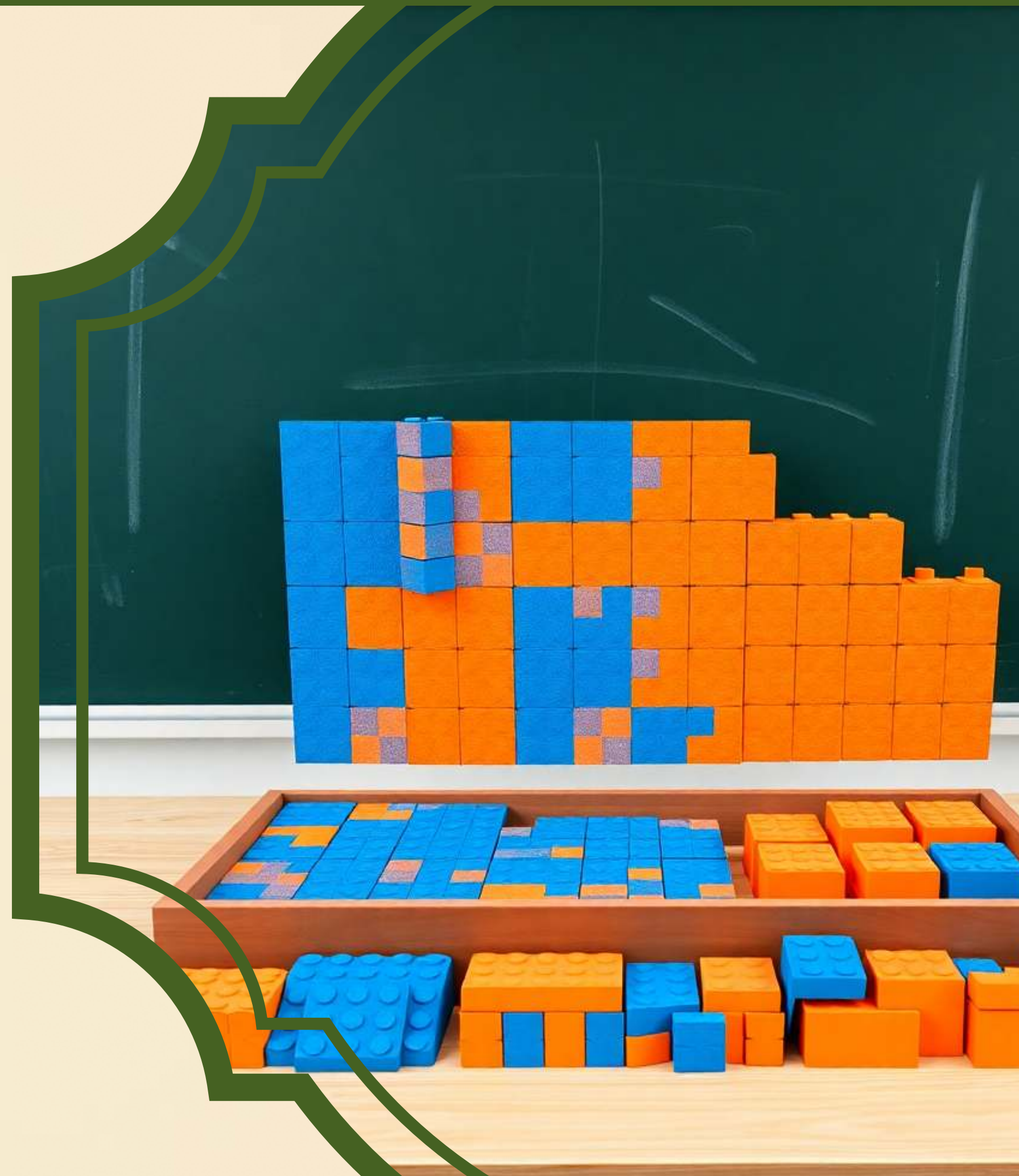


Бином Ньютона и формулы сокращённого умножения

Как быстро раскрывать скобки и видеть закономерности?



Почему эти формулы экономят время

Формулы для квадратов и кубов помогают быстро преобразовывать многочлены, не выполняя длинные вычисления. Бином Ньютона показывает общий закон для степени суммы и объясняет, откуда берутся коэффициенты.

Основные формулы сокращённого умножения

1 Квадрат суммы

Если возвести сумму в квадрат, появляется три члена: первый квадрат, удвоенное произведение и второй квадрат. Эта формула особенно часто встречается в преобразованиях выражений.

2 Квадрат разности

При вычитании во второй скобке средний член получает минус, но крайние части остаются положительными. Поэтому важно внимательно следить за знаком перед вторым слагаемым.

3 Разность квадратов

Произведение суммы и разности даёт удобную запись для разности квадратов. Эта формула позволяет быстро разложить выражение на множители и упростить вычисления.

4 Куб суммы

При возведении суммы в куб получается четыре члена с коэффициентами 1, 3, 3 и 1. Степени первого и второго слагаемого постепенно меняются от большего к меньшему.

5 Куб разности

Для куба разности сохраняются те же коэффициенты, но знаки внутри разложения чередуются. Поэтому в записи легко допустить ошибку, если не проверить порядок знаков.

Таблица формул и их признаков

Формула	Члены	Средний знак	Пример
$(a+b)^2$	3	+	x^2+2x+1
$(a-b)^2$	3	-	x^2-2x+1
a^2-b^2	2	—	$9-y^2$
$(a+b)^3$	4	+	x^3+3x^2+3x+1
$(a-b)^3$	4	-	x^3-3x^2+3x-1

Сравним основные формулы по числу членов, знаку в середине и типичному виду.

Квадрат даёт три члена, куб — четыре; при минусе во второй скобке знаки в середине меняются.

Формулы сокращённого умножения из школьного курса алгебры

Геометрический смысл квадрата суммы

Сторона квадрата

Если сторона большого квадрата равна $a+b$, его площадь можно разложить на части. Это помогает увидеть формулу не как правило, а как результат деления фигуры на области.

Два квадрата

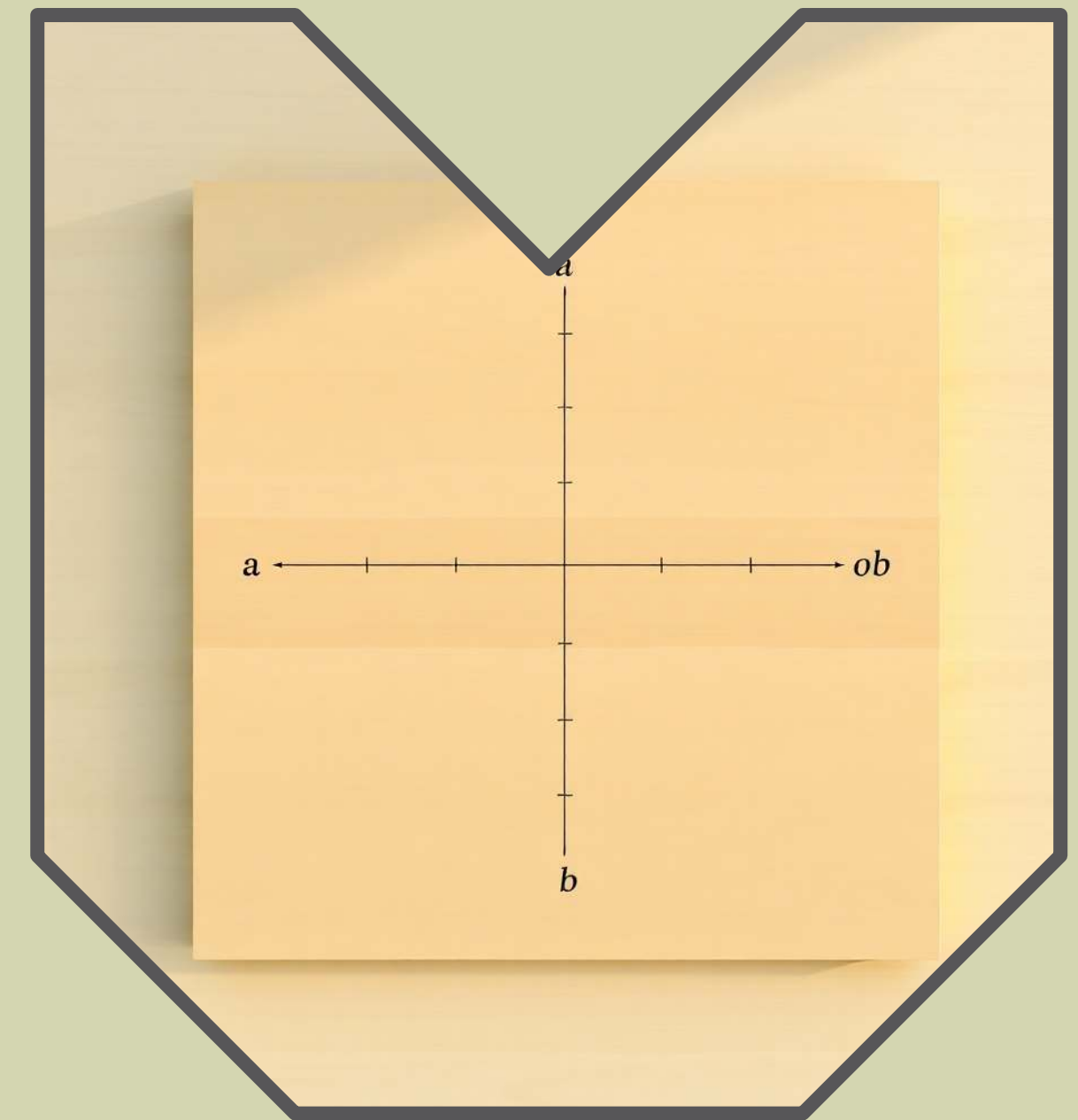
Оставшиеся части — это квадрат со стороной a и квадрат со стороной b . Их площади равны a^2 и b^2 , поэтому крайние члены формулы всегда положительны.

Два прямоугольника

Внутри получается два одинаковых прямоугольника со сторонами a и b . Вместе они дают член $2ab$, который часто вызывает вопросы у учеников.

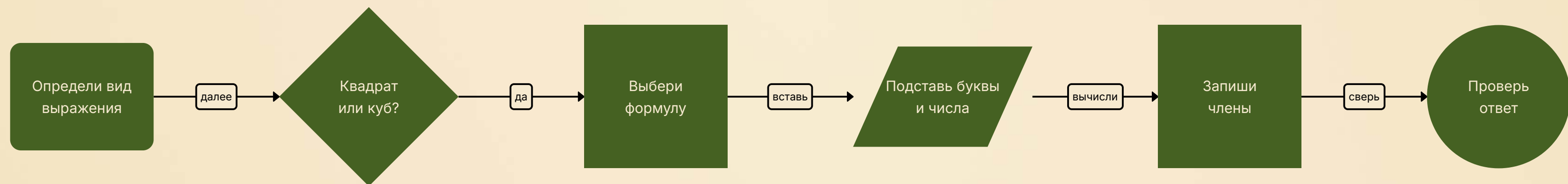
Наглядная проверка

Такой рисунок показывает, что формула верна для любых чисел a и b . Геометрическая модель помогает запомнить правило и быстрее находить нужный ответ.



Как раскрывать скобки по формуле

Последовательность действий при выборе и применении нужного тождества



Бином Ньютона как общая формула

1 Разложение любой степени

Бином Ньютона даёт правило для разложения выражения $(a+b)^n$ при любом натуральном n . Оно объединяет все частные случаи в одну общую закономерность.

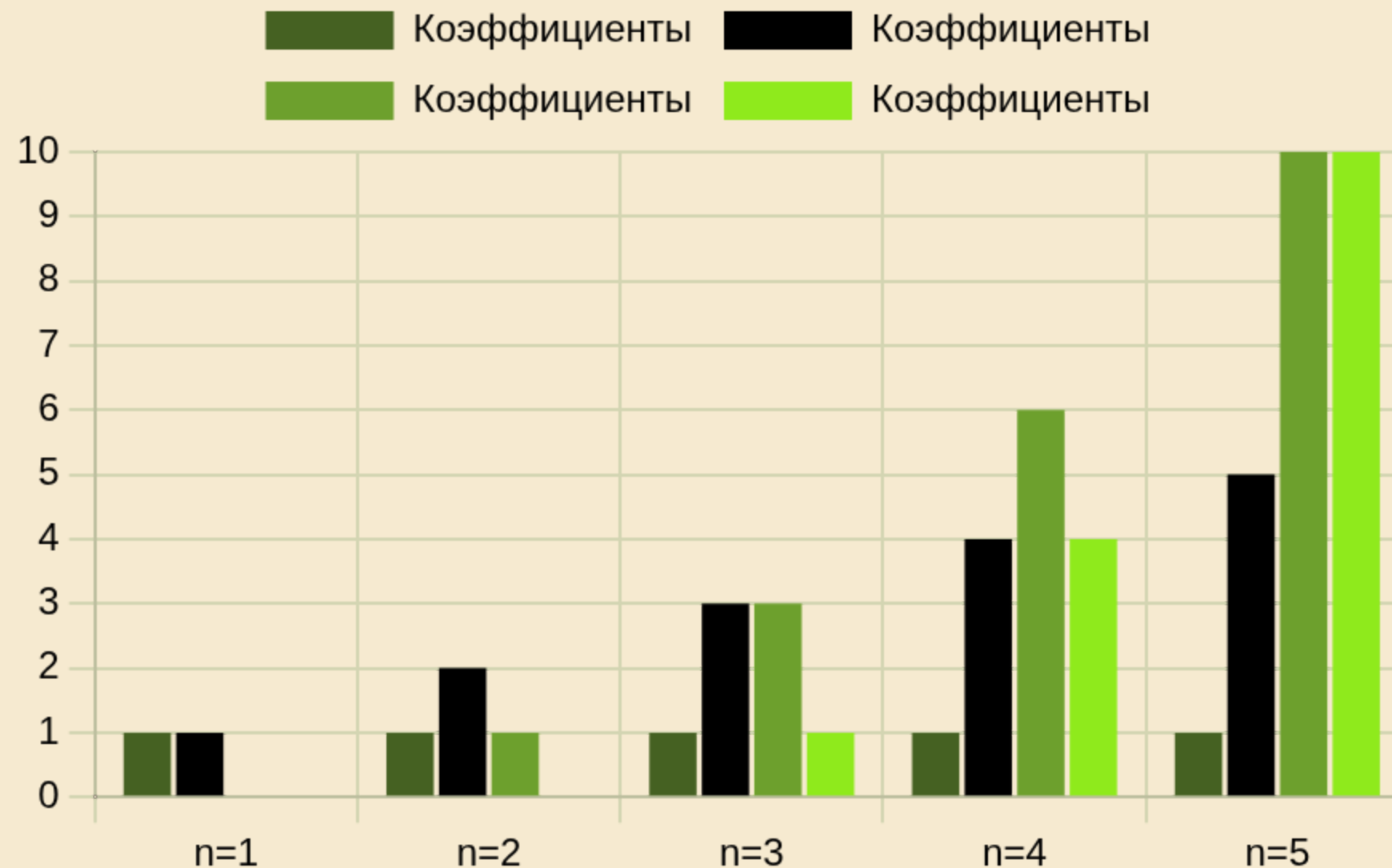
2 Структура членов

В записи всегда получается $n+1$ член. Степень a постепенно уменьшается от n до 0 , а степень b , наоборот, возрастает от 0 до n .

3 Смысл коэффициентов

Числа перед членами показывают, сколько способов выбрать слагаемые при перемножении скобок. Поэтому коэффициенты не случайны: они связаны с комбинаторикой и порядком выбора.

Коэффициенты разложения $(a+b)^n$



На графике видно, как быстро растут средние коэффициенты при увеличении степени. Особенно заметен скачок для четвёртой и пятой степени.

Чем больше n , тем сильнее растут центральные коэффициенты, а края ряда остаются равными 1.

Строки треугольника Паскаля для $n=1-5$ из школьной алгебры

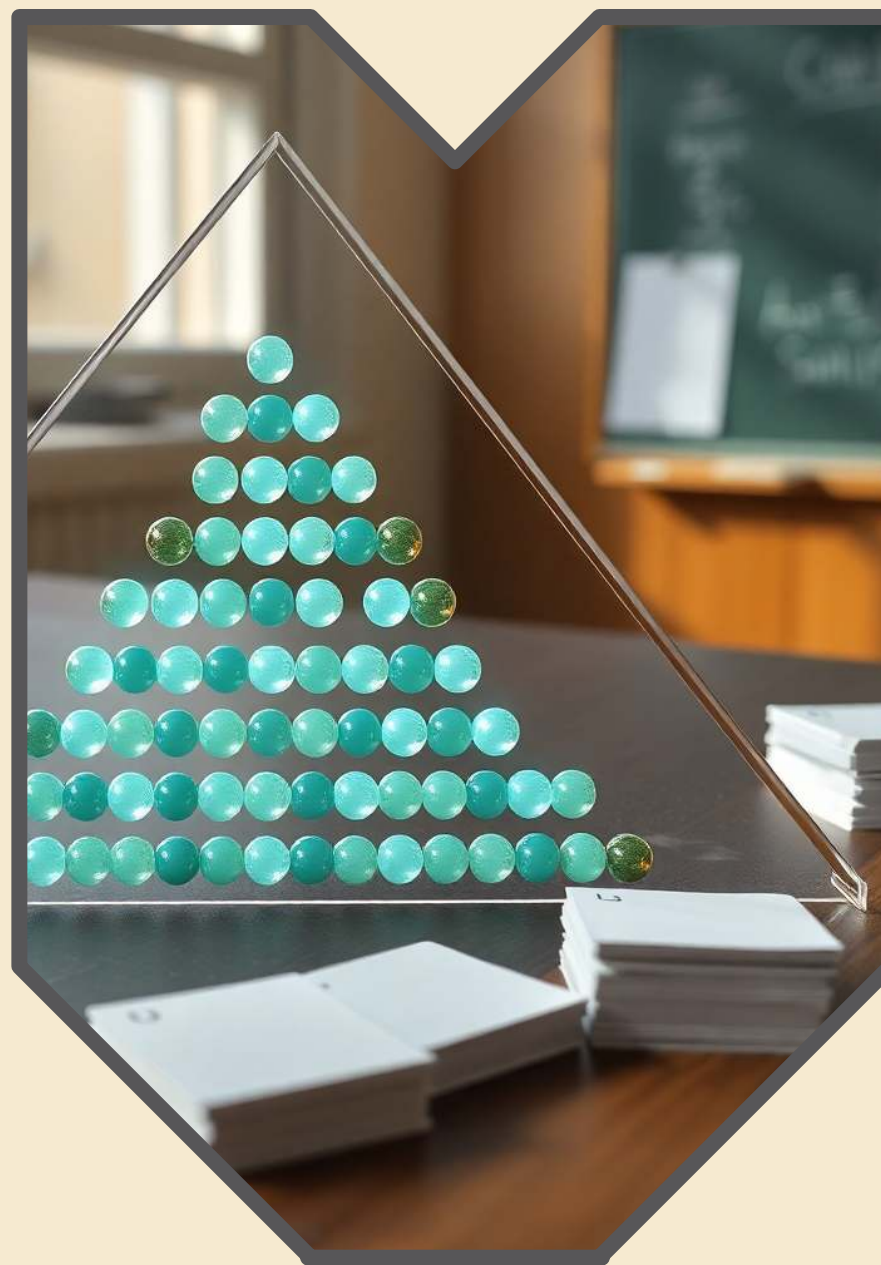
Треугольник Паскаля

Правило построения

Каждое внутреннее число получается как сумма двух чисел над ним. Благодаря этому треугольник легко продолжать дальше, не выполняя полное перемножение скобок.

Связь со степенями

Строки треугольника Паскаля дают коэффициенты для $(a+b)^n$, начиная с $n=0$. Каждая следующая строка соответствует большей степени суммы.



Единицы по краям

В начале и в конце каждой строки стоят единицы. Это помогает быстро заметить структуру и не потерять крайние коэффициенты при разложении.

Удобство для вычислений

Схема особенно полезна, когда нужно найти коэффициенты быстро и без ошибок. Она сокращает работу и делает закономерность более заметной.

Строки треугольника Паскаля до $n=6$

Покажем, как каждая строка треугольника Паскаля соответствует разложению $(a+b)^n$.

Каждая следующая строка длиннее на один элемент, а числа на краях и симметрия сохраняются.

Треугольник Паскаля и биномиальные коэффициенты

n	Строка	Разложение
0	1	$(a+b)^0$
1	1,1	$(a+b)^1$
2	1,2,1	$(a+b)^2$
3	1,3,3,1	$(a+b)^3$
4	1,4,6,4,1	$(a+b)^4$
5	1,5,10,10,5,1	$(a+b)^5$

$n+1$

членов содержит разложение
степени суммы при любом
натуральном n .

В разложении всегда столько членов, сколько различных значений может принимать k : от 0 до n .

Алгебра, 9 класс; общая формула бинома Ньютона



Симметрия коэффициентов в разложении



В строке Паскаля одинаковые числа стоят на равных расстояниях от края. Это помогает быстро проверять правильность разложения без полного перемножения скобок.

Коэффициенты в разложении симметричны, а наибольшие значения обычно находятся ближе к середине строки.

Треугольник Паскаля, строка для $n=4$

Разложение $(a-b)^n$ и чередование знаков

Начало разложения

При вычитании во второй скобке первый и последний члены остаются положительными, а знаки между ними меняются по установленному правилу. Это удобно проверять сразу по формуле.

Коэффициенты не меняются

Числа перед членами берутся из той же строки Паскаля, что и для $(a+b)^n$. Меняется только знак некоторых членов, а порядок коэффициентов сохраняется.

Чередование знаков

Знаки идут через один: плюс, минус, плюс, минус. Чередование связано с тем, что каждое появление b в произведении вносит дополнительный минус.

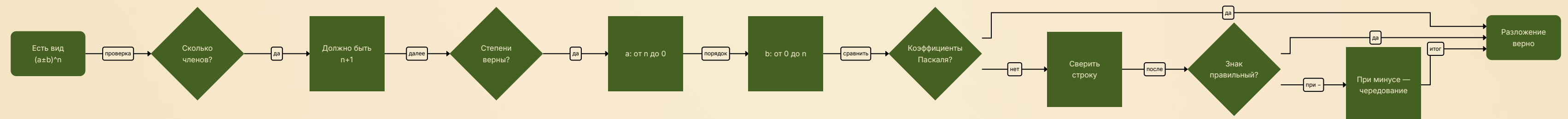
Как не ошибиться

Если внимательно смотреть на степень b , можно быстро определить знак каждого члена. Это особенно полезно при раскрытии скобок в квадрате и кубе разности.



Проверка разложения по признакам

Алгоритм сверки результата с правилом бинома Ньютона и строкой треугольника Паскаля.



Примеры разложения по формулам

1 Куб суммы

В разложении $(x+2)^3$ коэффициенты 1, 3, 3, 1 сразу задают вид ответа, а число 2 влияет на свободный член и средние слагаемые.

2 Квадрат разности

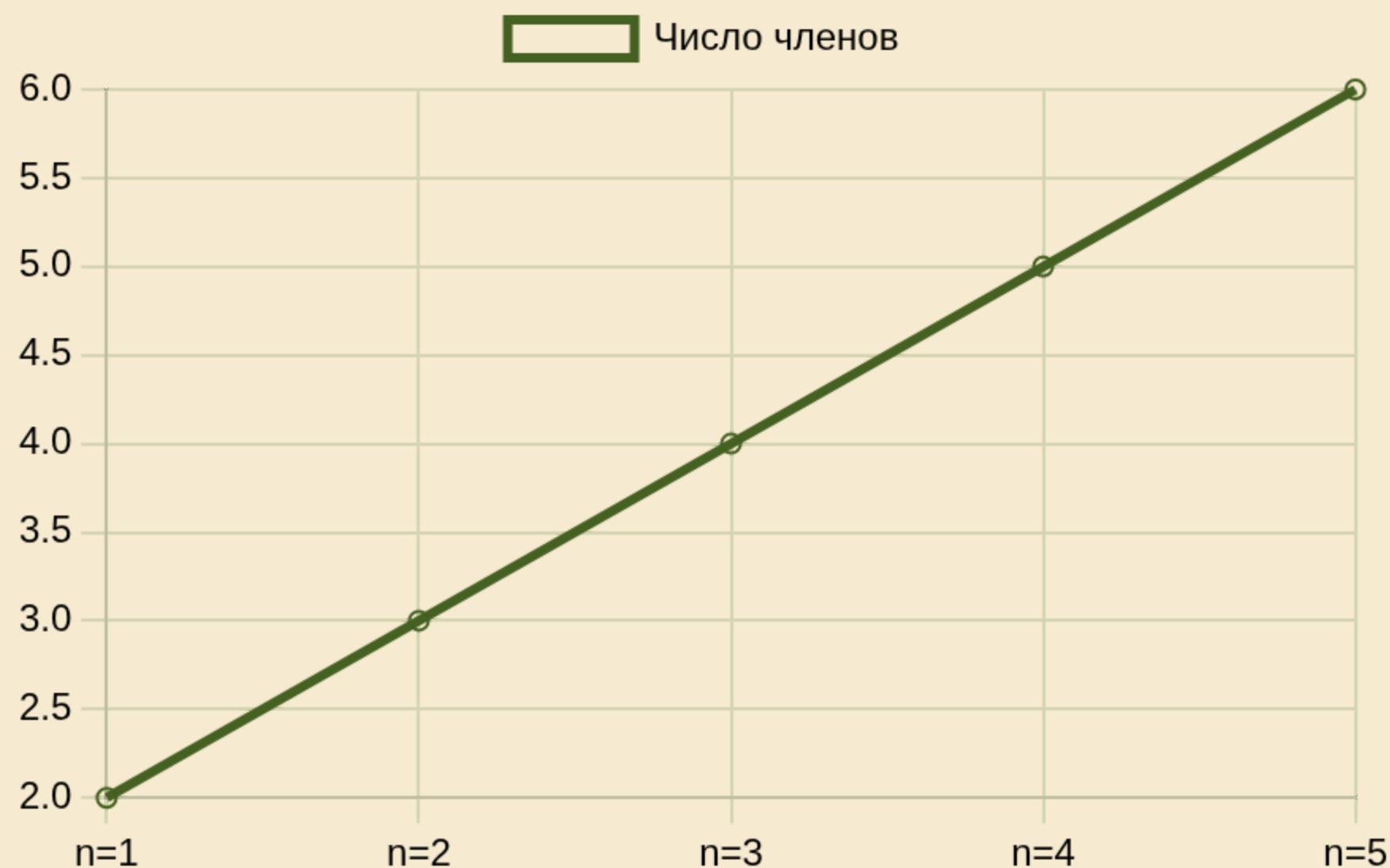
Для $(2a-b)^2$ сначала возводят в квадрат каждый множитель, затем учитывают средний член с минусом. Итог показывает, как коэффициент 4 появляется из произведения двух двоек.

3 Степень четвёртая

В выражении $(m+n)^4$ видна вся строка Паскаля: 1, 4, 6, 4, 1. Такой пример удобно использовать, чтобы запомнить форму разложения без лишних вычислений.



Рост числа членов в разложении

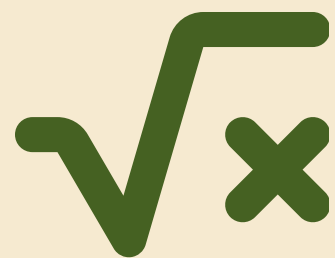


Число членов растёт одинаково для каждой следующей степени. Поэтому по значению n легко заранее понять, сколько слагаемых получится в ответе.

Рост линейный: каждая новая степень добавляет ровно один член, то есть всегда выполняется правило $n+1$.

Бином Ньютона; расчёт по формуле числа членов

Применение формул в школьной алгебре



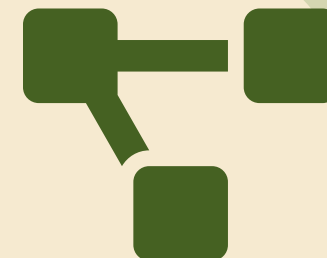
Упрощение выражений

Формулы помогают быстро раскрывать скобки и сокращать длинные записи. Вместо множества одинаковых умножений получается короткое и аккуратное выражение.



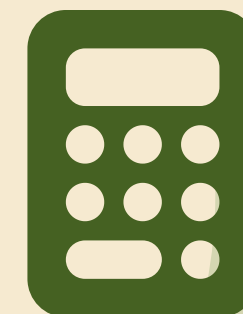
Проверка тождеств

С помощью формул удобно сверять, одинаковы ли два выражения. Достаточно привести их к одному виду и сравнить полученный результат.



Разложение на множители

Если многочлен похож на квадрат суммы или разность квадратов, его можно представить в виде произведения. Это упрощает дальнейшие преобразования и решение уравнений.



Быстрые вычисления

Формулы экономят время при подсчёте значений числовых выражений. Особенно это заметно, когда числа большие или умножение вручную занимает много шагов.

Типичные ошибки при раскрытии скобок

Ошибка	Правильно	Пример
Нет среднего члена	Есть $2ab$	$(a+b)^2$
Неверный знак	Знаки чередуются	$(a-b)^3$
Пропущен коэффициент	Есть $3ab^2$	$(a-b)^3$

Сопоставьте частую ошибку с правильной записью и проверьте, совпадает ли ваш ответ с формулой.

Большинство ошибок связано не с самой идеей, а с невнимательностью: знаками, коэффициентами и средними членами.

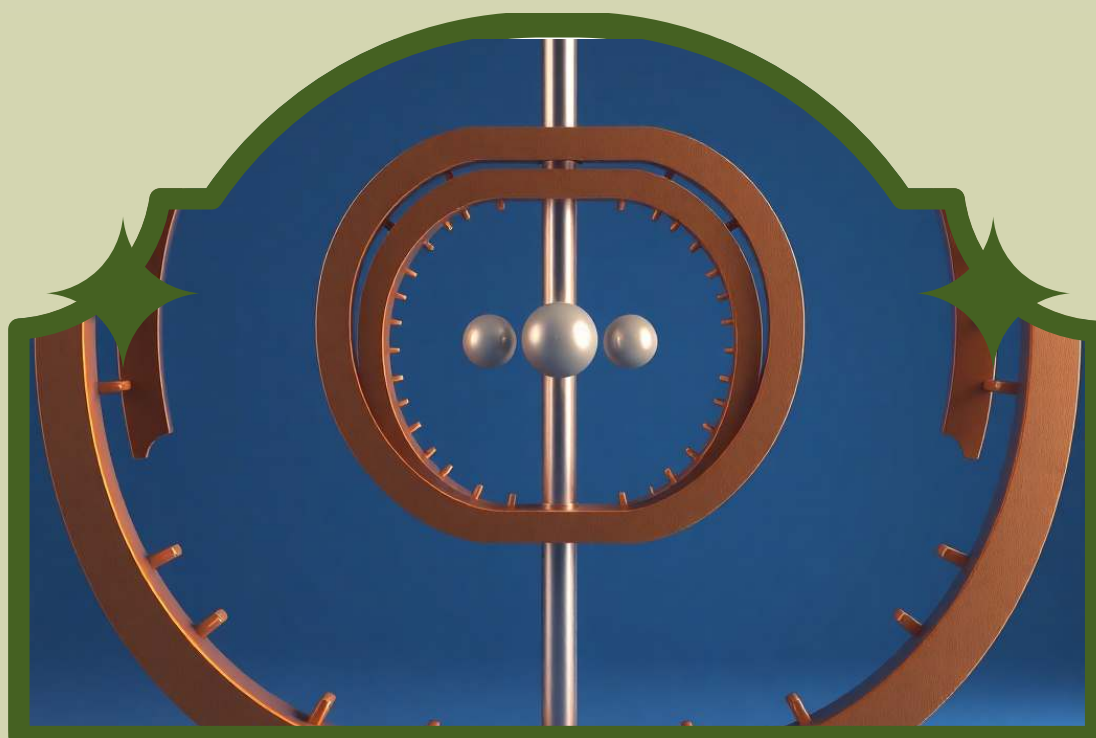
Типовые ошибки при применении формул сокращённого умножения

Как связаны формулы сокращённого умножения и бином Ньютона



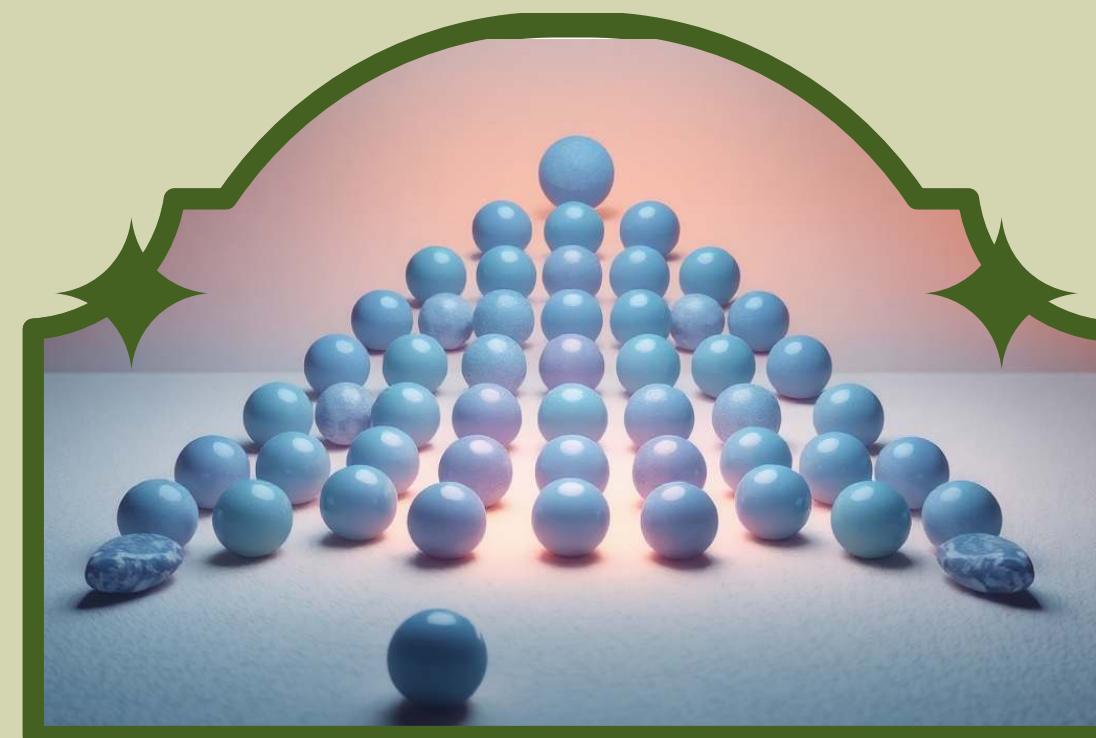
Квадрат и куб как частные случаи

Формулы для квадрата суммы, квадрата разности и кубов не существуют отдельно от общей теории. Это первые примеры бинома Ньютона, где порядок коэффициентов уже подчиняется одной закономерности.



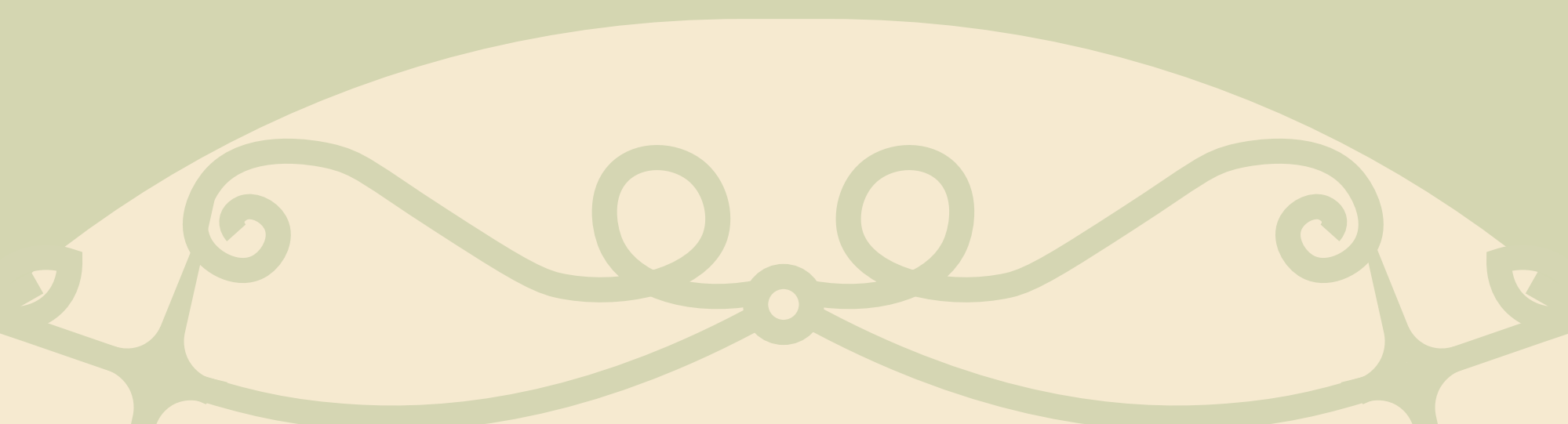
Одна формула для всех степеней

Если степень увеличивается, меняется только число членов и набор коэффициентов. Сам принцип остаётся тем же: каждая скобка в произведении даёт вклад в общий член разложения.



Связь с треугольником Паскаля

Строки треугольника Паскаля показывают коэффициенты без длинных вычислений. Поэтому формула, схема коэффициентов и общий член работают вместе и помогают быстро находить нужное разложение.

A decorative flourish consisting of a central horizontal line with two circular loops on either side, and two curved lines extending upwards and outwards from the loops, ending in small circles.

Главное, что нужно запомнить

Бином Ньютона объединяет все формулы сокращённого умножения в одну общую закономерность.
Если знать коэффициенты, степени и знаки, можно быстро и уверенно преобразовывать выражения.