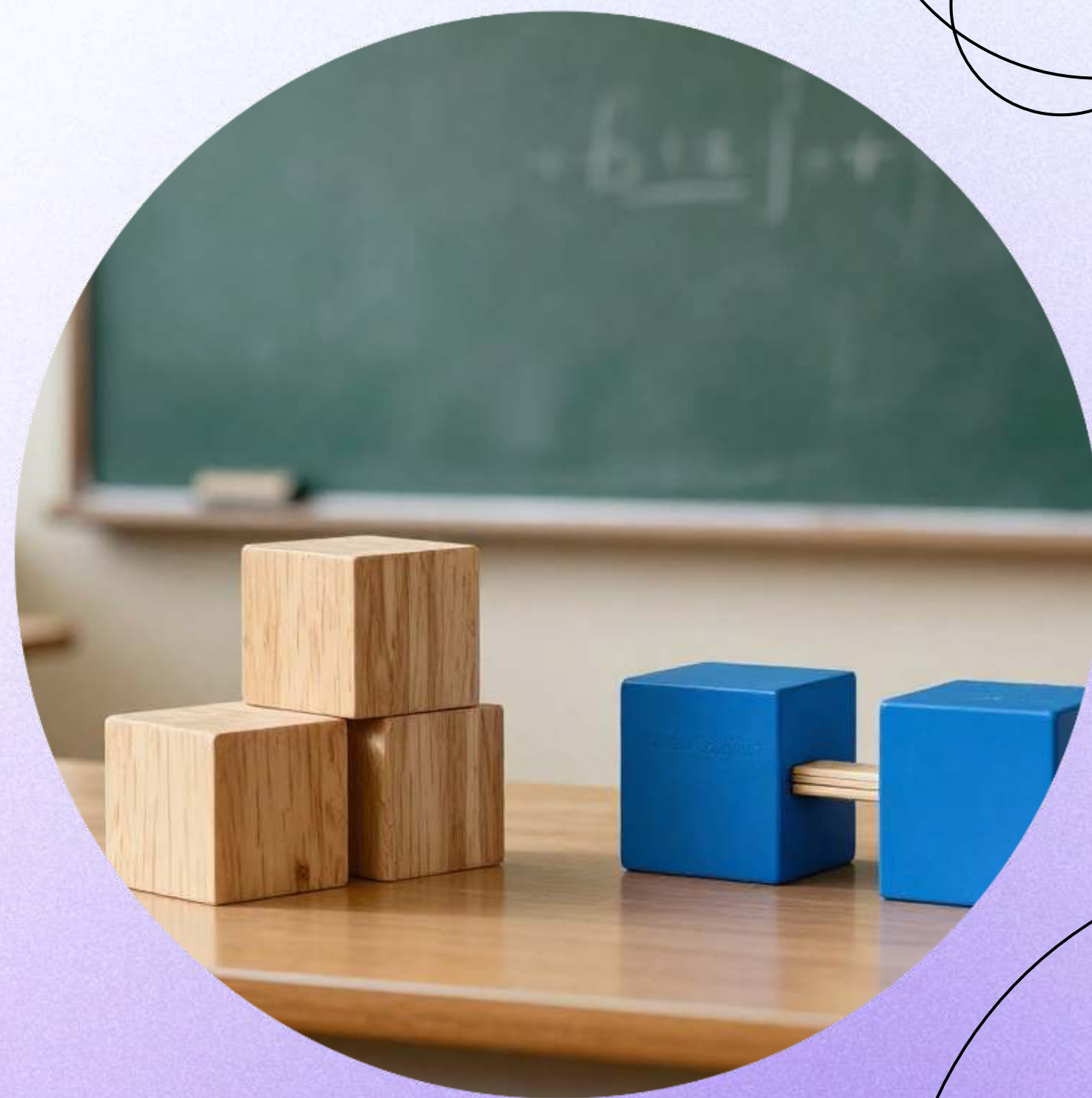


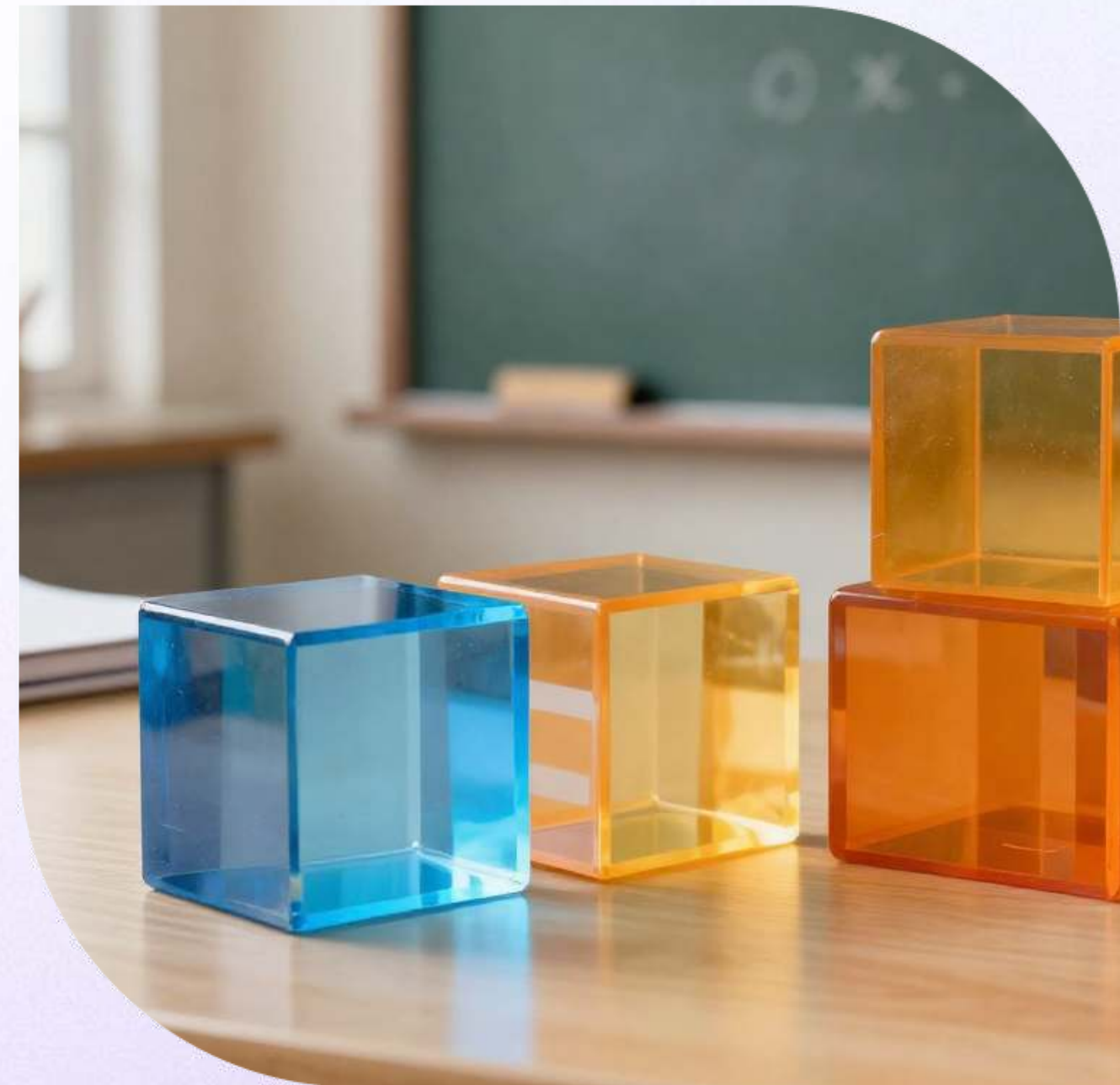
Формулы суммы и разности кубов

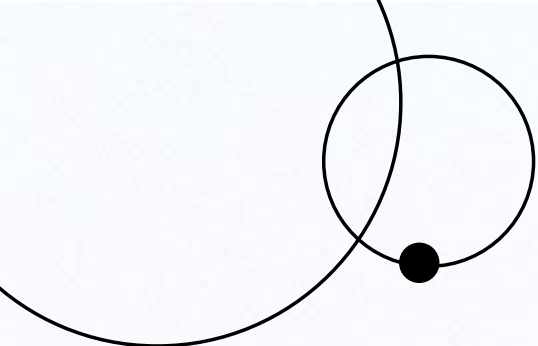
Разложение кубов на множители: просто
и полезно.



Кубы в алгебре и в задачах

Куб — это третья степень числа: $2^3=8$, $(-3)^3=-27$. Формулы суммы и разности кубов помогают разлагать многочлены, упрощать дроби и быстрее решать задачи без лишних вычислений.





3

Это число показывает,
что выражение
умножается само
на себя три раза.

Третья степень помогает
отличать куб от обычного
произведения и не путать
знаки при вычислениях.

✦ Определение степени числа, школьный курс алгебры

Геометрический смысл куба

- **Объём фигуры**

У куба все рёбра равны, поэтому его объём находят по формуле $V=a^3$. Если ребро увеличивается, объём растёт очень быстро, и это удобно показывать на наглядных примерах.

- **Простой пример**

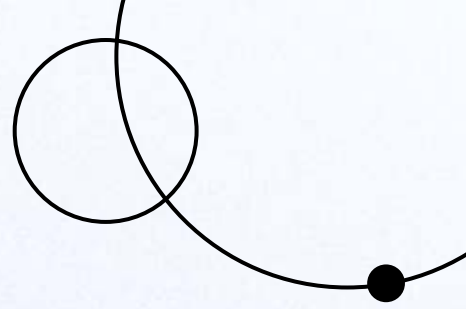
При ребре 3 см объём куба равен 27 см³. Такой расчёт показывает, что запись a^3 связана не только с алгеброй, но и с реальной геометрической фигурой.

- **Связь с разложением**

Сравнение двух кубов разного размера помогает увидеть, что выражения a^3+b^3 и a^3-b^3 можно рассматривать как сумму или разность объёмов и затем упрощать на множители.



Основные формулы суммы и разности кубов



Две формулы выглядят похоже,
но отличаются знаком во второй скобке.

Вид	Разложение	Знак ab
a^3+b^3	$(a+b)(a^2-ab+b^2)$	$-$
a^3-b^3	$(a-b)(a^2+ab+b^2)$	$+$

Знак в первой скобке повторяет
исходное выражение, а у среднего
члена он всегда противоположный.



Почему формулы дают правильный результат

1

Раскрываем скобки

Если умножить первую скобку на вторую, каждый член из первой скобки попадёт в оба слагаемых второй. Так появляются промежуточные члены, которые помогают проверить формулу.

2

Лишнее сокращается

В формуле суммы кубов члены $-ab^2$ и $+ab^2$, а также $-a^2b$ и $+a^2b$ взаимно уничтожаются. В результате остаётся только a^3+b^3 без лишних добавок.

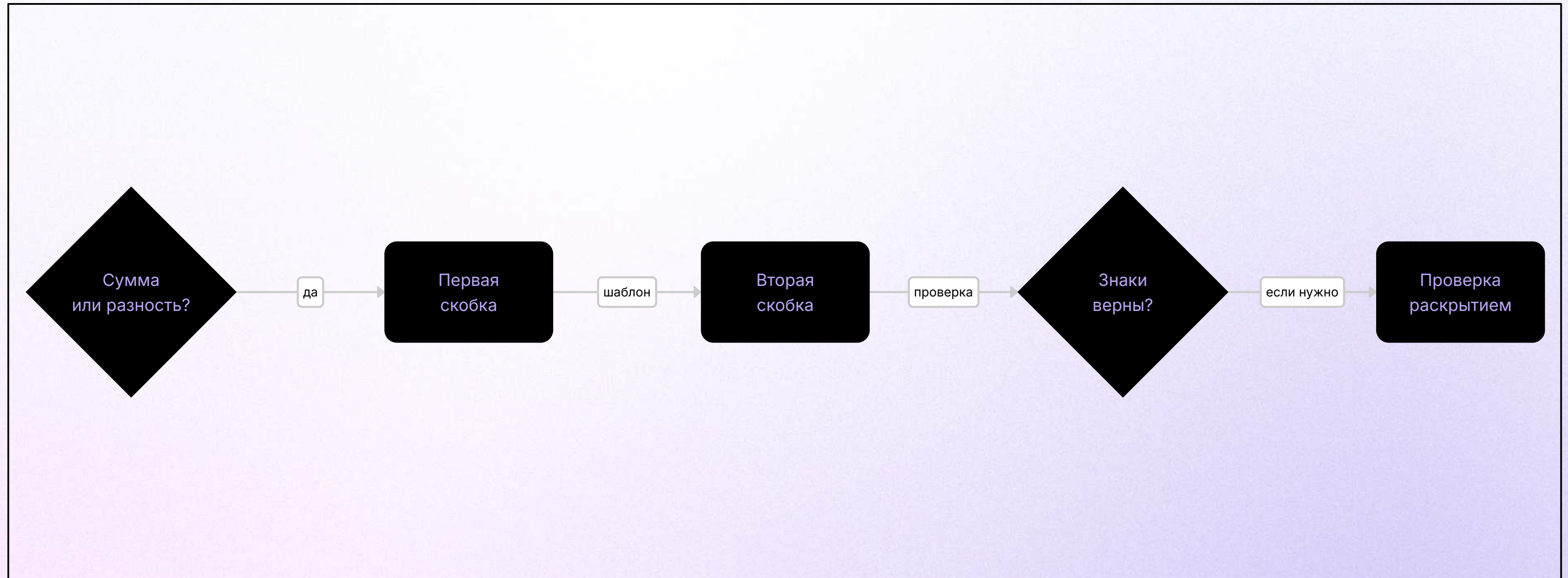
3

Это тождество

В формуле разности кубов сокращение происходит так же. Поэтому обе записи верны при любых допустимых значениях букв и называются тождествами.

Как разложить сумму или разность кубов

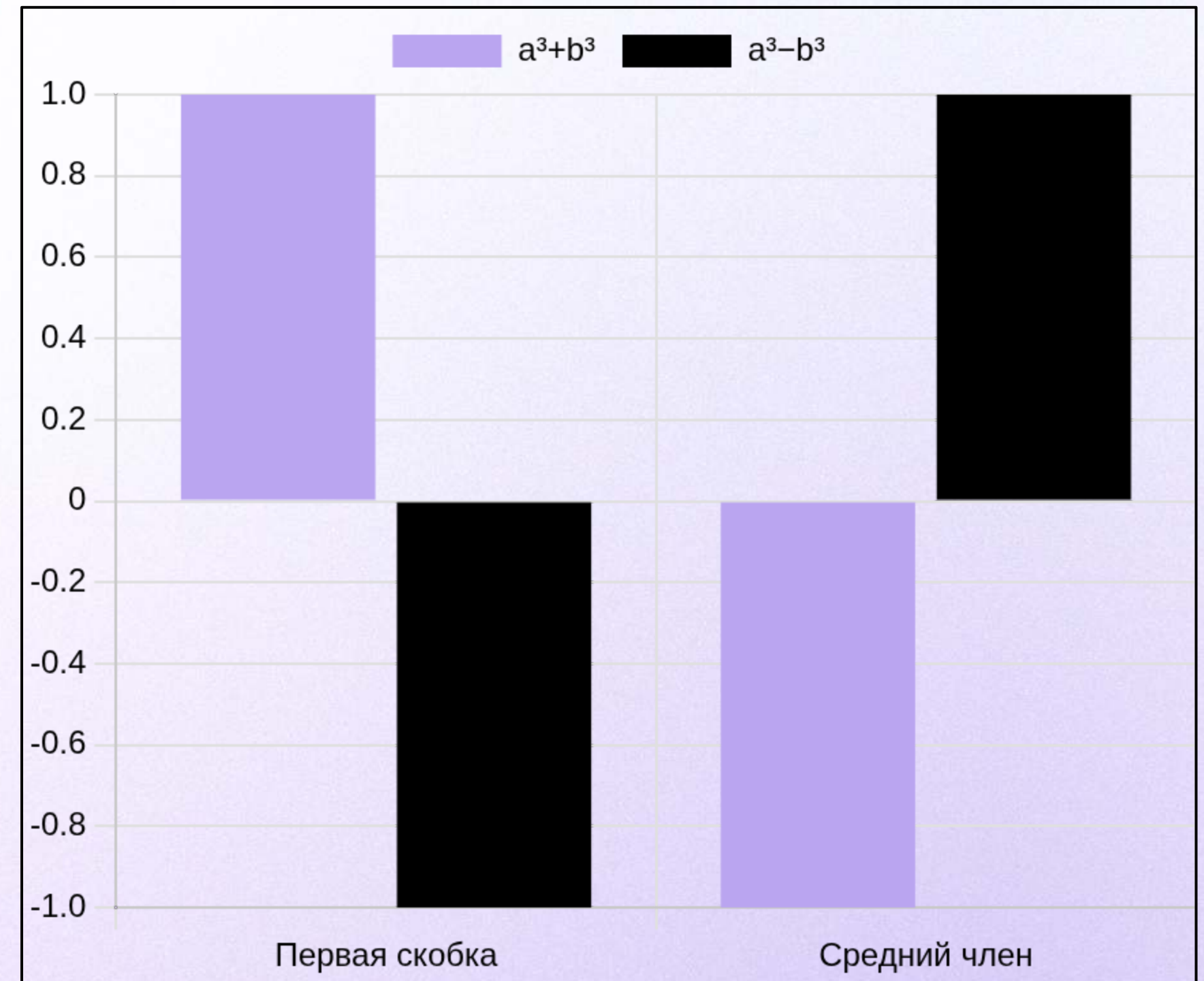
Последовательность действий основана на одинаковом шаблоне для обеих формул.

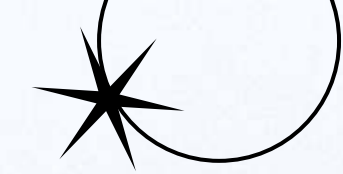


Сравнение знаков в формулах

На схеме видно, что оба случая строятся по одному принципу: знак во второй скобке всегда меняется на противоположный.

Главное правило одинаково для обеих формул, поэтому их легко различать по знаку среднего члена.





Разложение суммы кубов на примере

Находим кубы

В выражении x^3+8 число 8 удобно представить как 2^3 . Тогда перед нами сумма двух кубов, и можно сразу применить нужную формулу без лишних преобразований.

Записываем ответ

По шаблону получаем $(x+2)(x^2-2x+4)$. Первая скобка повторяет знак между кубами, а во второй скобке средний член имеет противоположный знак.

Проверяем результат

Если раскрыть скобки, лишние слагаемые сократятся, и снова получится x^3+8 . Такая проверка помогает убедиться, что разложение выполнено правильно.

Разложение разности кубов на примере

1 Представляем числа как кубы

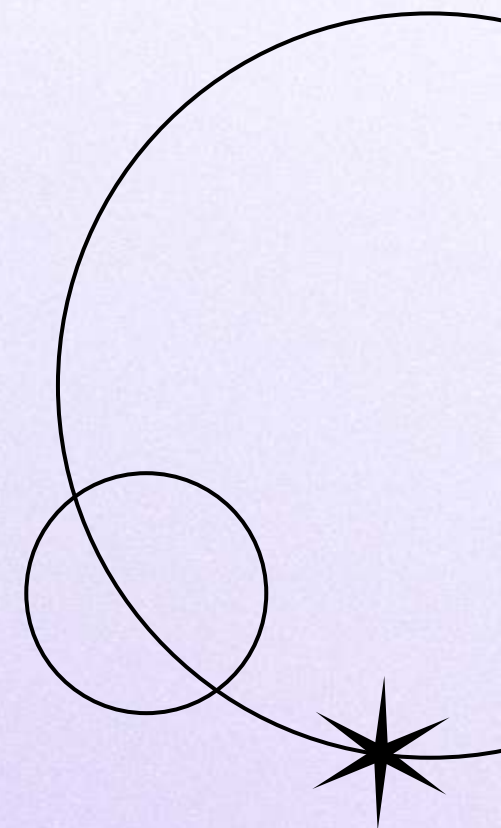
В выражении $27y^3 - 64$ можно увидеть кубы: $27y^3 = (3y)^3$, а $64 = 4^3$. Это позволяет сразу определить, что перед нами разность кубов.

2 Составляем множители

По формуле получаем $(3y - 4)(9y^2 + 12y + 16)$. Первая скобка повторяет знак исходного выражения, а во второй скобке средний член имеет противоположный знак.

3 Используем разложение

Такую запись удобно применять в дальнейших преобразованиях: она короче, чем исходное выражение, и помогает быстрее сокращать дроби или упрощать выражения.



Как запомнить знак во второй скобке

- **Запомните правило**

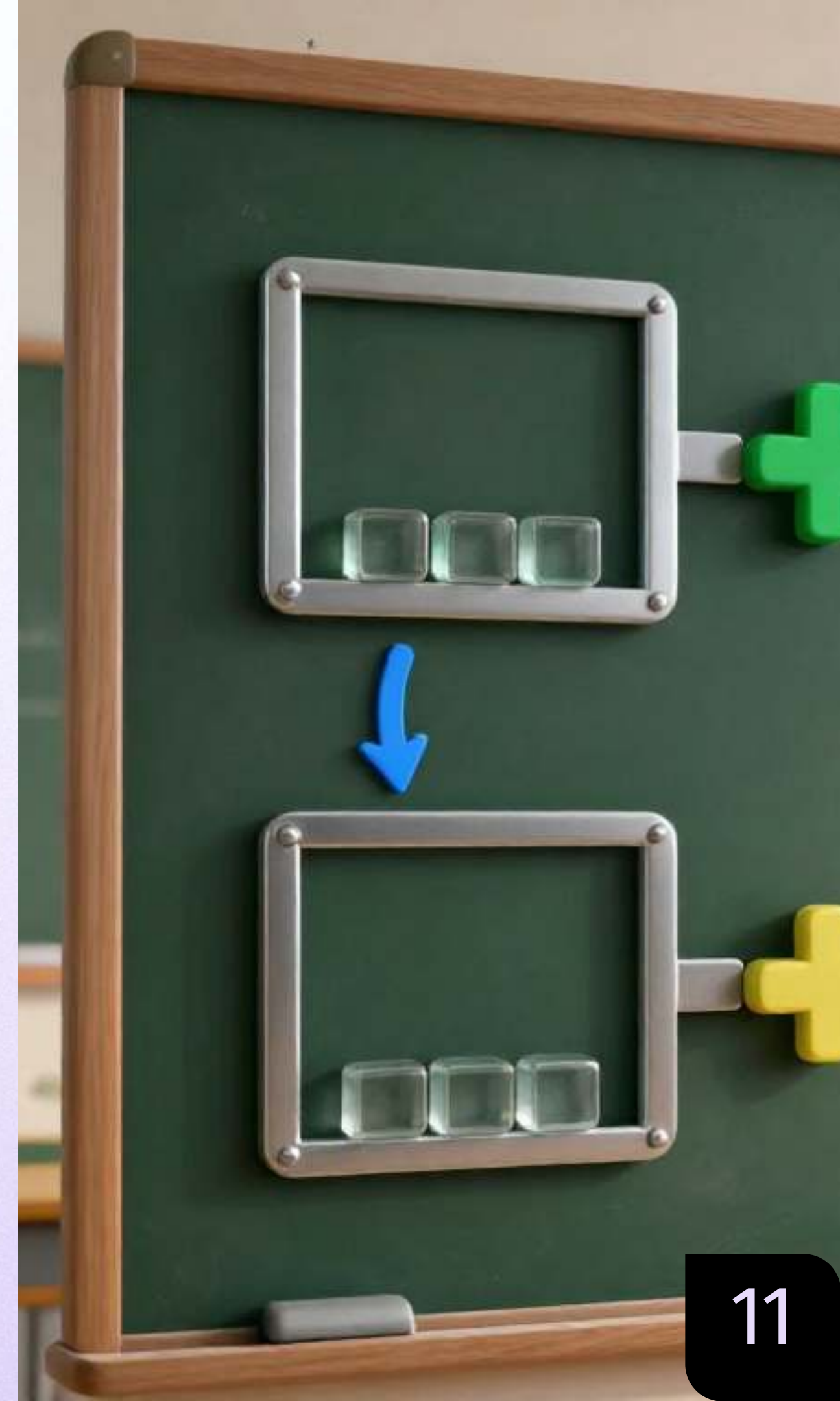
Во второй скобке знак у произведения ab всегда противоположен знаку между кубами. Это главное правило помогает сразу выбрать нужный шаблон и не перепутать формулы при записи ответа.

- **Сумма кубов**

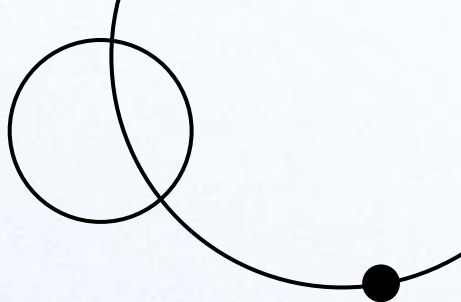
Если между кубами стоит плюс, то в первой скобке тоже плюс, а во второй — минус: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$. Такой порядок удобно проговаривать вслух при решении примеров.

- **Разность кубов**

Если между кубами стоит минус, то в первой скобке тоже минус, а во второй — плюс: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$. Стрелки и цвет знаков помогают быстро увидеть этот переход.



Примеры разложения выражений с кубами



Выражение	Разложение	Что заметить
x^3+27	$(x+3) (x^2-3x+9)$	$27=3^3$
$8a^3-b^3$	$(2a-b) (4a^2+2ab+b^2)$	$8a^3=(2a)^3$
$125m^3+n^3$	$(5m+n) (25m^2-5mn+n^2)$	$125m^3=(5 m)^3$

В примерах сначала находят кубические корни, затем подставляют их в первую скобку и по образцу составляют вторую.

Во всех примерах схема одна: сначала выделяется куб, затем записывается первая скобка, а средний член второй скобки получает противоположный знак.

Типичные ошибки при разложении

1

Неверная вторая скобка

Часто вместо шаблона $a^2 \mp ab + b^2$ записывают $a^2 \pm b^2$. Из-за этого теряется средний член, и разложение уже не совпадает с исходным выражением после раскрытия скобок.

2

Путаница со знаком

Ещё одна ошибка — ставить знак у ab таким же, как во внешней скобке. На самом деле он должен быть противоположным, иначе тождество перестаёт работать.

3

Смешение формул

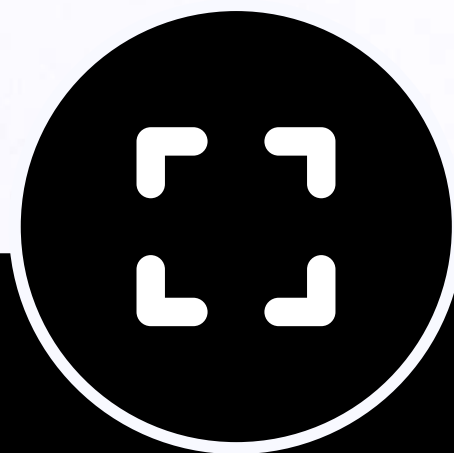
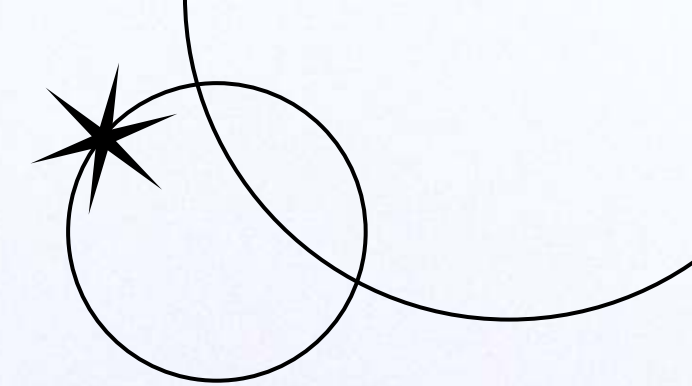
Нельзя путать $(a+b)^3$ и a^3+b^3 : это разные выражения. В кубе двучлена появляются дополнительные слагаемые, поэтому результат нельзя сокращать до суммы кубов.

4

Нет проверки

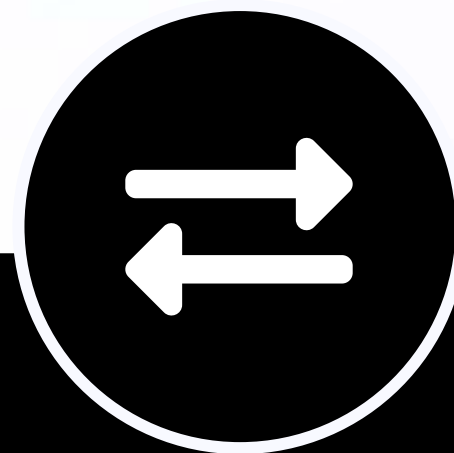
Если не раскрыть скобки обратно, ошибку можно не заметить. Быстрая проверка показывает, совпадает ли полученное выражение с исходным и все ли члены сократились.

Связь с формулой куба двучлена



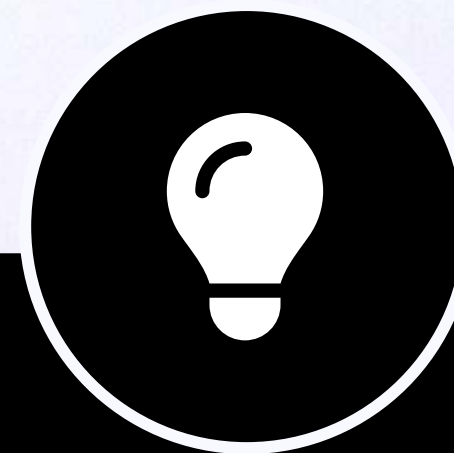
Раскрытие скобок

Формулы куба двучлена показывают, как развивается выражение при умножении скобок. Именно поэтому в формулах суммы и разности кубов появляется устойчивый трёхчленный шаблон.



Сокращение лишних членов

При раскрытии $(a+b)^3$ и $(a-b)^3$ появляются дополнительные слагаемые, которые помогают понять строение ответа. Во второй скобке остаются только нужные члены после взаимного сокращения.



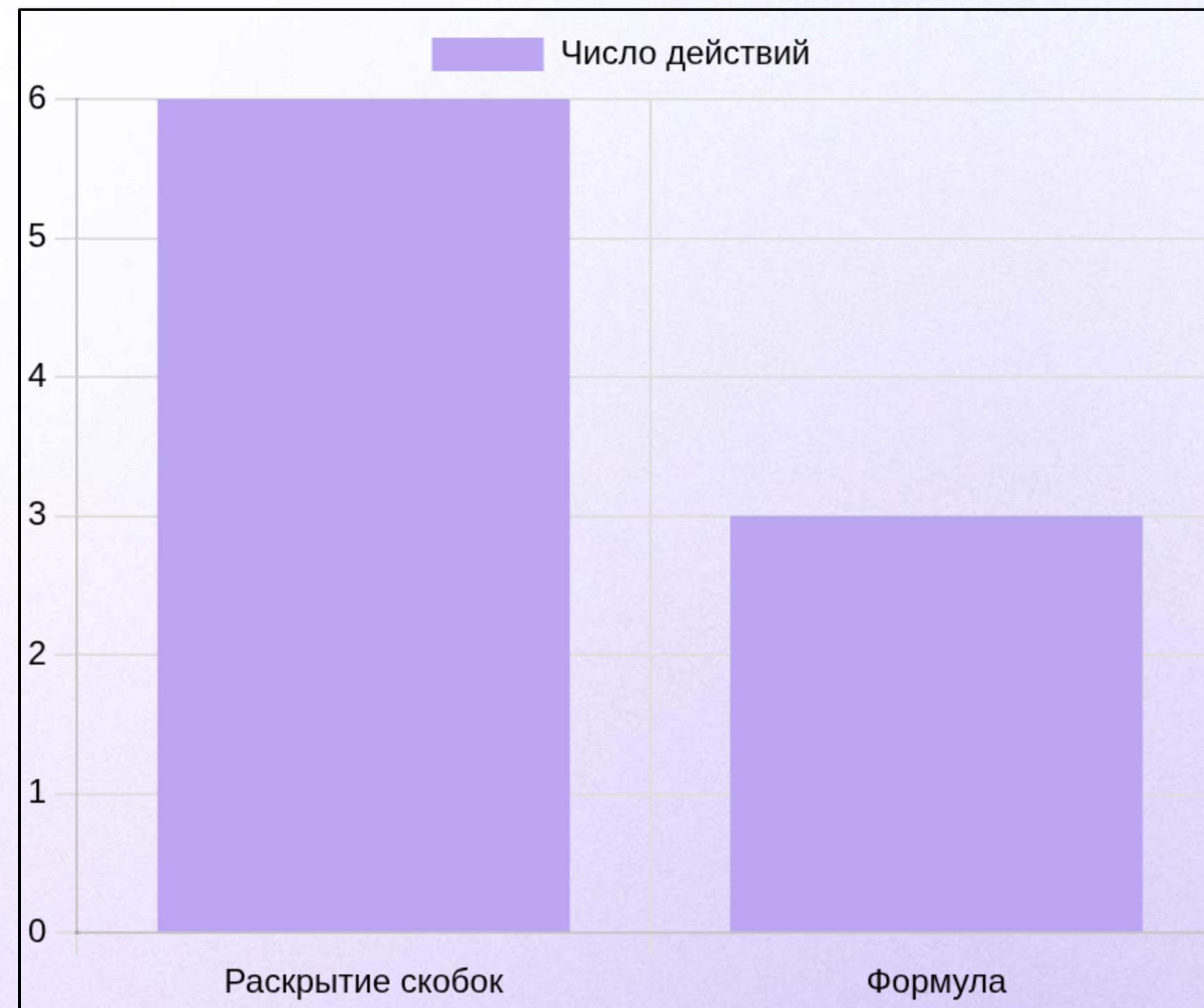
Понимание закономерности

Если помнить формулы куба двучлена, легче увидеть, почему знак у ab меняется на противоположный. Это делает запоминание не механическим, а осмысленным.

Преимущество формулы перед длинным раскрытием скобок

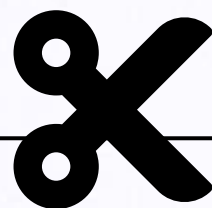
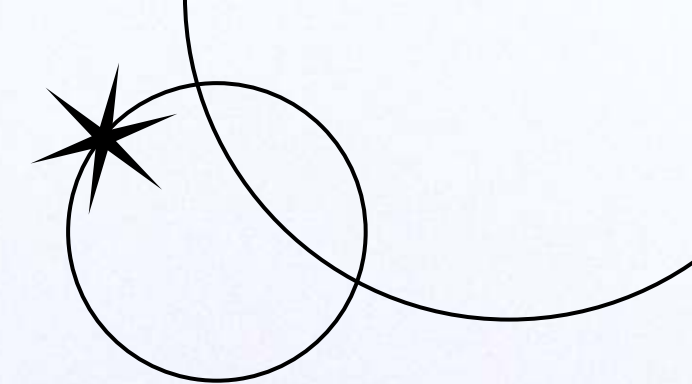
На практике формула особенно полезна, когда кубы легко распознаются в числах и коэффициентах: она сокращает запись и помогает быстрее получить ответ.

Формульный способ требует меньше шагов, поэтому снижает риск ошибки и экономит время при преобразовании выражений.



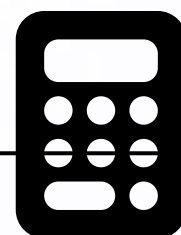
★ Учебное сравнение способов преобразования выражений; схема для наглядности

Использование формул при сокращении дробей



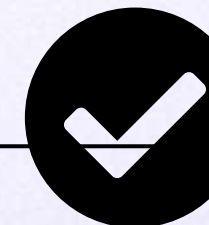
Ищем общий множитель

Сначала разложите числитель и знаменатель на множители. Если после этого появляется одинаковый множитель, дробь можно сократить и сделать выражение намного проще.



Удобно в алгебраических дробях

Такие задания часто встречаются в теме дробей с буквами. Формулы суммы и разности кубов помогают быстро увидеть нужный множитель без длинных вычислений.

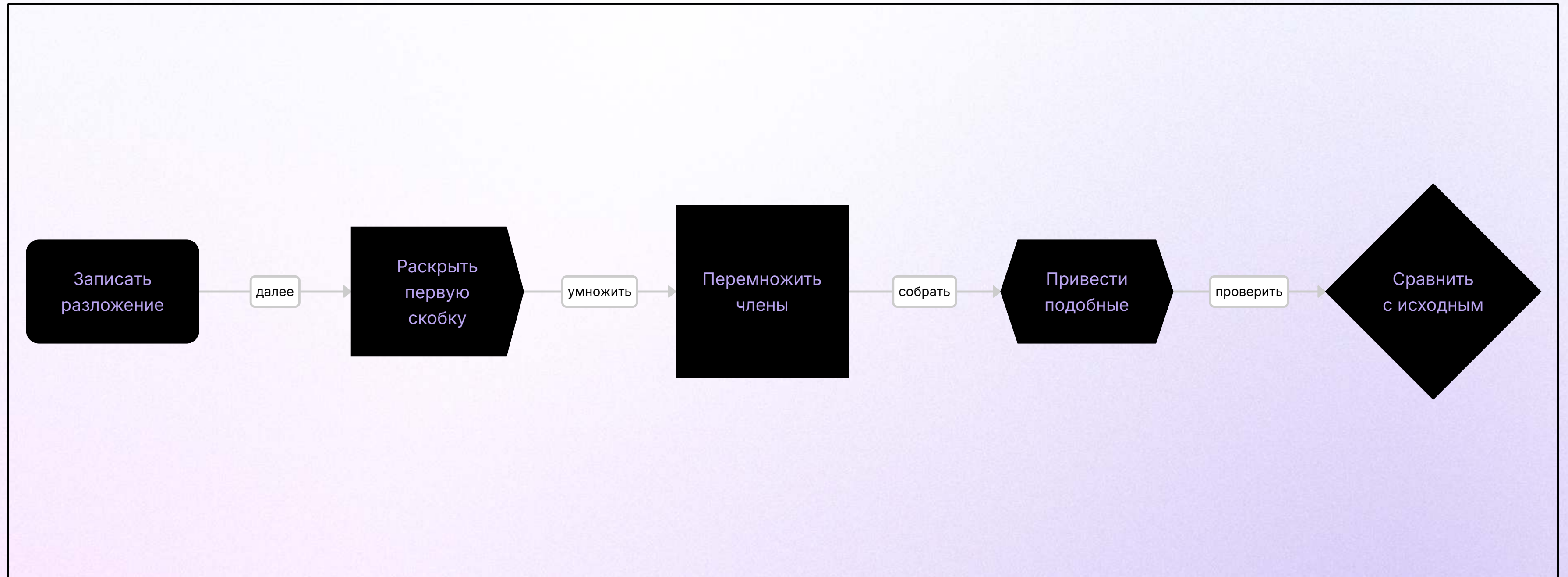


Проверяем результат

После сокращения полезно подставить простые значения букв или раскрыть скобки обратно. Так легче убедиться, что преобразование выполнено верно и ничего не потеряно.

Проверка правильности разложения

Алгоритм проверки через раскрытие скобок и сравнение с исходным выражением.



Мини-задача по теме урока

1 Выделяем кубы

Сначала представим $64p^3$ и $125q^3$ как кубы: $64p^3=(4p)^3$, а $125q^3=(5q)^3$. Это помогает сразу увидеть, какие множители войдут в первую скобку.

2 Записываем шаблон

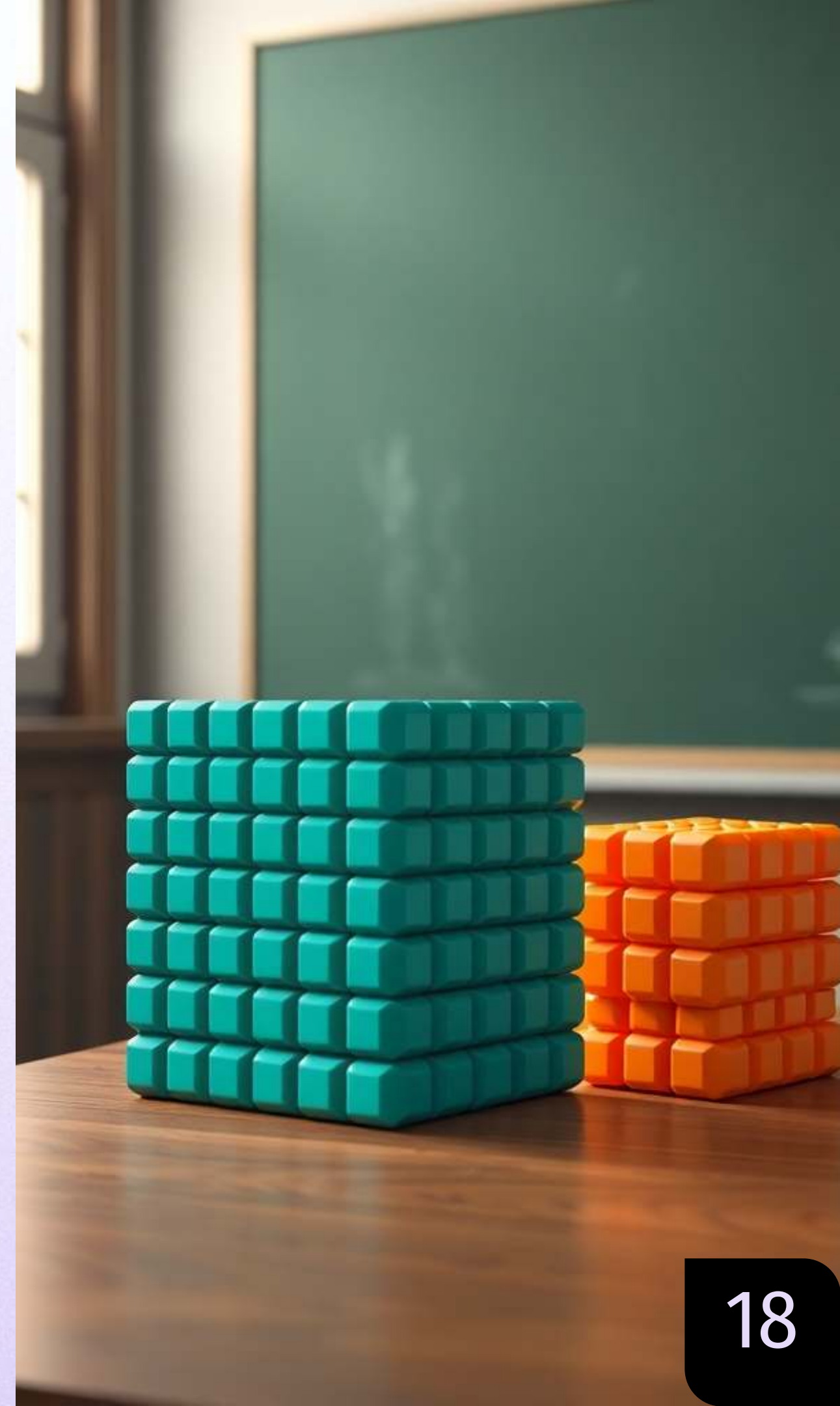
Для разности кубов первая скобка будет с минусом: $(4p-5q)$. Во второй скобке средний член получает плюс, поэтому нужен вид $16p^2+20pq+25q^2$.

3 Собираем ответ

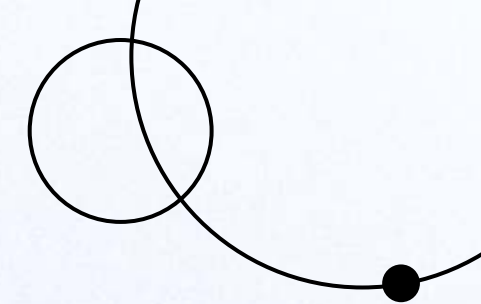
Получаем разложение $64p^3-125q^3=(4p-5q)(16p^2+20pq+25q^2)$. Здесь удобно заметить, что кубические корни определяют обе скобки без лишних преобразований.

4 Проверяем себя

Если раскрыть скобки обратно, все дополнительные члены сократятся, и останется исходное выражение. Такая проверка особенно полезна, когда коэффициенты большие и легко ошибиться.



Памятка по формулам суммы и разности кубов



Краткая памятка помогает быстро выбрать нужную формулу и не перепутать знаки при записи ответа.

Случай	Формула	Правило
Сумма	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$	В середине минус
Разность	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$	В середине плюс

Первая скобка повторяет знак между кубами, а средний член второй скобки всегда имеет противоположный знак; трёхчленная структура остаётся неизменной.



Главное о сумме и разности кубов

Формулы суммы и разности кубов помогают быстро раскладывать выражения на множители, упрощать дроби и проверять вычисления. Главное правило простое: знак во второй скобке всегда противоположен знаку между кубами.