

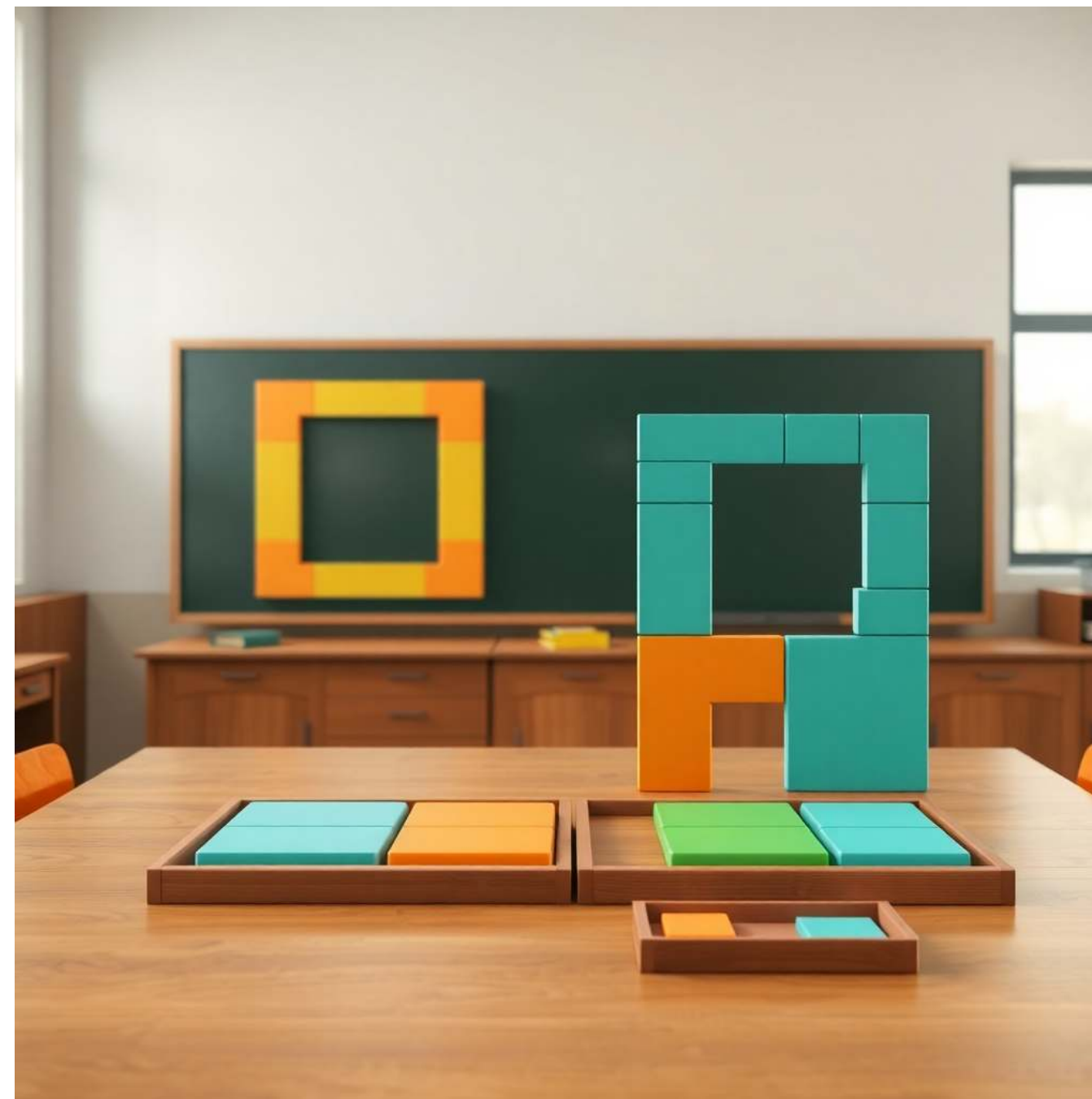


Разложение на множители с помощью квадратов суммы и разности

Изучаем квадраты суммы и разности, чтобы быстро узнавать готовый квадрат двучлена.

Почему эти формулы так полезны

Эти формулы помогают быстрее упрощать выражения, решать уравнения и замечать в многочлене уже готовое произведение. Важно увидеть связь между раскрытием скобок и разложением на множители, а затем уверенно применять её в заданиях 7 класса.



Формула квадрата суммы

1 Запись формулы

Квадрат суммы записывают так: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Она показывает, как произведение двух одинаковых скобок превращается в три члена многочлена.

2 Откуда берётся средний член

Первый член — это квадрат первого слагаемого, последний — квадрат второго. Средний член появляется дважды: ab и ba дают одинаковый результат, поэтому получается $2ab$.

3 Примеры применения

По этой формуле легко раскрывать скобки: $(x+3)^2=x^2+6x+9$, а $(2y+5)^2=4y^2+20y+25$. Главное — правильно найти квадраты и удвоенное произведение.

Геометрический смысл квадрата суммы

Большой квадрат

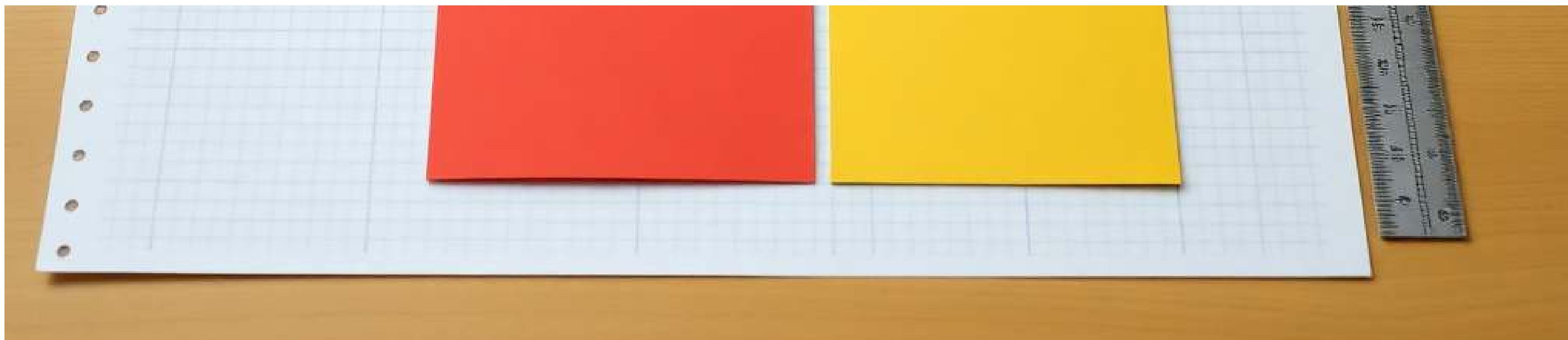
Если сторона квадрата равна $a+b$, его площадь можно представить как сумму нескольких частей. Это делает формулу понятной не только алгебраически, но и наглядно.

Четыре части фигуры

Внутри выделяются квадрат площадью a^2 , квадрат площадью b^2 и два прямоугольника площадью ab каждый. Вместе они дают выражение $a^2+2ab+b^2$.

Зачем нужен рисунок

Такое разбиение помогает увидеть, почему средний член удваивается. Изображение показывает, что формула — это не просто правило, а описание одной и той же площади.



Формула квадрата разности

1

Запись формулы

Квадрат разности имеет вид $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. Здесь крайние члены снова являются квадратами, а в середине появляется минус.

2

Почему знак отрицательный

При перемножении $(a-b)(a-b)$ возникают два одинаковых отрицательных произведения: $a \cdot (-b)$ и $(-b) \cdot a$. Поэтому средний член становится $-2ab$.

3

Примеры записи

По формуле получаем:
 $(x-4)^2=x^2-8x+16$,
а $(3m-2)^2=9m^2-12m+4$. Важно сразу замечать квадраты крайних членов и знак в середине.

Геометрический смысл квадрата разности

Идея вычитания

Площадь фигуры со стороной $a-b$ можно рассматривать как часть квадрата со стороной a , из которой убрали лишние области. Так легче понять появление минуса.

Что вычитается

Из большого квадрата убирают два прямоугольника площадью ab и маленький квадрат площадью b^2 . После этого остаётся выражение $a^2 - 2ab + b^2$.

Связь с формулой

На схеме видно, что знак минус связан именно с удалением частей фигуры. Поэтому формула квадрата разности запоминается через действие вычитания, а не только по правилу.



Сравнение двух формул

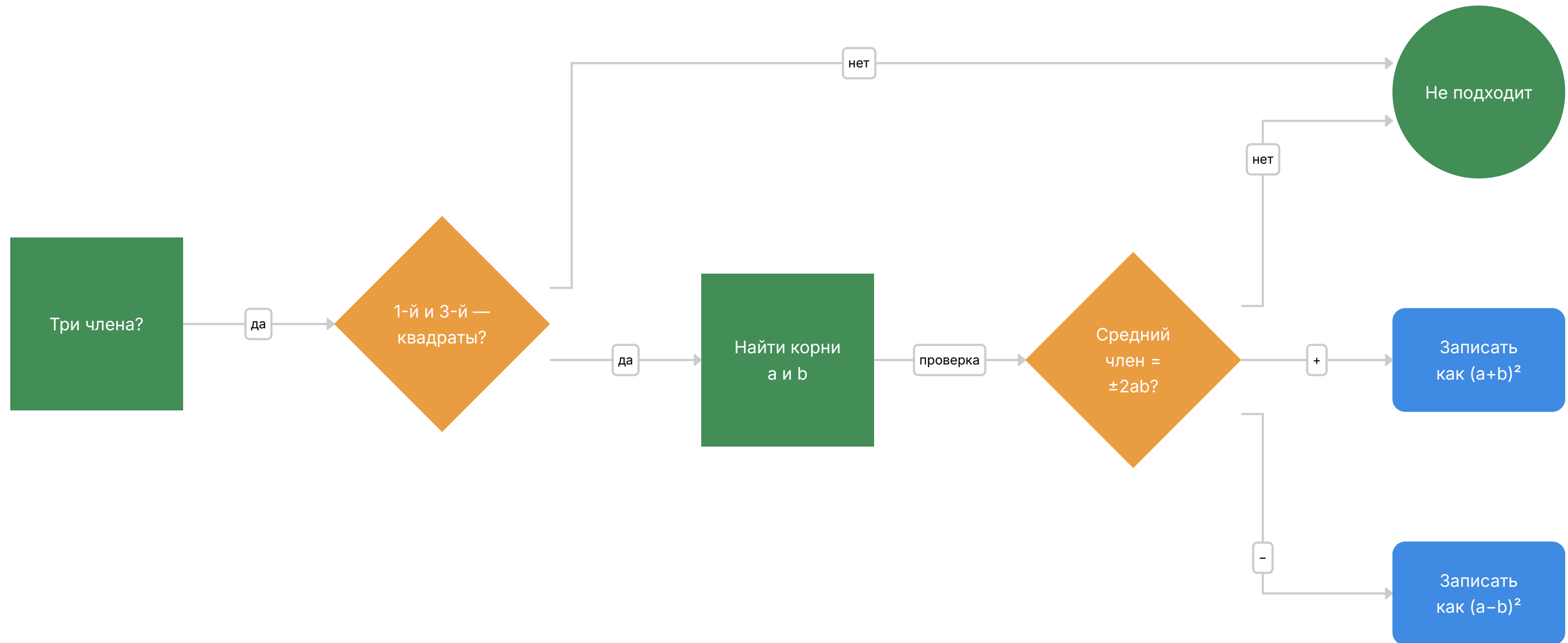
Формула	Середина	Знак
$(a+b)^2$	$+2ab$	плюс
$(a-b)^2$	$-2ab$	минус

Сравним обе формулы по главным частям: началу, середине и концу. Это помогает быстро отличать их при распознавании многочлена.

Крайние квадраты совпадают, а различие только в среднем члене и его знаке.

Как распознать квадрат двучлена в многочлене

Схема проверки по трём членам многочлена и знаку среднего члена.



Три примера распознавания



Во всех примерах сначала удобно проверить крайние члены, а затем сопоставить средний член с удвоенным произведением корней.

Каждое выражение сразу приводится к квадрату двучлена, если совпадают квадраты крайних членов и знак средней части.

Пример разложения с плюсом

1 Проверяем первый и последний члены

В выражении $x^2+8x+16$ первый член x^2 — это квадрат x , а последний член 16 — квадрат 4 . Значит, можно искать квадрат двучлена.

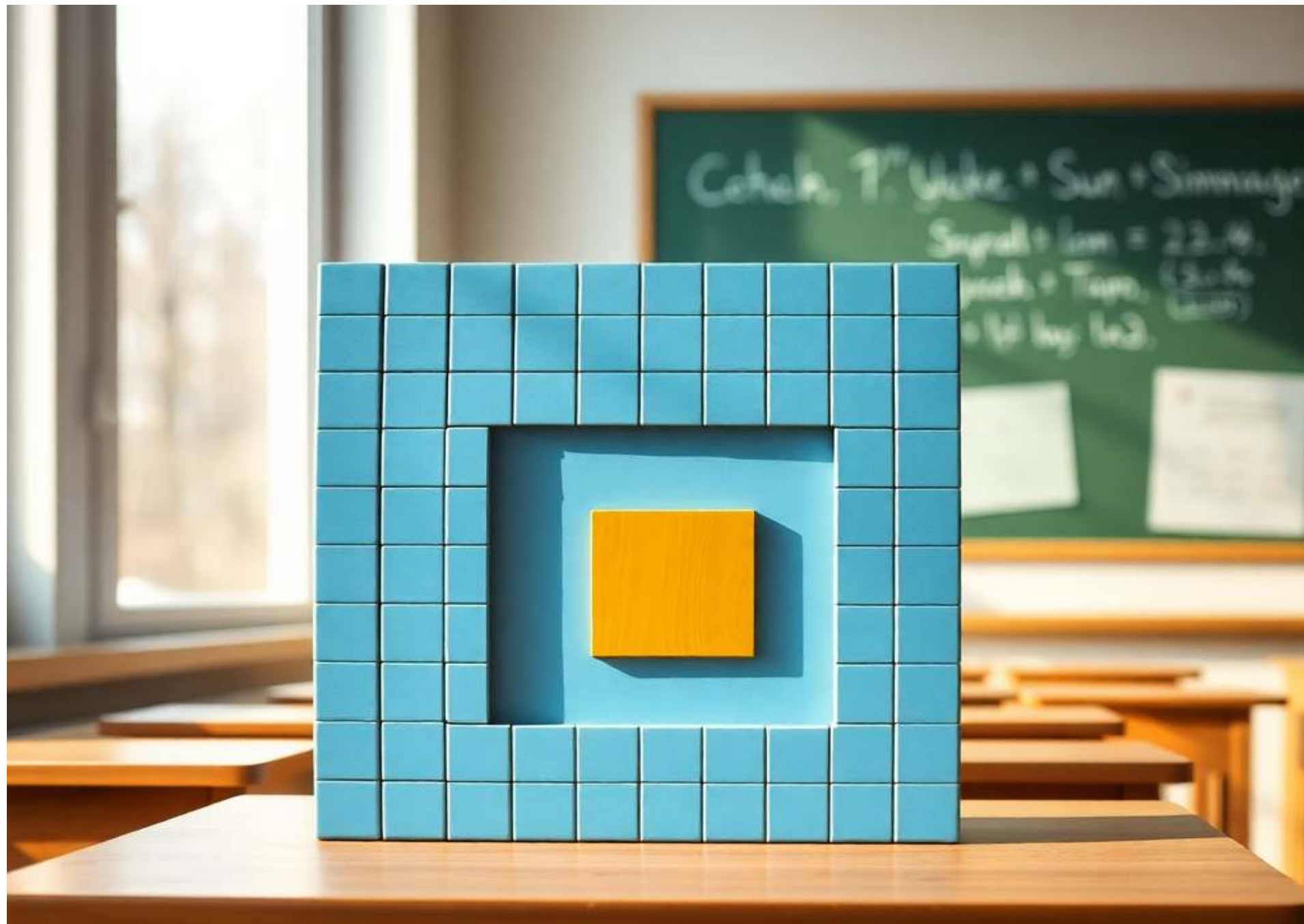
2 Смотрим на середину

Средний член $8x$ совпадает с $2 \cdot x \cdot 4$. Это именно тот случай, когда многочлен записывается как квадрат суммы, потому что знак в середине положительный.

3 Получаем ответ

После распознавания формулы сразу записываем:
 $x^2+8x+16=(x+4)^2$. Проверка раскрытием скобок подтверждает, что исходный многочлен получен верно.

Пример разложения с минусом



1

Распознаём вид

В выражении $a^2 - 14a + 49$ первый и последний члены являются квадратами: a^2 и 7^2 . Это сразу подсказывает, что перед нами квадрат двучлена.

2

Проверяем средний член

Средний член равен $-14a$, то есть $-2 \cdot a \cdot 7$. Знак минус означает, что в скобках должен стоять не плюс, а разность.

3

Записываем и проверяем

Получаем $a^2 - 14a + 49 = (a - 7)^2$. Если раскрыть скобки обратно, снова выйдет исходный многочлен, значит разложение выполнено верно.

Частые ошибки при разложении

В таблице показаны типичные ошибки, их причина и простой способ самопроверки перед ответом.

Во всех случаях помогает одна проверка: крайние члены должны быть квадратами, а средний — точно совпадать с $\pm 2ab$.

Ошибка	Почему	Как проверить
Неверный знак	Путают + и –	Сравнить с $\pm 2ab$
Нет квадрата	Последний член не подходит	Взять корень
Забытый коэффициент	Не видят $(2a)^2$	Проверить первый член
Путают формулы	Смешивают с $a^2 - b^2$	Смотреть на три члена

Алгоритм разложения на множители

1. Найти крайние члены

Сначала выделяют первый и последний члены многочлена. Именно они помогают понять, можно ли представить выражение как квадрат двучлена.

2. Проверить квадраты

Затем находят корни у крайних членов. Если они действительно являются квадратами, появляется пара чисел a и b для формулы.

3. Сверить средний член

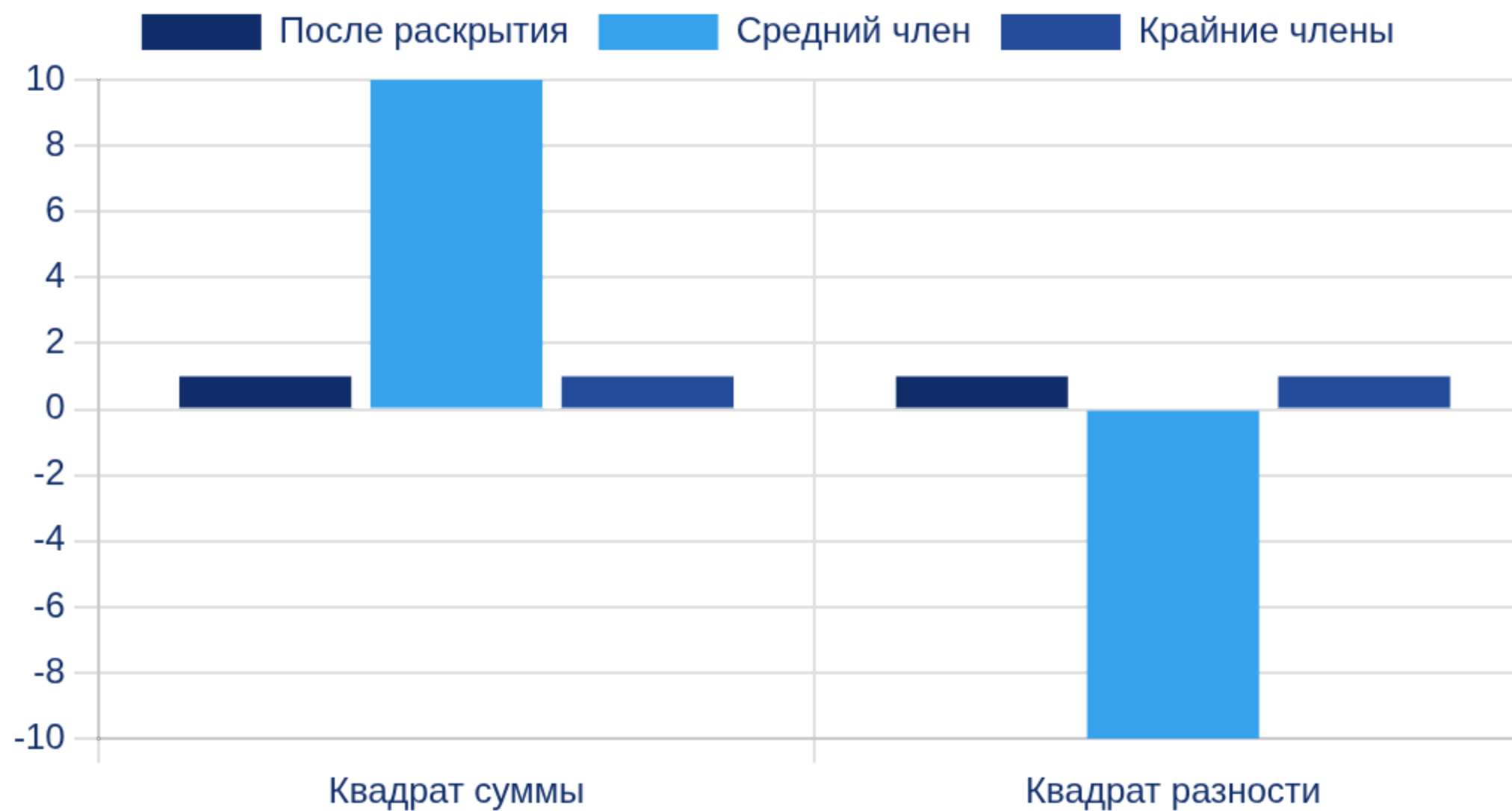
После этого сравнивают средний член с $+2ab$ или $-2ab$. По его знаку выбирают квадрат суммы или квадрат разности.

4. Записать и проверить

В конце записывают ответ и раскрывают скобки обратно. Такая проверка показывает, совпадает ли результат с исходным многочленом.



Проверка формулы раскрытием скобок



Сравнение показывает, что у обеих формул одинаковые крайние члены, а различается только знак среднего члена.

Раскрытие скобок подтверждает обратимость действий: из квадратов двучлена получается многочлен, а затем он снова сворачивается в краткую форму.

Учебный пример: $(x+5)^2$ и $(x-5)^2$.

Связь с обратным действием

Раскрытие скобок

Когда мы умножаем двучлен сам на себя, короткая запись превращается в многочлен. Так формулы квадрата суммы и разности показывают результат умножения в развернутом виде.

Возврат к множителям

Если в многочлене видны квадратные крайние члены и подходящий средний член, его можно снова собрать в квадрат двучлена. Это и есть разложение на множители.

Одинаковые части

В выражении $a^2 \pm 2ab + b^2$ легко заметить два одинаковых слагаемых, связанные с произведением ab . Именно они объединяются в один квадрат и делают запись короче.



Где встречаются такие выражения

Упрощение вычислений



Формулы помогают быстро считать удобные числа, если рядом с круглым числом стоит 1. Так 99^2 и 101^2 можно найти без длинного умножения.

Работа с уравнениями



При решении квадратных уравнений такие выражения помогают заметить скрытый квадрат двучлена и быстрее преобразовать запись, не выполняя лишних действий.

Задания 7 класса



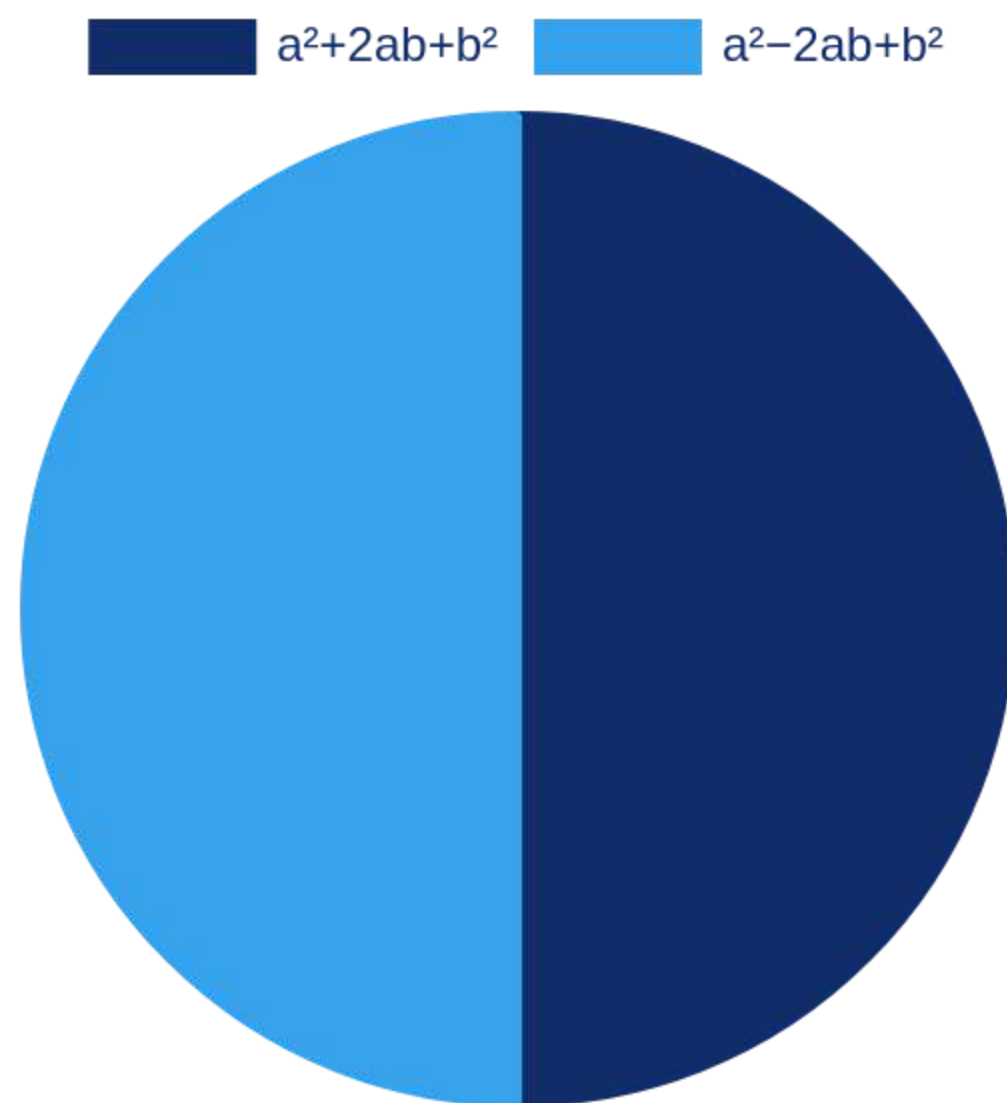
Эти формулы часто встречаются в упражнениях на преобразование многочленов. Они учат внимательно смотреть на структуру выражения, а не только на отдельные числа.

Полезная проверка



Если ответ похож на квадрат суммы или разности, формулы помогают быстро проверить решение. Это удобно в классных и домашних заданиях.

Как выбрать знак в скобках



Знак в скобках совпадает со знаком среднего члена, поэтому достаточно внимательно посмотреть на середину многочлена.

Плюс в середине ведёт к квадрату суммы, а минус — к квадрату разности. Это главное правило выбора ответа.

Тренировочные примеры для распознавания

Выражение	Корни	Вид
$x^2+12x+36$	х и 6	$(x+6)^2$
m^2-4m+4	т и 2	$(m-2)^2$
$9p^2+30p+25$	3р и 5	$(3p+5)^2$
$16y^2-24y+9$	4у и 3	$(4y-3)^2$

Проверьте, как по крайним и среднему членам определяется вид квадратного двучлена.

Во всех примерах первый и последний члены — квадраты, а средний член точно равен удвоенному произведению корней.

Краткая памятка для проверки

Смотри на края

Сначала убедитесь, что первый и последний члены действительно являются квадратами. Без этого выражение нельзя уверенно записать как квадрат двучлена.

Проверь середину

Средний член должен совпадать с удвоенным произведением корней. Если знак или значение не подходят, формула здесь не работает.

Выбери верный вид

Плюс в середине означает квадрат суммы, а минус — квадрат разности. Если хотя бы одно условие нарушено, нужен другой способ разложения.

Что нужно запомнить из темы

Формулы квадрата суммы и разности позволяют быстро узнавать готовый квадрат двучлена в многочлене. Главное — проверить три члена, квадратные края и знак среднего члена.