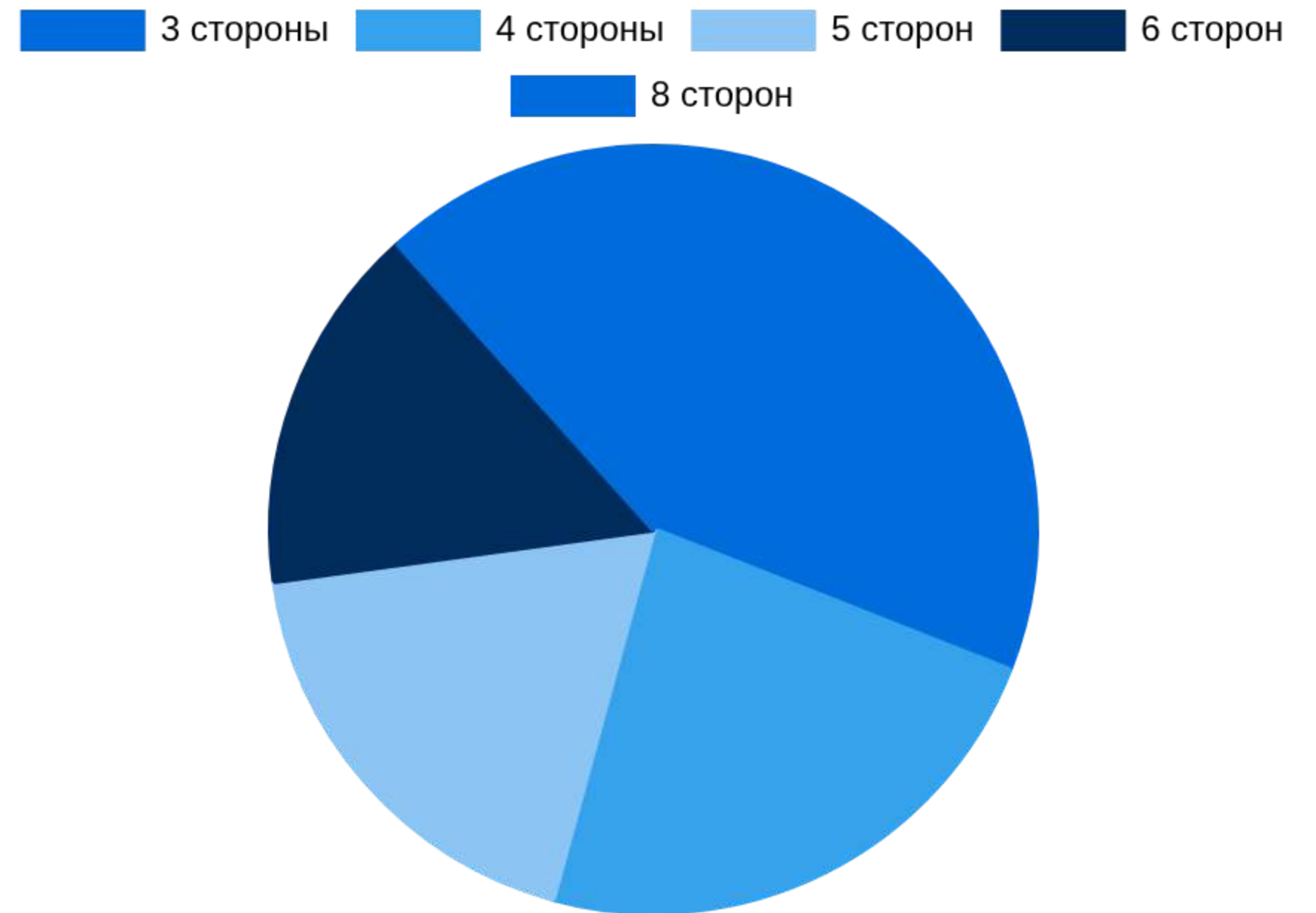


Доля полного круга для центрального угла

Каждый сектор соответствует одному равному центральному углу правильного многоугольника и показывает, как круг «делится» между его вершинами.

При увеличении числа сторон один угол занимает всё меньшую часть круга, поэтому фигура постепенно приближается к окружности.

Формула центрального угла правильного n -угольника: $360^\circ/n$.
Значения рассчитаны по ней.



Формулы для решения задач

1. Найти центральный угол

Сначала определяют число сторон n и находят центральный угол по формуле $360^\circ/n$. Это основной шаг, потому что он показывает, на какие равные части разделена окружность.

2. Связать сторону и радиус

Затем используют формулу $a = 2R \sin(180^\circ/n)$. Она помогает найти длину стороны, если известен радиус, или проверить, согласуются ли данные с правильным многоугольником.

3. Вычислить неизвестное

Если известна сторона, радиус находят по формуле $R = a / (2 \sin(180^\circ/n))$. Эти соотношения позволяют решать задачи без лишних построений и ошибок.

Как проверить правильность построения

1. Проверка вершин

Сначала убеждаются, что все вершины лежат на одной окружности. Если хотя бы одна точка выходит за её пределы, построение уже нельзя считать точным.

2. Проверка центра

Затем сравнивают расстояния от центра до каждой вершины. Они должны быть одинаковыми, иначе центр выбран неверно или многоугольник не является правильным.

3. Проверка сторон

В конце проверяют, что серединные перпендикуляры к разным сторонам пересекаются в одной точке. Это подтверждает правильность построения и существование описанной окружности.



Значения радиуса при одинаковой стороне

Фигура	R, см
Треугольник	5,77
Квадрат	7,07
Пятиугольник	8,51
Шестиугольник	10,00
Восьмиугольник	13,07

Вычисления по формуле $R = a / (2 \sin(180^\circ/n))$, при $a = 10$ см.

Для стороны $a = 10$ см радиус описанной окружности зависит от числа сторон правильного многоугольника и заметно возрастает.

Чем больше сторон у правильного многоугольника, тем больше радиус при одной и той же стороне. Это отражает сближение фигуры с окружностью.

Где используются правильные многоугольники и окружности

Орнамент, который держится на симметрии

В декоративных узорах вершины часто располагают по окружности, чтобы рисунок выглядел аккуратно и уравновешенно. Такой приём хорошо заметен в мозаиках, розетках и снежинках с равными лучами.



Круги в технике и предметах

Колёса, циферблаты и шестерёнки тоже опираются на идею окружности и равномерного размещения точек. Благодаря этому форма кажется точной, а элементы легко согласуются друг с другом.



Геометрия в оформлении

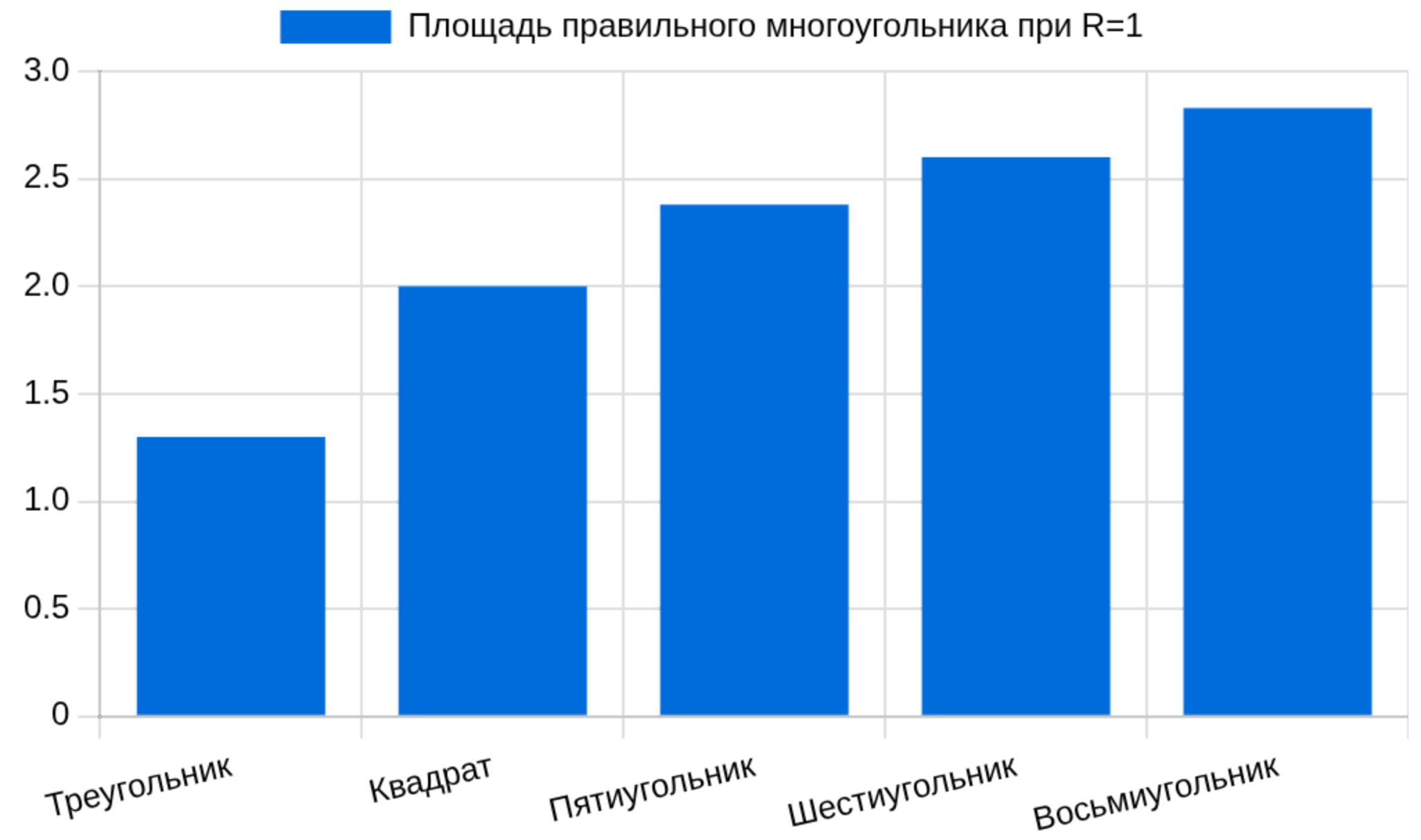
Эмблемы и декоративные знаки нередко строят вокруг центра, чтобы сохранить симметрию. Правильный многоугольник с описанной окружностью помогает создавать изображения, которые выглядят цельно и гармонично.



Площадь правильного многоугольника при одном радиусе

Здесь сравниваются фигуры с одинаковым радиусом описанной окружности, поэтому рост площади связан только с числом сторон.

При фиксированном радиусе площадь увеличивается с ростом числа сторон, потому что многоугольник всё точнее повторяет форму круга.



Расчёты для $R = 1$ по формулам площади правильных многоугольников.

Типичные ошибки в задачах



Путаница величин

Часто радиус описанной окружности принимают за сторону многоугольника или наоборот. Особенно легко ошибиться в задачах про правильный шестиугольник, где эти величины могут совпадать.



Неверный угол

Ещё одна ошибка — неправильно найти центральный угол, если забыть формулу $360^\circ/n$. Тогда все дальнейшие вычисления становятся неточными, даже если записи выглядят аккуратно.



Ошибки в построении

Иногда вместо серединных перпендикуляров проводят произвольные линии и получают неверный центр. Для точного построения нужно использовать именно те прямые, которые равноудалены точки от сторон.

Алгоритм решения задач

Определить фигуру

Сначала находят число сторон n и убеждаются, что многоугольник правильный. Без этого нельзя выбрать верную формулу и корректно связать радиус, сторону и угол.

1

Вычислить угол

Затем находят центральный угол по формуле $360^\circ/n$. Это помогает понять, как окружность разделена между вершинами и какую часть круга занимает одна сторона.

2

Выбрать формулу

После этого подбирают нужную связь: между стороной, радиусом и углом. Формулу выбирают по тому, что известно в условии, чтобы не делать лишних действий.

3

Подставить данные

Далее подставляют известные значения в формулу и вычисляют неизвестную величину. Важно следить за единицами измерения и аккуратно выполнять действия с числами.

4

Проверить ответ

В конце проверяют, лежат ли вершины на одной окружности и равны ли расстояния от центра до них. Такая проверка помогает заметить ошибку до записи окончательного ответа.

5



