

Многочлены от одной переменной: основные понятия и способы работы

Осваиваем определение, запись, действия и корни многочленов.



Почему многочлены важны в алгебре



Многочлены помогают изучать функции, уравнения и неравенства, а также описывать реальные зависимости в задачах по физике, экономике и геометрии.

Определение многочлена одной переменной

Сумма одночленов



Многочлен одной переменной — это сумма одночленов вида ax^n , где a — число, а n — неотрицательное целое число, включая ноль.

Степени переменной



Переменная в многочлене может встречаться только в целых неотрицательных степенях. Это означает, что допустимы x^0 , x , x^2 , x^3 и так далее.

Запрещённые записи



В записи многочлена не должно быть деления на переменную, корней из переменной и дробных или отрицательных показателей степени, поскольку такие выражения уже не являются многочленами.

Примеры выражений



К многочленам относятся выражения $5x^3-2x+7$, x^4-9x^2 и даже число 3, если оно рассматривается как постоянный многочлен без переменной.

Практический смысл



Понимание определения помогает быстро отличать многочлены от других выражений и уверенно применять дальнейшие правила преобразования, вычисления и поиска корней.

Основные элементы многочлена

Таблица помогает увидеть, как называются ключевые части многочлена и что именно они характеризуют.

Степень многочлена определяется только его старшим членом, а свободный член и коэффициенты задают числовые характеристики записи.

Элемент	Обозначение	Смысл
Коэффициент	a	Число при члене
Свободный член	c	Член без x
Степень одночлена	n	Показатель x
Старший коэффициент	a_n	При старшей степени
Степень многочлена	$\deg P(x)$	Наибольшая степень

Стандартный вид многочлена



01

Порядок записи

В стандартном виде члены многочлена располагают по убыванию степеней переменной, чтобы сразу видеть старший член, следующую степень и свободный член.

02

Приведение подобных

Сначала объединяют одинаковые по степени члены, складывая их коэффициенты. Это делает запись короче, понятнее и позволяет избежать повторов внутри одного выражения.

03

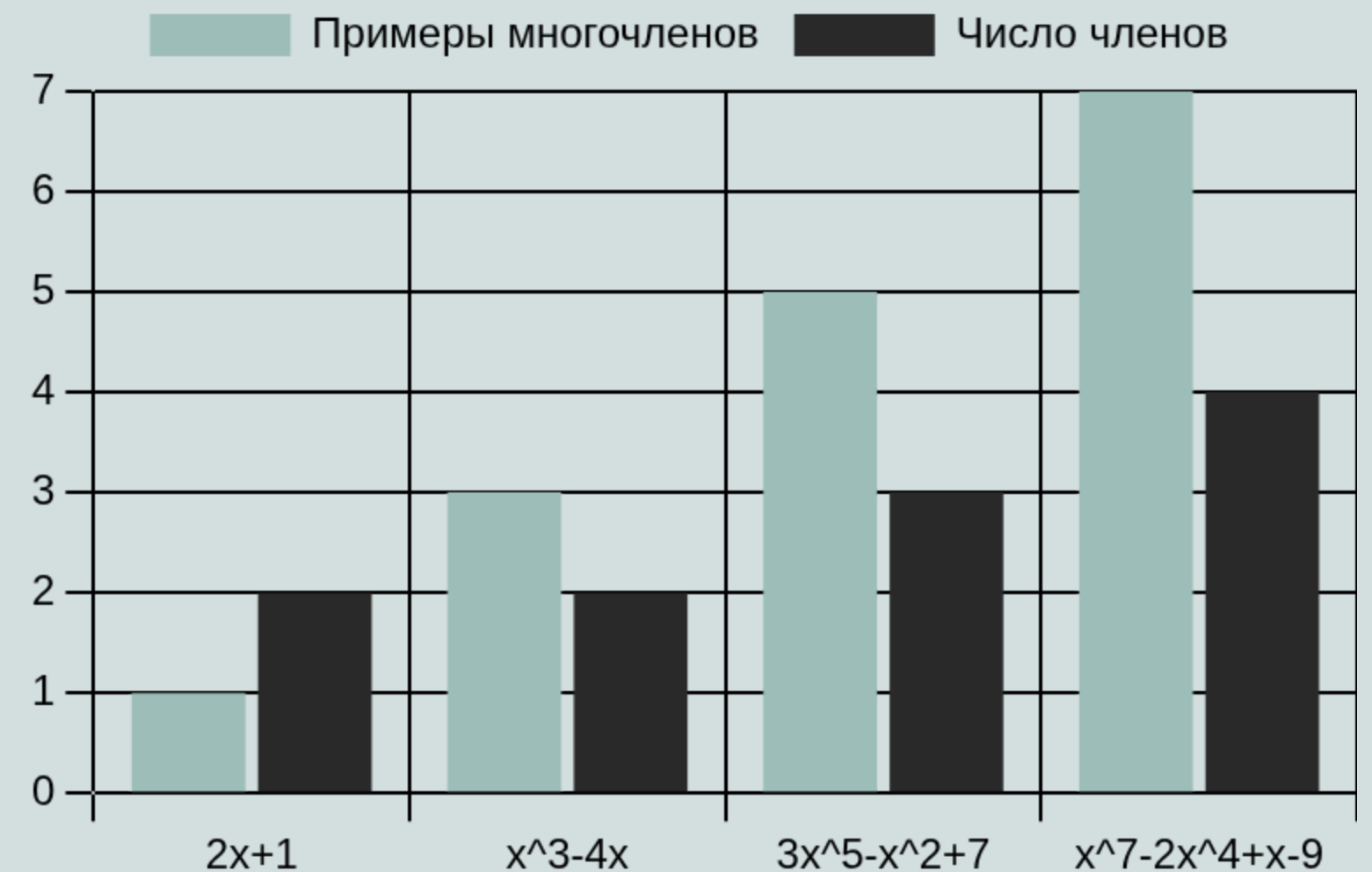
Удобный итог

Запись $5x^4 - 3x^2 + x - 7$ считается стандартной, потому что степени идут по порядку, а выражение уже приведено к аккуратному и однозначному виду.

Степень и число членов

На диаграмме видно, что степень многочлена и количество его ненулевых членов не связаны напрямую.

Высокая степень не означает большое число слагаемых: структура многочлена определяется отдельно по степени и отдельно по числу членов.



Виды многочленов по числу членов



Одночлен

Состоит из одного члена и задаёт самую простую структуру записи. Пример: $7x^3$. Такое выражение удобно распознавать по отсутствию сложения и вычитания внутри записи.



Двучлен

Содержит два члена и часто встречается в упражнениях на раскрытие скобок и приведение подобных. Пример: $x-5$. Уже по виду видно, что выражение имеет две части.

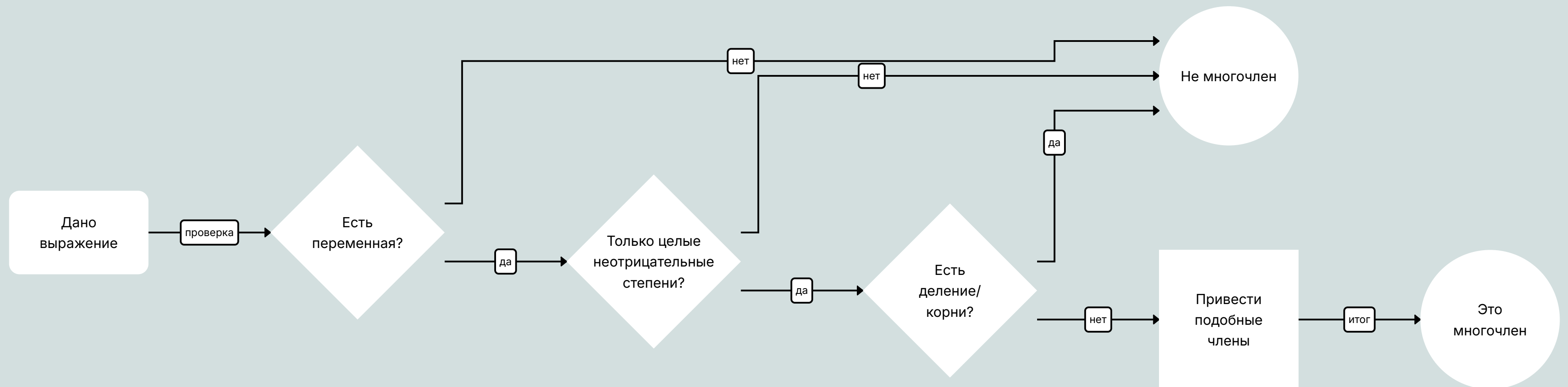


Трёхчлен

Состоит из трёх слагаемых и позволяет отрабатывать группировку и сравнение степеней. Пример: x^2+3x+2 . Такой вид особенно полезен при разложении на множители.

Проверка выражения на многочлен

Последовательность основана на правилах допустимых степеней и форм записи



Как коэффициенты меняют график многочлена



01

Знак старшего коэффициента задаёт направление

Когда старший коэффициент положительный, крайний участок графика ведёт себя иначе, чем при отрицательном значении. Именно поэтому две похожие формулы могут давать графики с разным «разворотом» на концах координатной плоскости. На рисунке это особенно заметно у многочленов одинаковой степени.



02

Свободный член фиксирует пересечение с осью Oy

Если подставить $x=0$, остаётся только свободный член, поэтому он определяет точку пересечения графика с осью Oy . На иллюстрации удобно отметить эту точку для нескольких кривых и сравнить, как меняется их положение по вертикали.

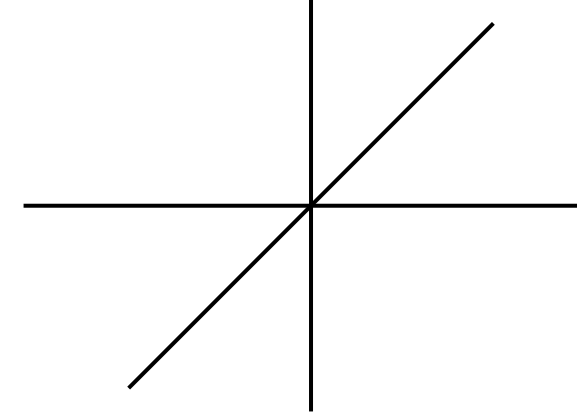


03

Степень влияет на форму кривой

Чем выше степень многочлена, тем больше изгибов и поворотов может появиться на графике. Однако конкретный вид кривой зависит не только от степени, но и от коэффициентов, которые растягивают, сжимают и смещают изображение.

Сложение и вычитание многочленов



01

Раскрыть скобки

Сначала убирают скобки, внимательно следя за знаками перед каждым слагаемым. Если перед скобками стоит минус, знаки всех членов внутри меняются на противоположные.

02

Собрать подобные

Затем объединяют только члены с одинаковой степенью переменной. Коэффициенты складывают или вычитают отдельно, а саму переменную и её степень сохраняют без изменений.

03

Проверить результат

После преобразования запись приводят к стандартному виду. Например, сумма $(3x^2 - 2x + 1) + (x^2 + 5x - 4)$ даёт $4x^2 + 3x - 3$, если знаки были учтены верно.

Умножение многочлена на одночлен и на многочлен

1. Умножение одночлена

01

Коэффициент умножают на каждый член многочлена, а показатели одинаковой переменной складывают. Затем результат записывают в стандартном виде, чтобы сразу увидеть подобные члены.

2. Раскрытие скобок

02

При умножении многочлена на многочлен каждый член первого множителя соединяют с каждым членом второго. Используется распределительное свойство, поэтому ни один член нельзя пропустить.

3. Приведение результата

03

После перемножения все подобные члены объединяют и упрощают выражение. Так получают компактную запись, например $(x+2)(x-3)=x^2-x-6$, удобную для дальнейших преобразований.

Алгоритм действий с многочленами

Операция	Правило	Ошибка
Сложение	Подобные члены	Не сводят
Вычитание	Меняют знаки	Теряют минус
Умножение	Каждый член	Пропускают член
Скобки	Распределение	Ошибки со знаками

Схема показывает, какое правило применяется к каждой операции и где чаще всего возникают ошибки.

Главные трудности связаны не с формулами, а с внимательностью: чаще всего ошибаются при раскрытии скобок и работе со знаками.

Деление многочленов и остаток

01

Деление на $x-a$

Если делитель имеет вид $x-a$, удобно применять подбор корня или деление многочлена столбиком. Такой способ особенно полезен, когда нужно быстро понизить степень выражения.

02

Теорема об остатке

При делении $p(x)$ на $x-a$ остаток равен $p(a)$. Это позволяет не только находить остаток, но и проверять значение многочлена в заданной точке без полного деления.

03

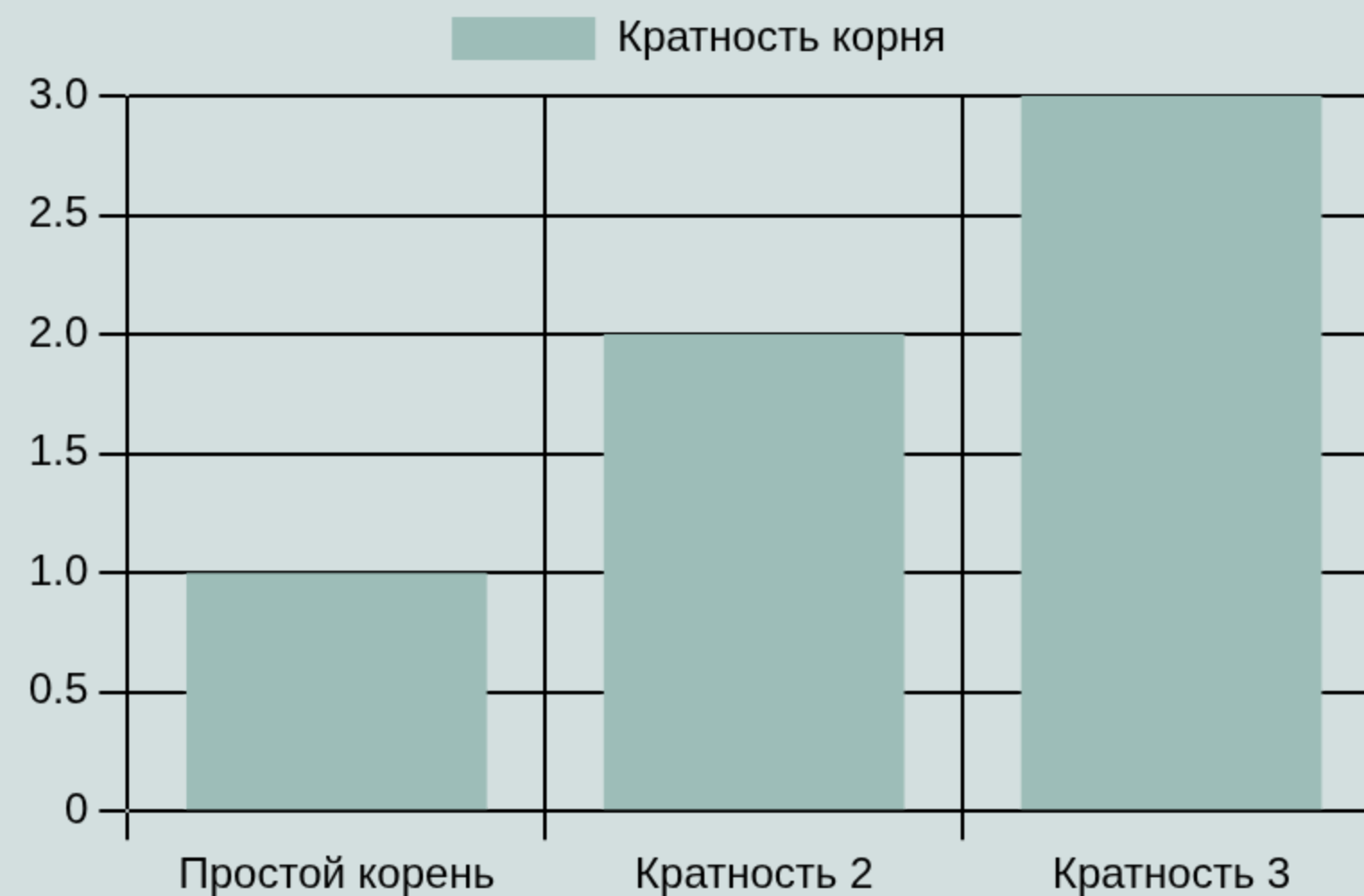
Связь с корнями

Если $p(a)=0$, то $x-a$ является делителем многочлена. Поэтому деление становится важным шагом в поиске корней и последующем разложении на множители.

Нули многочлена и кратность корней

Чем больше кратность корня, тем заметнее меняется характер пересечения графика с осью Ох: он становится менее резким и более «приплюснутым» у точки нуля.

Кратность корня влияет на форму графика и помогает по его виду судить о структуре многочлена.



Разложение на множители

01

Общий множитель

Сначала ищут общий множитель у всех слагаемых и выносят его за скобки. Это самый быстрый способ упростить многочлен, если все члены имеют общий числовой или буквенный множитель.

02

Формулы сокращённого умножения

Затем применяют известные тождества, например разность квадратов. Так многочлен $x^2 - 9$ удобно записывается как $(x - 3)(x + 3)$, что сразу показывает его структуру и корни.

03

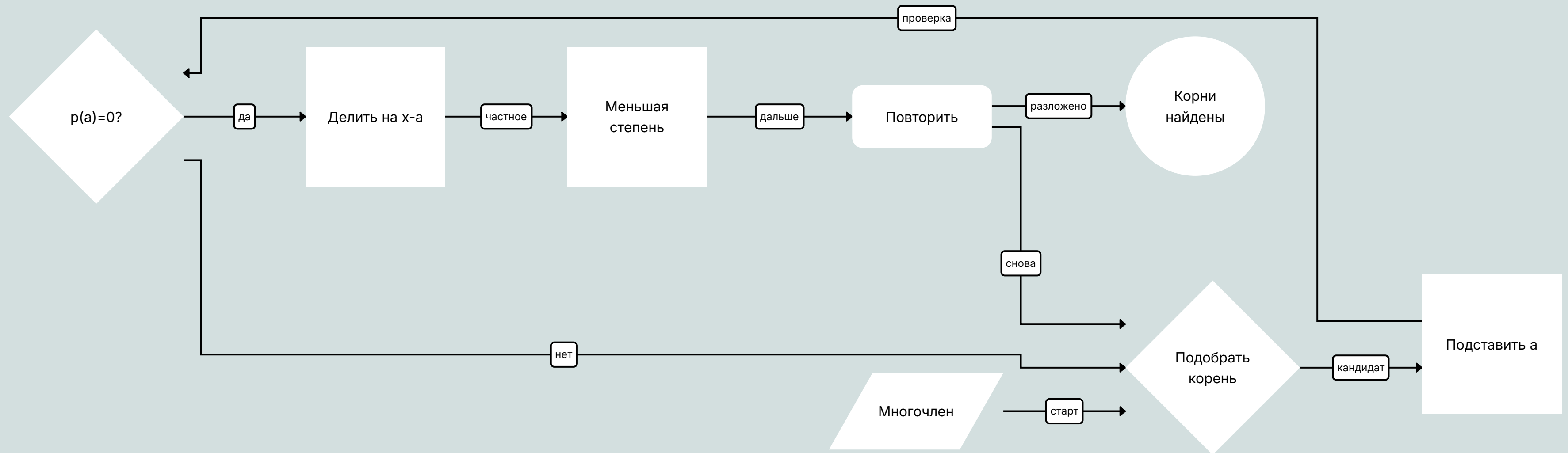
Группировка

Если общего множителя нет, слагаемые объединяют в группы и выносят общий множитель из каждой группы. Этот приём особенно полезен для многочленов из четырёх и более членов.



Как находят корни многочлена

Последовательность действий при поиске корней и разложении многочлена на линейные множители



Применения многочленов в реальных задачах



Площади и объёмы

Многочлены удобно описывают формулы площадей, объёмов и других величин, зависящих от одной переменной. В таких задачах алгебраическая запись позволяет быстро вычислять результат при разных значениях параметра.



Движение и траектории

Квадратичные многочлены часто связывают с параболическими зависимостями, например при изучении траектории движения. Они помогают видеть, как изменяется величина во времени или от расстояния.



Изменение прибыли

В экономических задачах многочлены используют для описания выручки, затрат и прибыли. Это делает зависимость между величинами наглядной и позволяет анализировать, как меняется результат при росте аргумента.



Приближённые модели

Многочлены более высокой степени применяют для приближённой обработки данных и построения гладких кривых. В школьном курсе это показывает, как алгебра помогает работать с реальными зависимостями.

Типичные ошибки при работе с многочленами

Таблица помогает быстро увидеть, где возникают самые частые неточности и как выглядит верная запись.

Чаще всего неверный ответ возникает из-за знаков, порядка записи и невнимательного раскрытия скобок, а не из-за сложности самой темы.

Ошибка	Пример	Верно
Смещение степеней	x^2+x^3	Отдельно
Забытый минус	$a-(b-c)$	$a-b+c$
Скобки	$2(x+3)$	$2x+6$
Не стандартный вид	$x+1+ x^2$	x^2+x+1

Связь темы с дальнейшим изучением алгебры

01

1. Фундамент для уравнений

Навыки работы с многочленами нужны для преобразования уравнений и неравенств. Без умения упрощать выражения сложно переходить к более сложным алгебраическим задачам.

02

2. Рациональные выражения

При изучении дробей и рациональных выражений многочлены становятся основой для сокращения, разложения и анализа области допустимых значений.

03

3. Функции и графики

Свойства многочленов используются при исследовании функций, их нулей и поведения графиков. Это помогает связать формулу с её геометрическим изображением.

04

4. Дальнейшие теоремы

В старших классах темы продолжают теоремой Безу, разложением на линейные множители и более глубоким анализом графиков, поэтому базовые навыки особенно важны.

Многочлены: тема, которая связывает всю алгебру



Многочлены учат видеть структуру выражения, уверенно преобразовывать его и связывать формулу с графиком и уравнением. Эти навыки становятся опорой для следующих тем алгебры.