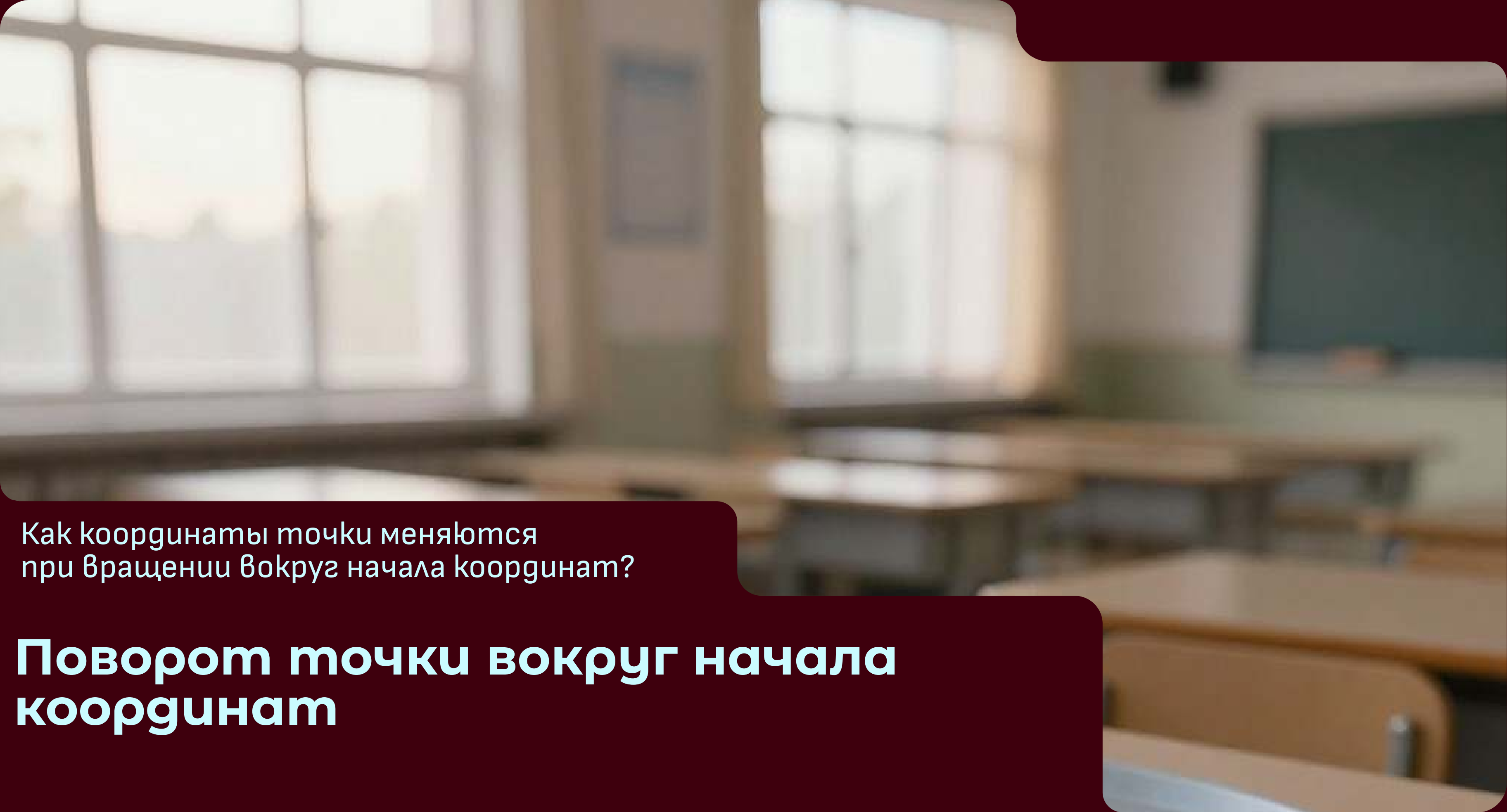




Как координаты точки меняются
при вращении вокруг начала координат?

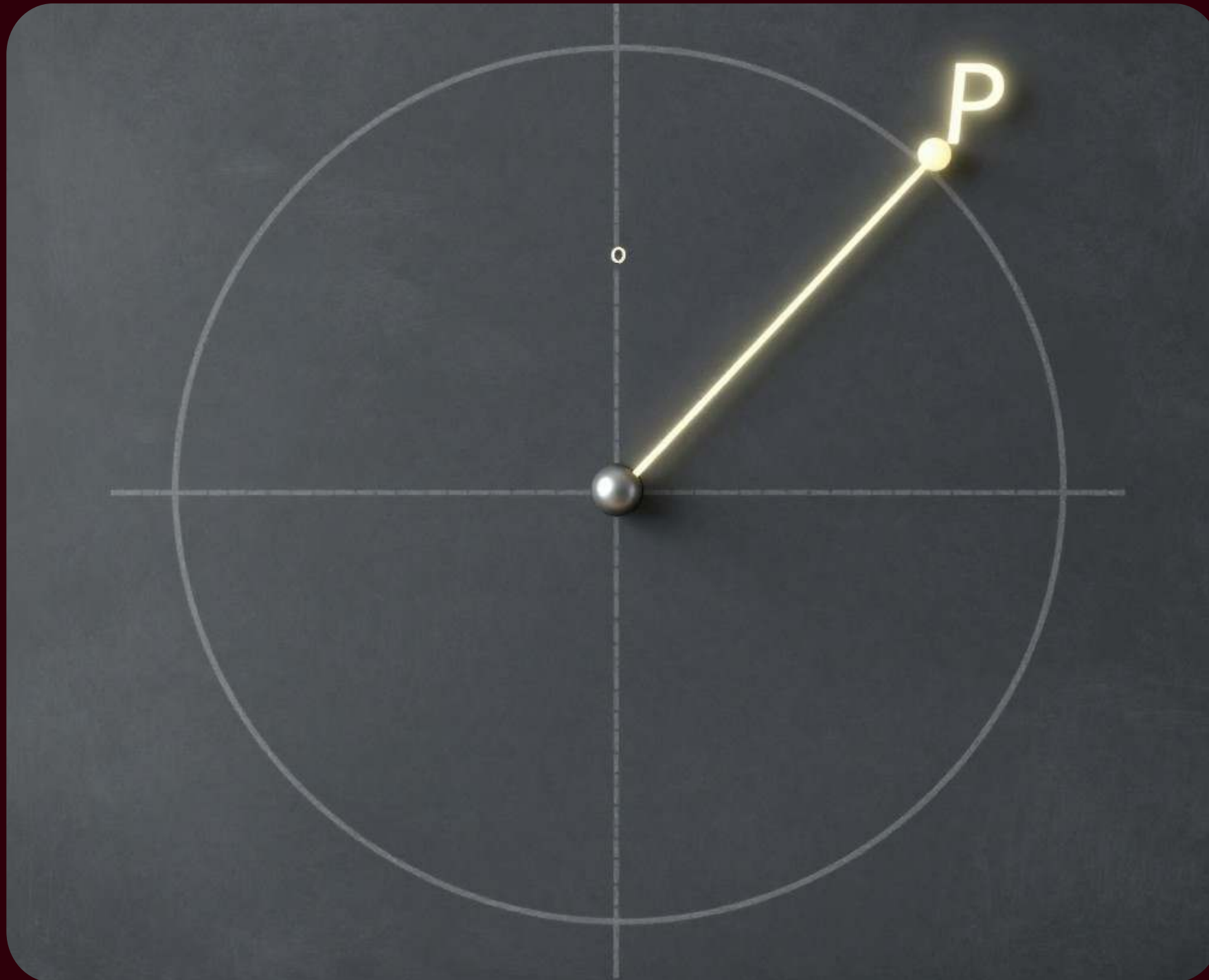
Поворот точки вокруг начала координат

Координаты и вращение на плоскости

Каждая точка на плоскости задаётся парой чисел, а поворот вокруг $O(0; 0)$ меняет лишь её положение и координаты. Направление вращения и величина угла определяют новый образ точки.



Что сохраняется при повороте



Длины не меняются

Поворот — это движение, поэтому расстояния между точками сохраняются. Любой отрезок после вращения остаётся той же длины, что и до преобразования.

Та же окружность

Расстояние от точки до начала координат остаётся прежним. Значит, её образ лежит на окружности с тем же центром O и тем же радиусом.

Форма фигуры

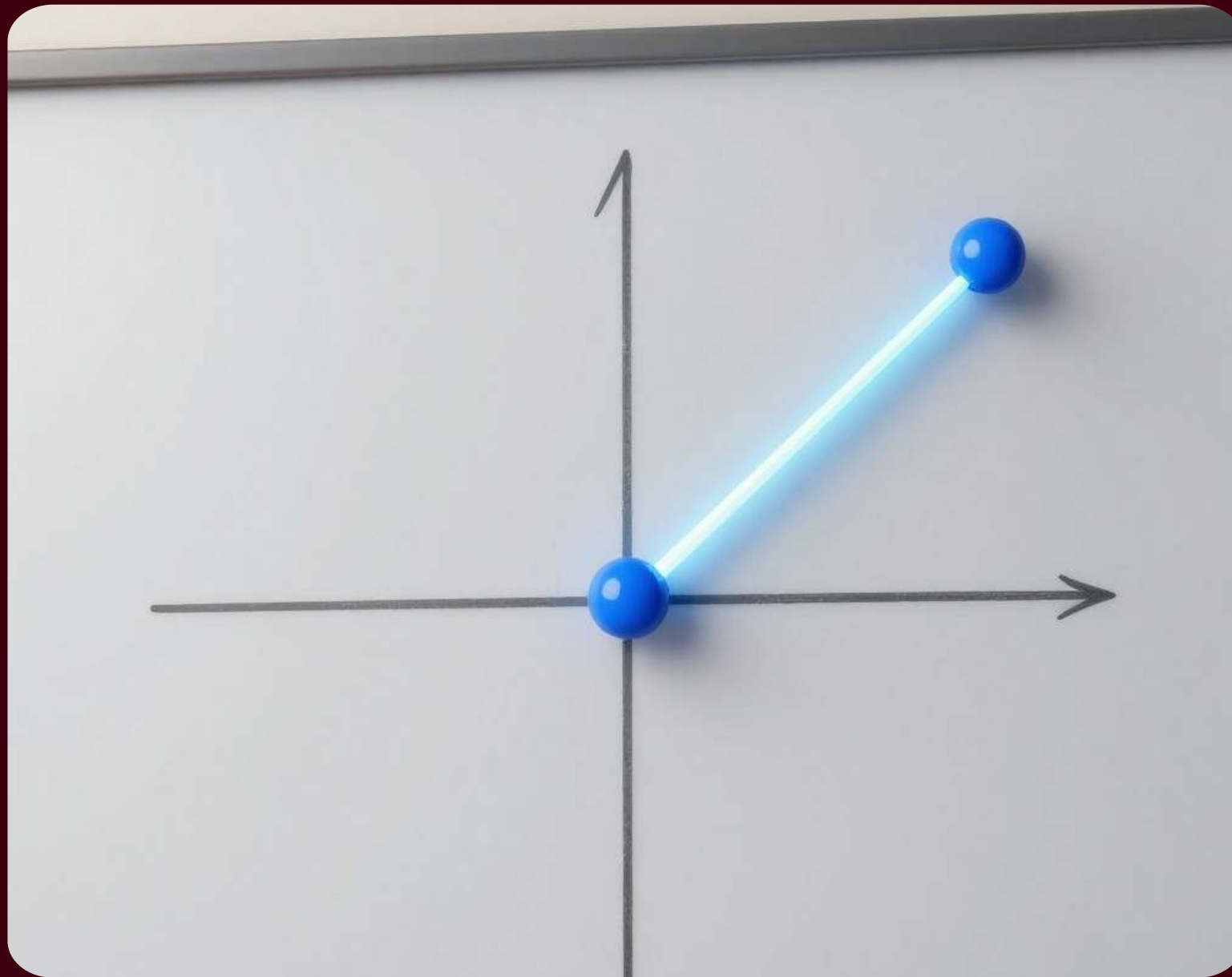
Если поворачивается целая фигура, её стороны и углы не искажаются. После поворота сохраняются пропорции, а меняется только ориентация относительно осей.

Новые координаты

Преобразование затрагивает лишь числовую запись точки. Координаты меняются, но геометрический смысл положения на плоскости остаётся тем же.

Связь с осями

После вращения точка может перейти в другую четверть, поэтому её положение относительно осей x и y становится новым, хотя расстояние до центра не изменяется.



Точка, радиус-вектор и угол поворота

- **Точка $P(x; y)$**

Точку удобно рассматривать вместе с её радиус-вектором OP , направленным из начала координат. Именно он показывает положение точки на плоскости и помогает описывать поворот.

- **Образ P'**

После вращения точка переходит в $P'(x'; y')$. Длина вектора OP при этом равна длине OP' , что отражает сохранение расстояния до начала координат.

- **Угол α**

На чертеже угол поворота обозначают α . Он показывает, на сколько нужно повернуть радиус-вектор и в какую сторону выполнить вращение.

- **Что видно на схеме**

Оси, дуга поворота и направление вращения позволяют сразу увидеть, как меняется ориентация вектора. При этом его длина остаётся неизменной.

Общие формулы поворота

01 Записываем точку

Пусть дана точка $(x; y)$. Её координаты рассматриваются как исходные данные, из которых нужно получить новый образ после вращения.

02 Подставляем угол

Для поворота на угол α используются значения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$. Они определяют, как именно изменятся горизонтальная и вертикальная координаты точки.

03 Находим новые координаты

Образ точки вычисляется по формулам $x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$ и $y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$. Эти выражения подходят для любого угла.

04 Учитываем направление

Знак угла задаёт направление вращения: положительный угол означает поворот против часовой стрелки, а отрицательный — по часовой стрелке.

Частные случаи поворота на стандартные углы

Угол	Образ $(x; y)$	Правило
0°	$(x; y)$	без изменений
90°	$(-y; x)$	перестановка
180°	$(-x; -y)$	оба знака
270°	$(y; -x)$	перестановка
-90°	$(y; -x)$	как 270°

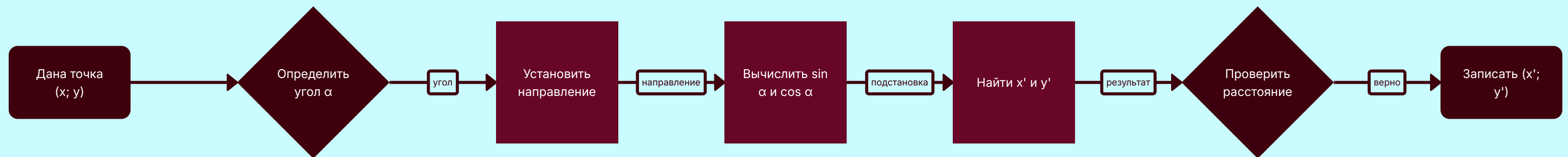
Для стандартных углов формулы поворота сводятся к простым правилам перестановки координат и смены знаков.

Для школьных задач стандартные углы удобнее считать устно: достаточно изменить порядок координат и знак нужных значений.

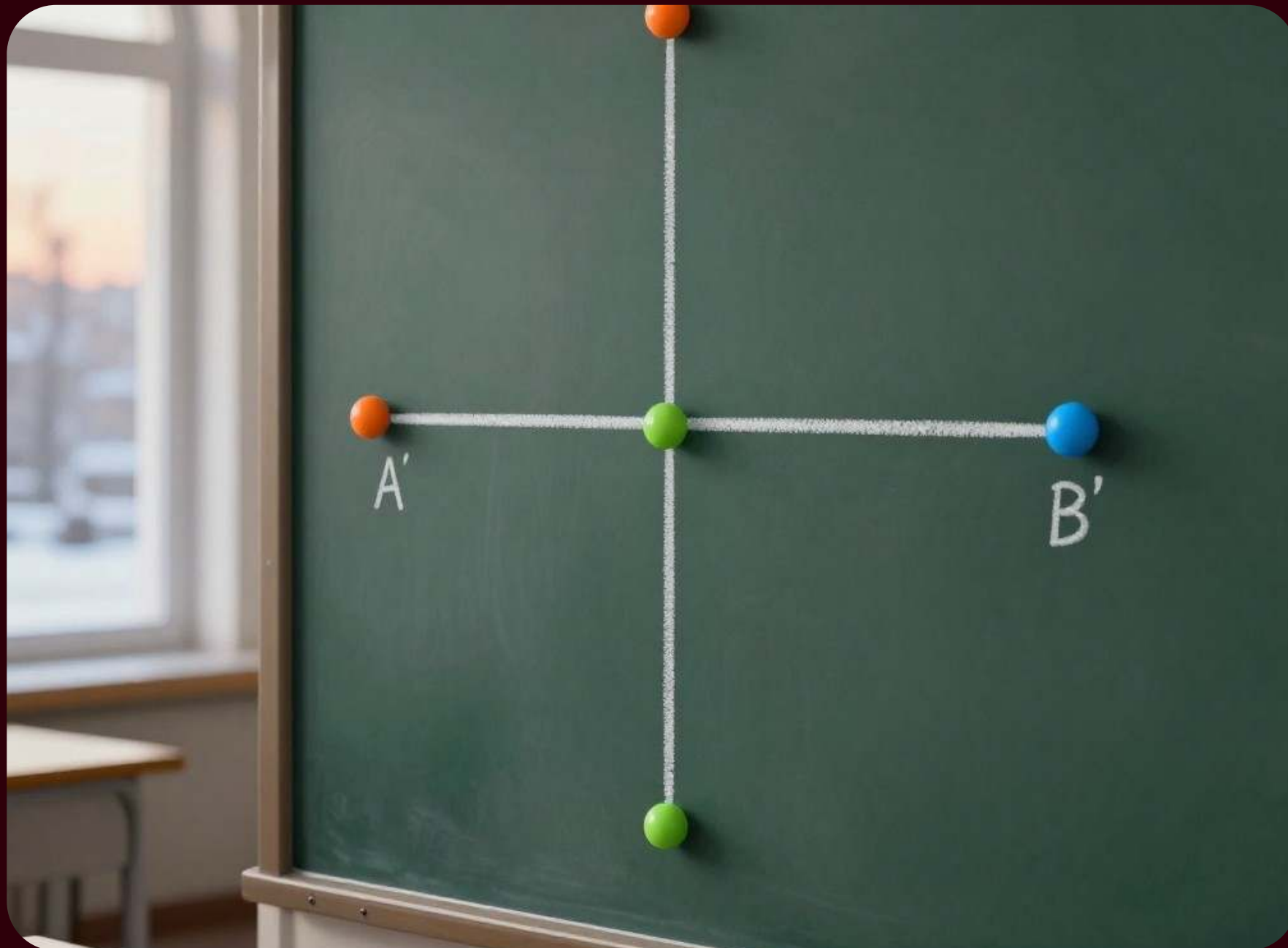
Общие формулы поворота точки вокруг начала координат

Алгоритм нахождения образа точки при повороте

Последовательность вычислений по формулам поворота вокруг начала координат



Пример поворота на 90° против часовой стрелки



Точка А

Для точки $A(3; 2)$ поворот на 90° против часовой стрелки даёт $A'(-2; 3)$. Координаты меняются местами, а знак у первой координаты становится противоположным.

Точка В

Для точки $B(-4; 1)$ образом будет $B'(-1; -4)$. Здесь хорошо видно, что правило работает одинаково для точек любой четверти координатной плоскости.

Проверка правила

Обе пары координат подтверждают схему $(x; y) \rightarrow (-y; x)$. Длина радиус-вектора при этом не меняется, поэтому образ остаётся на той же окружности.

Пример поворота на 180°

Центральная симметрия

01

Поворот на 180° вокруг начала координат совпадает с центральной симметрией относительно точки $O(0; 0)$. Это удобно использовать как наглядный геометрический образ преобразования.

Точка В

02

Точка $B(5; -7)$ переходит в $B'(-5; 7)$. Обе координаты меняют знак, поэтому образ оказывается в противоположной части плоскости.

Точка С

03

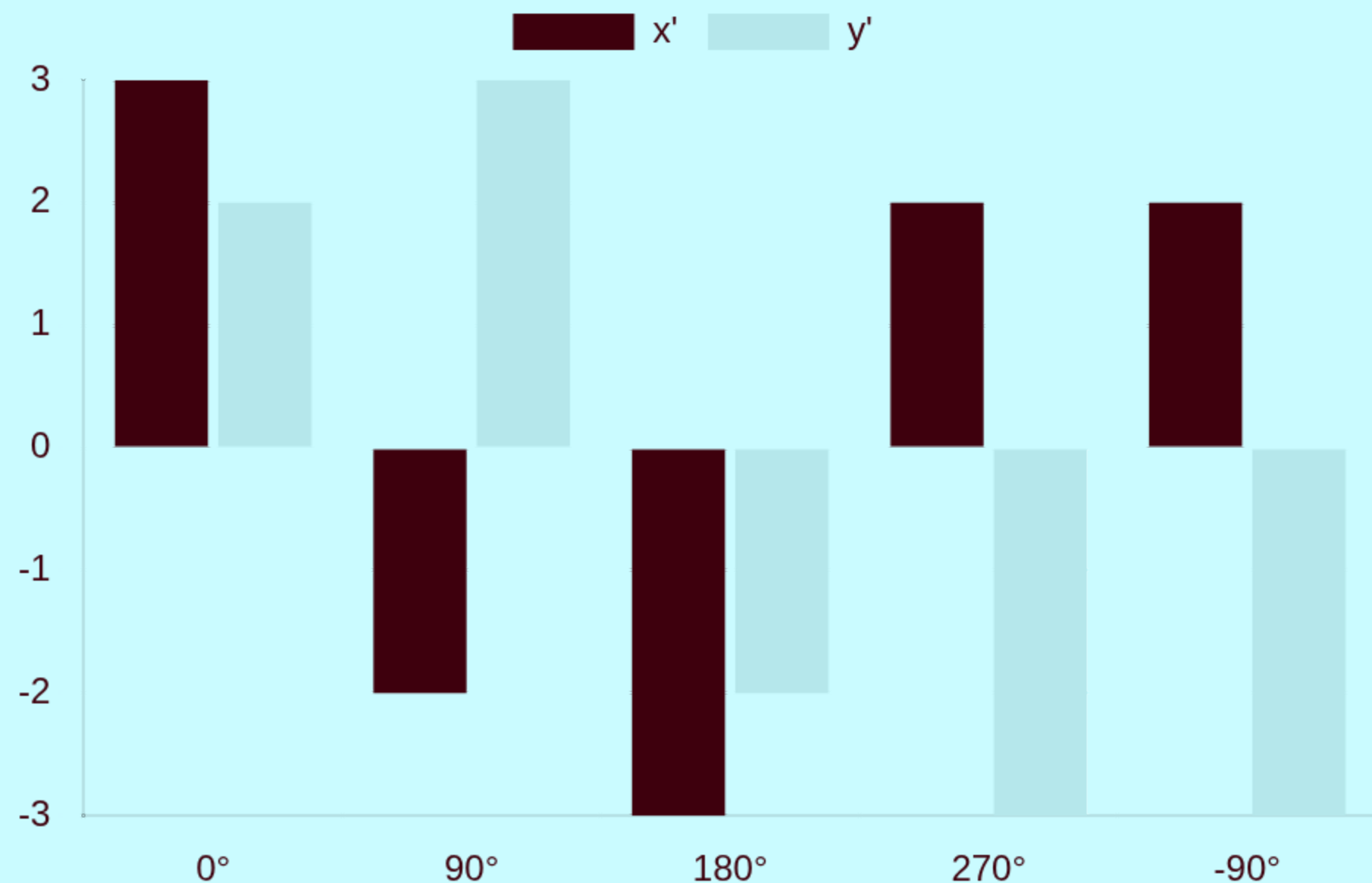
Точка $C(-2; 0)$ переходит в $C'(2; 0)$. Даже если одна координата равна нулю, правило смены знаков сохраняется без исключений.

Что сохраняется

04

Расстояние до начала координат не изменяется, а точка остаётся на окружности того же радиуса. Меняется только её направление относительно осей.

Как меняются координаты при стандартных углах



На диаграмме показан один и тот же исходный пример: точка (3; 2) после поворотов на разные углы.

При стандартных углах координаты меняются по чётким правилам: перестановка, смена знаков или отсутствие изменений.

Вычислено по формулам поворота точки (3; 2) вокруг начала координат

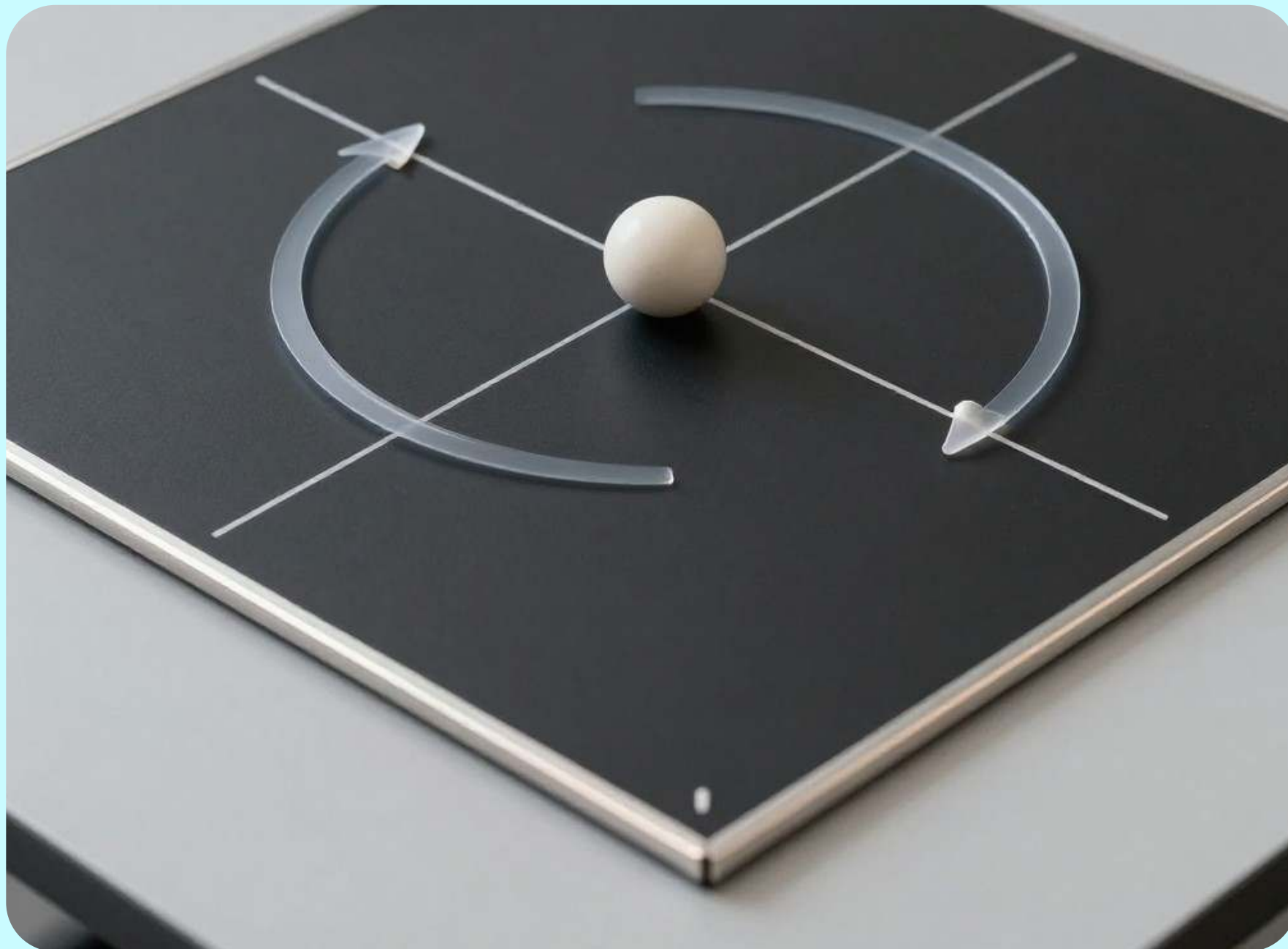
**Такое компактное
описание позволяет
применять один и тот же
алгоритм к множеству
точек и фигур
без отдельных
геометрических
построений.**

2×2

матрица описывает поворот
любой точки плоскости.

Формула матрицы поворота в линейной алгебре

Знак угла и направление вращения



01 Положительный угол

Если угол положительный, точка вращается против часовой стрелки. Это принятое в математике соглашение помогает однозначно читать запись поворота и правильно выбирать итоговые координаты образа.

02 Отрицательный угол

Отрицательный угол означает вращение по часовой стрелке. При решении задач важно не перепутать знак, потому что именно он определяет, в какую сторону смещается образ точки.

03 Связь с четвертями

После поворота точка может перейти в другую четверть, и тогда меняются знаки координат. Поэтому полезно мысленно отслеживать положение точки относительно осей до и после преобразования.

04 Угол и формулы

Для вычислений нужно учитывать не только величину угла, но и его направление. Одни и те же значения $\sin$ и $\cos$ дают разные результаты при противоположных знаках угла.

Проверка результата через расстояние до начала координат

Сравнение значений $x^2 + y^2$ до и после поворота показывает, сохраняется ли расстояние до начала координат.

Во всех примерах суммы квадратов совпадают, значит радиус-вектор не изменяет длину, а вычисления выполнены корректно.

Точка	До	После
(3; 4)	25	25
(1; -6)	37	37
(-2; -2)	8	8

Проверочные вычисления для поворота вокруг $O(0; 0)$

Поворот фигур как преобразование всех их точек

Задание исходной фигуры

Сначала фиксируют вершины фигуры и выбирают центр поворота — начало координат. Это позволяет рассматривать не только одну точку, но и всю фигуру как совокупность её координат.

Поворот каждой вершины

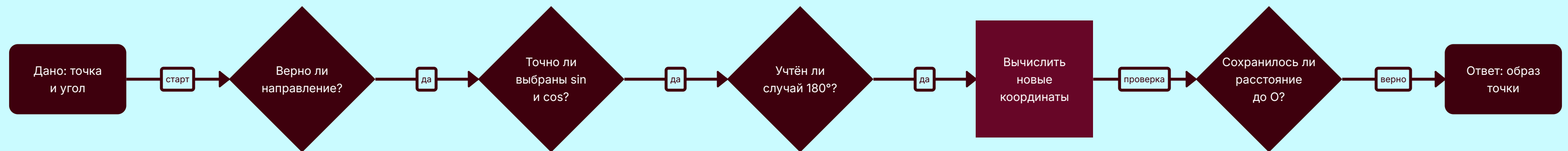
Затем каждую вершину переводят по тем же формулам, что и отдельную точку. Координаты всех вершин меняются согласованно, поэтому фигура сохраняет форму и размеры.

Получение образа фигуры

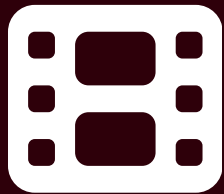
В конце соединяют новые вершины в том же порядке. Полученная фигура равна исходной по форме, но имеет другое положение на плоскости, а при последовательных преобразованиях важен порядок операций.

Типичные ошибки при решении задач на поворот

Схема показывает, где чаще всего возникают неточности и как их проверить до записи ответа.

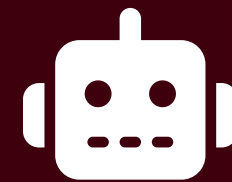


Где используется поворот точки в реальной жизни



Компьютерная графика

Поворот применяется при создании анимации, интерфейсов и визуальных эффектов. Он помогает менять ориентацию объектов на экране без пересчёта всей сцены вручную.



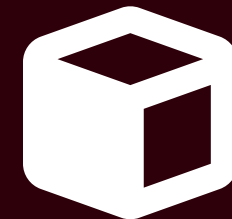
Робототехника

В робототехнике поворот описывает направление манипулятора, датчика или колеса. Модель на плоскости позволяет вычислять новое положение детали после изменения ориентации.



Навигация

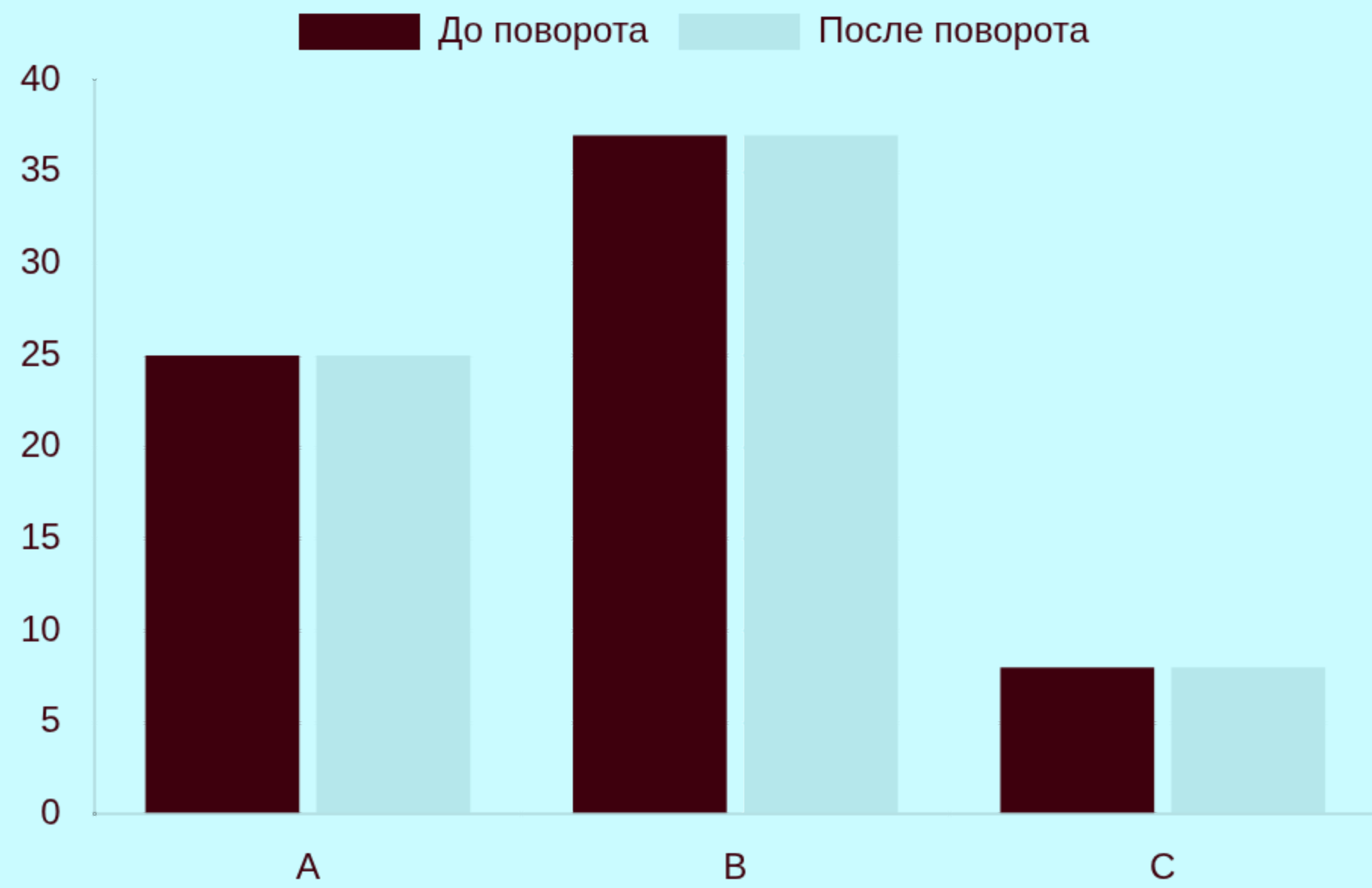
При навигации поворот используют для перехода между направлениями движения и координатными системами. Это важно при построении маршрутов и анализе положения объекта относительно ориентира.



Геометрические модели

В задачах геометрии и инженерных расчётов поворот помогает получать образ фигуры после вращения. Такой подход удобен, когда нужно сохранить размеры и форму при новом положении.

Сравнение исходных и повернутых координат

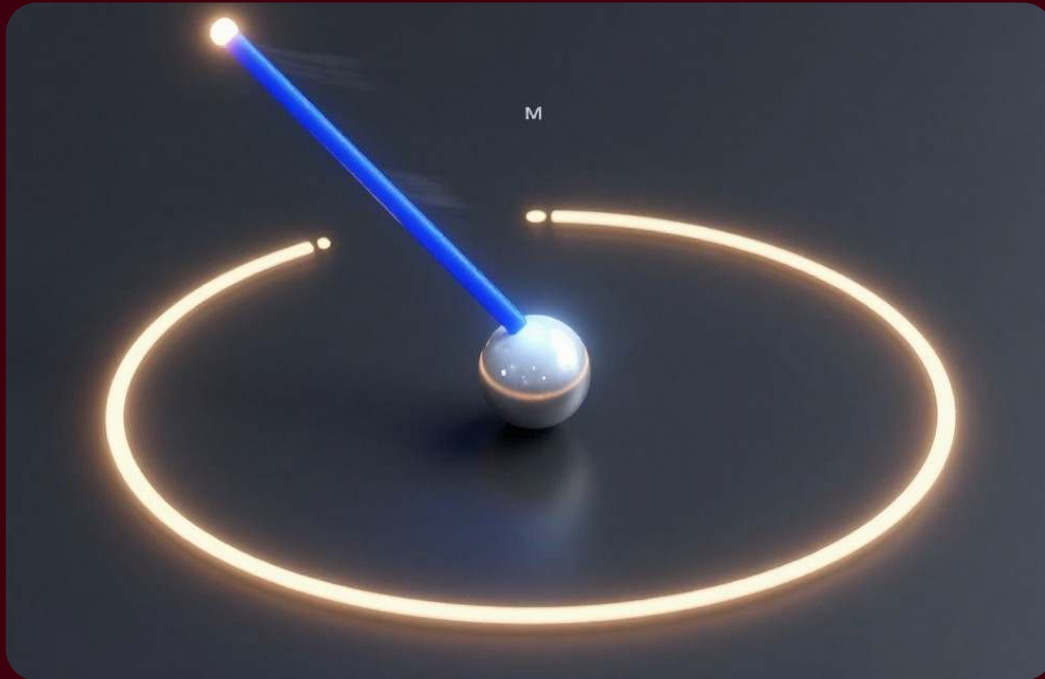


Для каждой точки сопоставлены значения $x^2 + y^2$ до и после преобразования. Это позволяет увидеть не сами координаты, а сохраняемую геометрическую характеристику.

Совпадение значений подтверждает неизменность расстояния до начала координат при повороте.

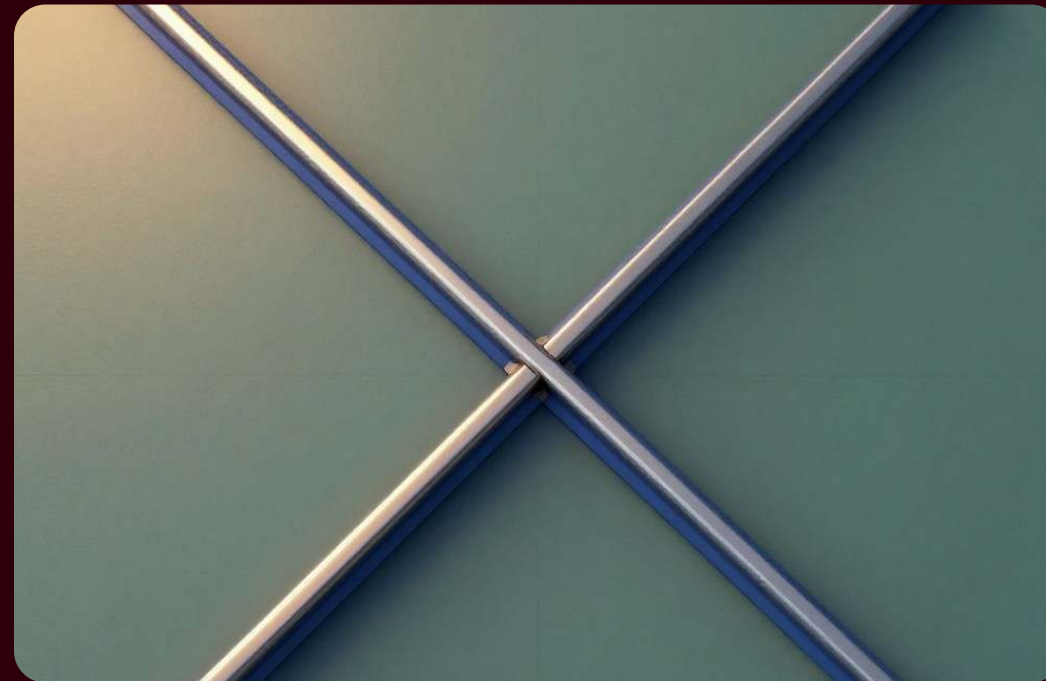
Проверочные расчёты для точек A(3; 4), B(1; -6), C(-2; -2)

Задача на построение образа точки на чертеже



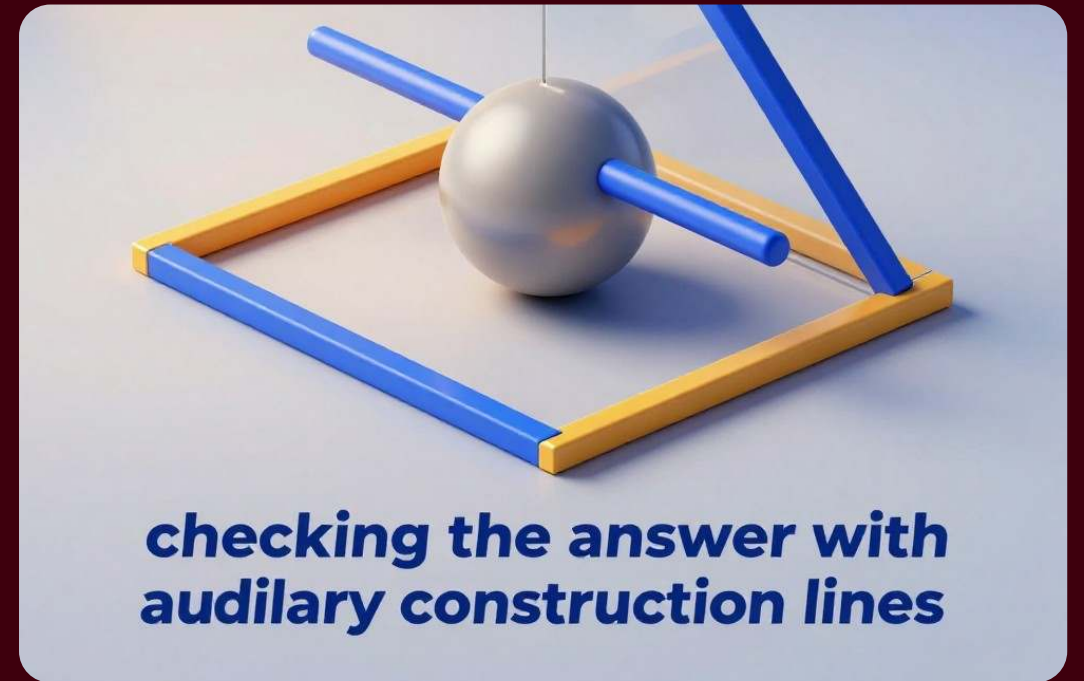
Точка, которая «обходит» начало координат

На рисунке точка M связана с началом координат отрезком, который показывает радиус-вектор. После поворота этот отрезок сохраняет длину, но меняет направление, поэтому новая точка оказывается на той же окружности вокруг O .



Почему образ попадает в другую четверть

Угол поворота задаёт, в какую сторону смещается точка относительно осей. Поэтому по чертежу важно сначала определить направление вращения, а затем проследить, в какую четверть должен попасть образ M' .



Как чертёж помогает проверить ответ

Вспомогательные линии к осям позволяют увидеть, правильно ли расположена новая точка и совпадает ли её расстояние до центра с исходным. Такой рисунок делает формулы наглядными и уменьшает риск ошибки при записи координат.

Краткий справочник формул и правил

Угол	Образ точки	Правило
α	$(x'; y')$	общие формулы
90°	$(-y; x)$	против ч. с.
180°	$(-x; -y)$	смена знаков

В таблице собраны общий закон поворота и самые удобные частные случаи для устных и письменных вычислений.

Общий тригонометрический закон работает для любого угла, а стандартные значения позволяют быстро получать ответ без длинных вычислений.

Формулы поворота точки вокруг начала координат

Поворот, который сохраняет форму

Поворот вокруг начала координат меняет положение точки, но не её удалённость от центра. Освоив общий закон, стандартные углы и проверку через радиус-вектор, легко решать более сложные задачи.