

File Edit Search Help

Метрические соотношения в треугольнике и окружности

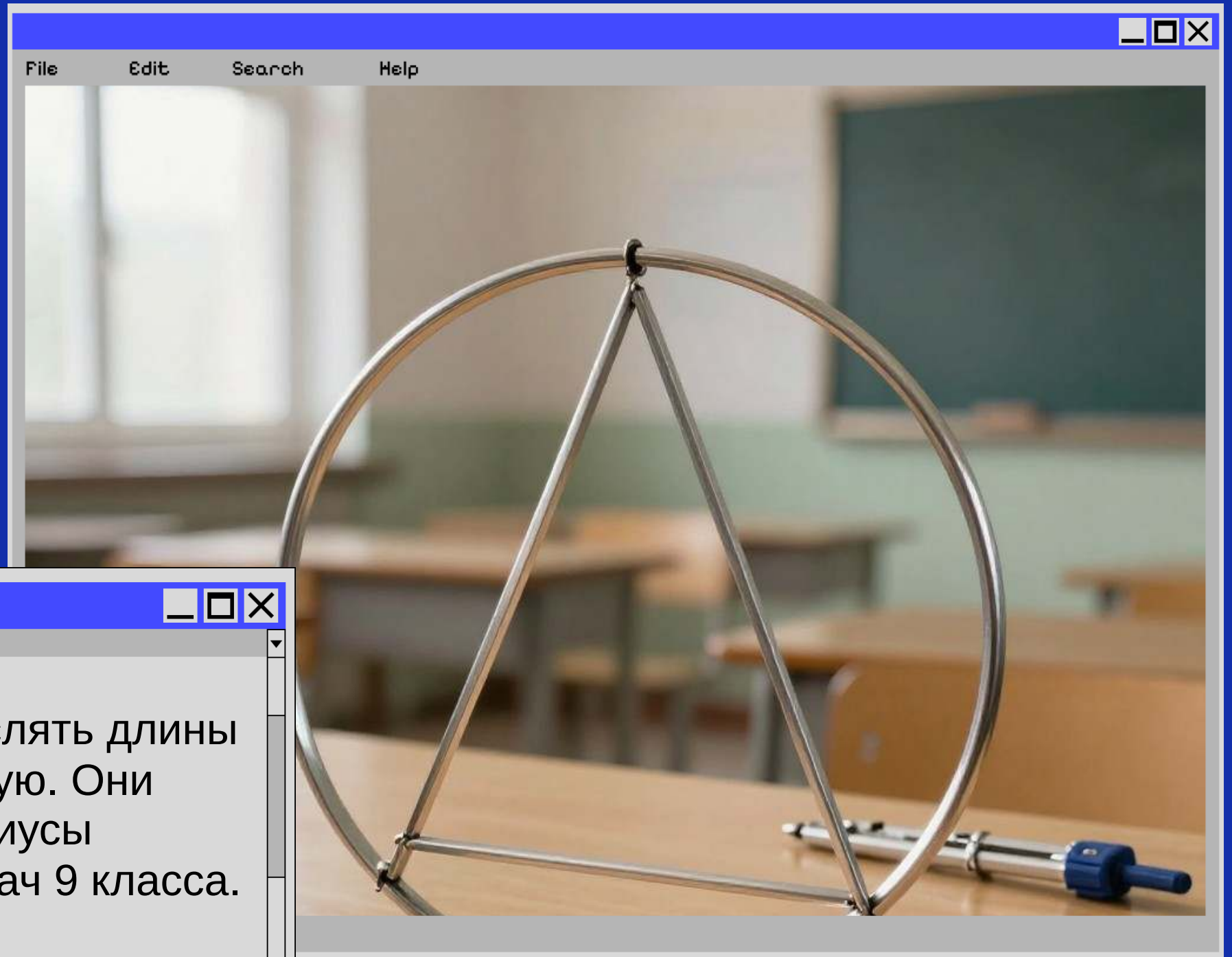
Формулы, которые позволяют находить неизвестные
элементы фигур.

Ok

Зачем нужны эти формулы в геометрии

Ok

Метрические соотношения помогают вычислять длины и углы там, где нельзя измерить их напрямую. Они связывают треугольники, окружности и радиусы в единую систему правил для решения задач 9 класса.



Что называют метрическими соотношениями



Связи длин

Метрические соотношения устанавливают точные зависимости между сторонами, отрезками и расстояниями. По нескольким известным величинам можно восстановить недостающую длину и проверить, согласуются ли элементы фигуры между собой.

Ok



Связи углов

Углы тоже входят в метрические формулы, потому что через них выражаются стороны и дуги. Особенно важны соотношения для вписанных и центральных углов, а также для теорем синусов и косинусов.

Ok



Элементы окружности

В окружности соотношения связывают хорды, радиусы, касательные и секущие. Эти зависимости позволяют находить длины без прямого измерения, если известны расположение точки и часть окружности.

Ok



Элементы треугольника

В треугольнике важны стороны, высоты, медианы, биссектрисы и радиусы описанной и вписанной окружностей. Через них выражаются площадь, углы и другие характеристики фигуры.

Ok

Описанная окружность треугольника

Через три вершины

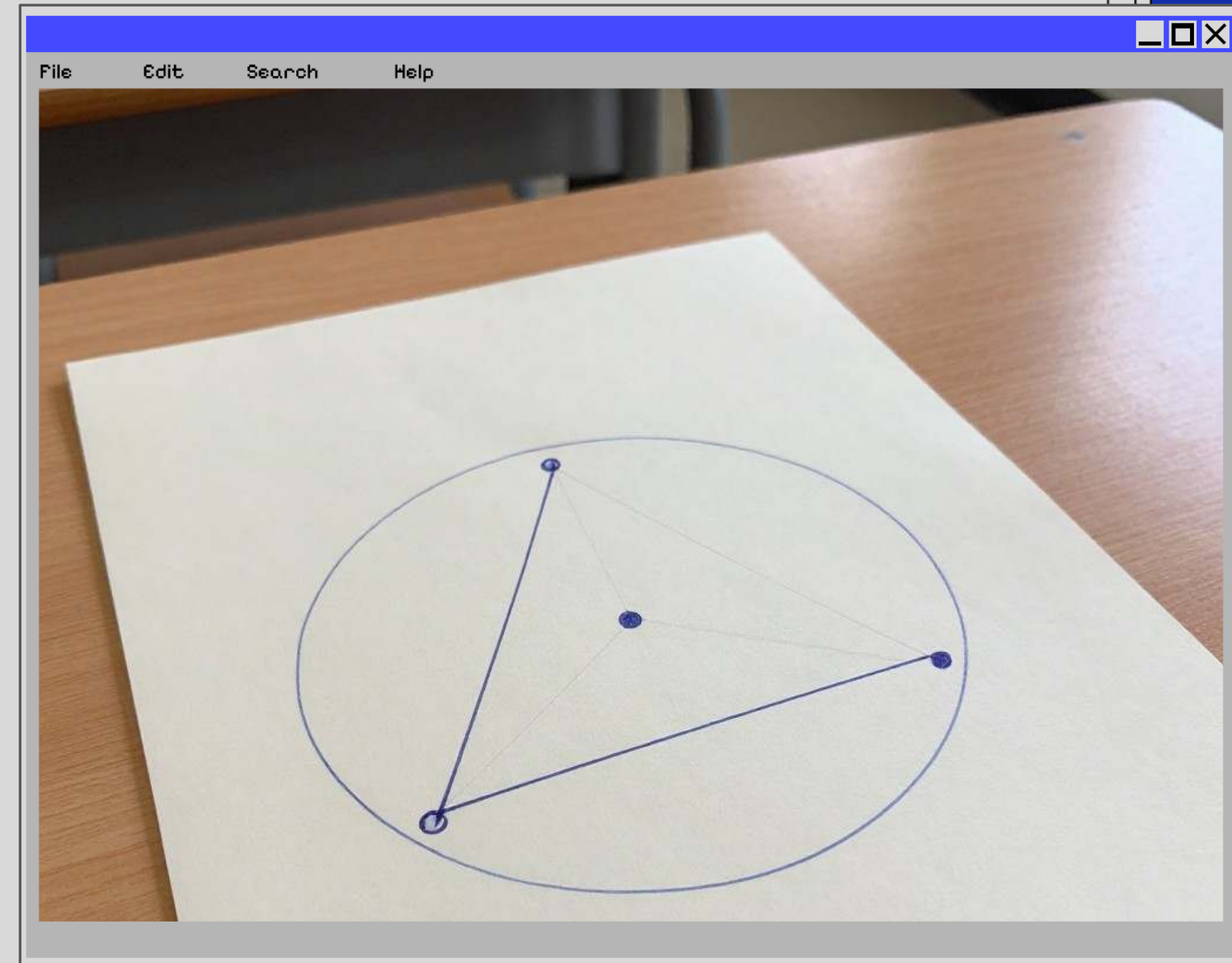
У любого невырожденного треугольника существует окружность, проходящая через все его вершины. Она помогает связать стороны и углы треугольника с одним общим центром и радиусом.

Как находят центр

Центр описанной окружности лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Эта точка равноудалена от всех вершин, поэтому расстояния до них одинаковы.

Радиус окружности

Расстояние от центра до любой вершины называется радиусом описанной окружности. Оно удобно для формул, где стороны треугольника связываются с углами и помогает решать задачи на вычисление.



Основные элементы треугольника и их роли

Эти элементы часто встречаются в задачах и связывают стороны, углы и площадь треугольника.

Каждый элемент помогает перейти от одной известной величины к другой: от стороны к площади, от угла к радиусу, от отрезка к полной фигуре.

Школьный курс геометрии, тема «Метрические соотношения в треугольнике»		
File Edit Search Help		
Элемент	Обозначение	Что даёт
Сторона	a	Длины и углы
Высота	h	Площадь
Медиана	m	Деление стороны
R, r	R/r	Радиусы

Теорема синусов

1

Основная запись

В любом треугольнике отношение стороны к синусу противолежащего угла одинаково для всех трёх сторон. Эта запись удобно объединяет стороны, углы и радиус описанной окружности в одной формуле.

2

Когда применять

Теорема особенно полезна, если известны два угла и одна сторона или если дана пара «сторона — противолежащий угол». Тогда можно быстро найти остальные элементы треугольника.

3

Связь с окружностью

Равенство с радиусом описанной окружности показывает, что треугольник и окружность тесно связаны. Это помогает решать задачи, где нужно связать длины сторон с дугами и общим радиусом.

Когда удобнее использовать теорему синусов, а когда — теорему косинусов

Обе теоремы решают похожие задачи, но стартовые данные для них разные. Выбор формулы зависит от того, какие элементы треугольника уже известны.

Синусы удобнее при наличии углов, косинусы — при данных сторонах. Правильный выбор экономит шаги и уменьшает риск ошибки.



90°

при таком угле формула превращается
в теорему Пифагора.

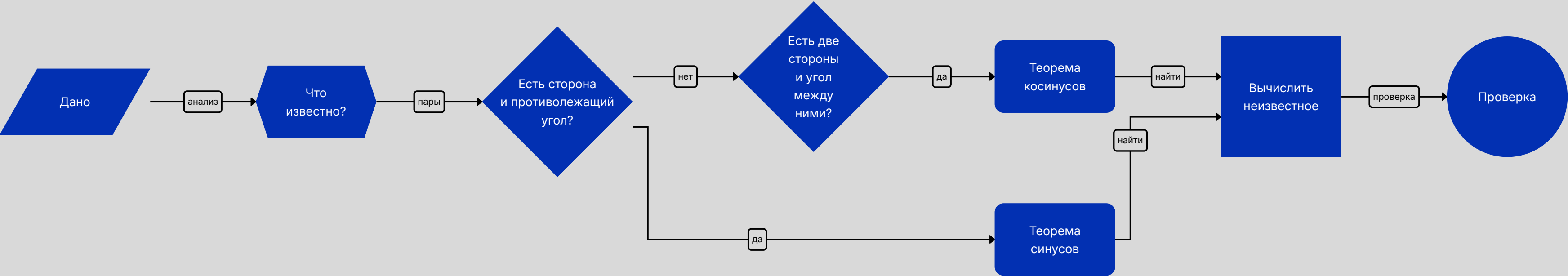
Это показывает, что теорема косинусов
обобщает известное правило
для прямоугольного треугольника
и работает для любого угла.

Ок

Порядок решения задачи на треугольник

Алгоритм выбора формулы зависит от того, какие данные уже известны.

Ok



Центральные и вписанные углы

Центральный угол

Центральный угол равен дуге, на которую он опирается. Поэтому по нему удобно сразу находить величину дуги и сравнивать разные части окружности без прямого измерения.

Вписанный угол

Вписанный угол всегда равен половине соответствующей дуги. Из-за этого один и тот же дуговой участок можно связать с несколькими углами и быстро получить нужное значение.

Одна дуга — равные углы

Если два вписанных угла опираются на одну дугу, они равны. Это свойство помогает доказывать равенство углов и решать задачи, где фигура построена на окружности.

Отрезок, который связывает точки окружности

Когда хорда видна как «мост» внутри круга

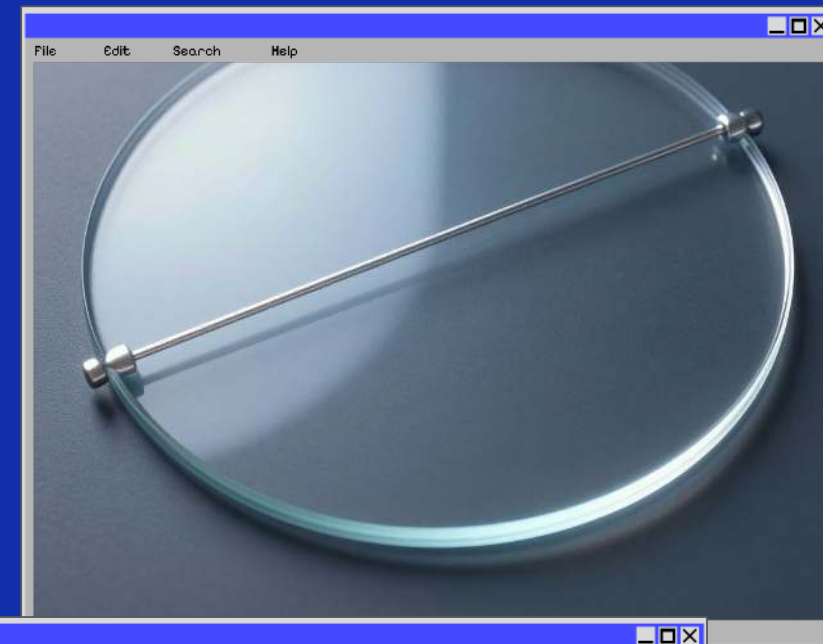
Хорда соединяет две точки окружности и образует внутри фигуры прямой «мост». По её длине можно судить о размере дуги, на которую она опирается, и о положении хорды относительно центра.

Две равные хорды — два одинаковых результата

Если хорды равны, значит, они стягивают равные дуги и находятся на одинаковом расстоянии от центра. Это удобно в задачах, где длину отрезка нужно восстановить по свойствам окружности, а не измерять напрямую.

Перпендикуляр из центра помогает найти середину

Когда из центра к хорде проводят перпендикуляр, он делит хорду пополам. Такое построение часто превращает сложную задачу в простую: достаточно найти одну половину, чтобы восстановить весь отрезок.



Какие свойства хорд и дуг чаще всего используют

Свойство	Формулировка	Что найти
Равные хорды	Равные дуги	Дугу
Перпендикуляр к хорде	Делит пополам	Середину
Равные дуги	Равные хорды	Хорду
От центра до хорды	Чем ближе, тем длиннее	Расстояние

Таблица показывает, как связаны хорды, дуги и расстояние от центра. Эти свойства помогают находить длины отрезков и сравнивать элементы окружности без прямого измерения.

Положение хорды относительно центра напрямую влияет на её длину. Связь с дугами позволяет переходить от углов к отрезкам и обратно.

Три опорных факта о касательной



Точка касания

Касательная касается окружности только в одной точке. Эта точка служит опорой для построения углов и для нахождения радиуса, проведённого к ней.



Перпендикуляр к радиусу

Радиус, проведённый в точку касания, всегда перпендикулярен касательной. Это свойство помогает сразу распознавать прямой угол в чертеже и упрощает вычисления.



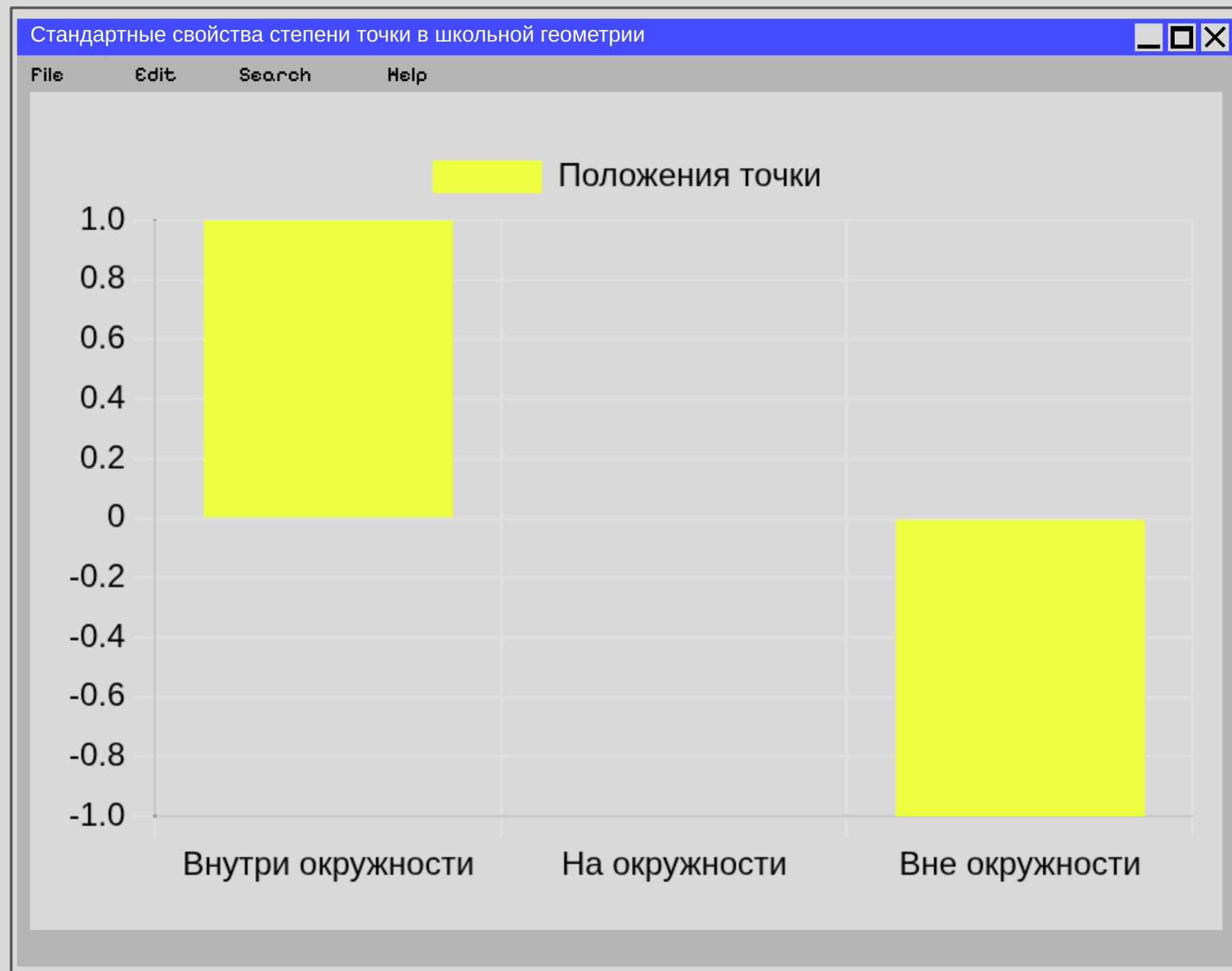
Две касательные из одной точки

Если из внешней точки проведены две касательные, их отрезки равны. Благодаря этому можно найти неизвестную длину одного отрезка через другой без дополнительных измерений.

Степень точки и положение относительно окружности

Разные положения точки задают разные связи с окружностью. Для внешней точки особенно важны произведения отрезков секущих и касательной.

Чем дальше точка от окружности, тем полезнее произведения отрезков. Для внешних задач именно это правило позволяет находить неизвестные длины.



Как работает степень точки

1 Сначала выбирают линию

Из одной точки к окружности проводят касательную или секущую. Так появляется набор отрезков, между которыми можно установить точную связь.

2 Затем применяют формулу

Для касательной и секущей квадрат длины касательной равен произведению всей секущей на её внешнюю часть. Это позволяет вычислять неизвестный отрезок по уже данным.

3 После этого проверяют ответ

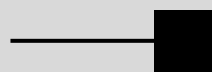
Полученное значение сравнивают с рисунком и условиями задачи. Если длины согласуются, степень точки использована верно, а решение можно считать завершённым.

Как формулы в окружности выстраиваются в задаче

Ok

1. Угол в центре

Сначала находят центральный угол и связанную с ним дугу. Это помогает понять, какой участок окружности соответствует данному отрезку.



2. Хорда и радиус

Затем связывают хорду с радиусом и углом. По этой зависимости удобно восстанавливать длину хорды или сравнивать разные хорды.

3. Внешняя точка

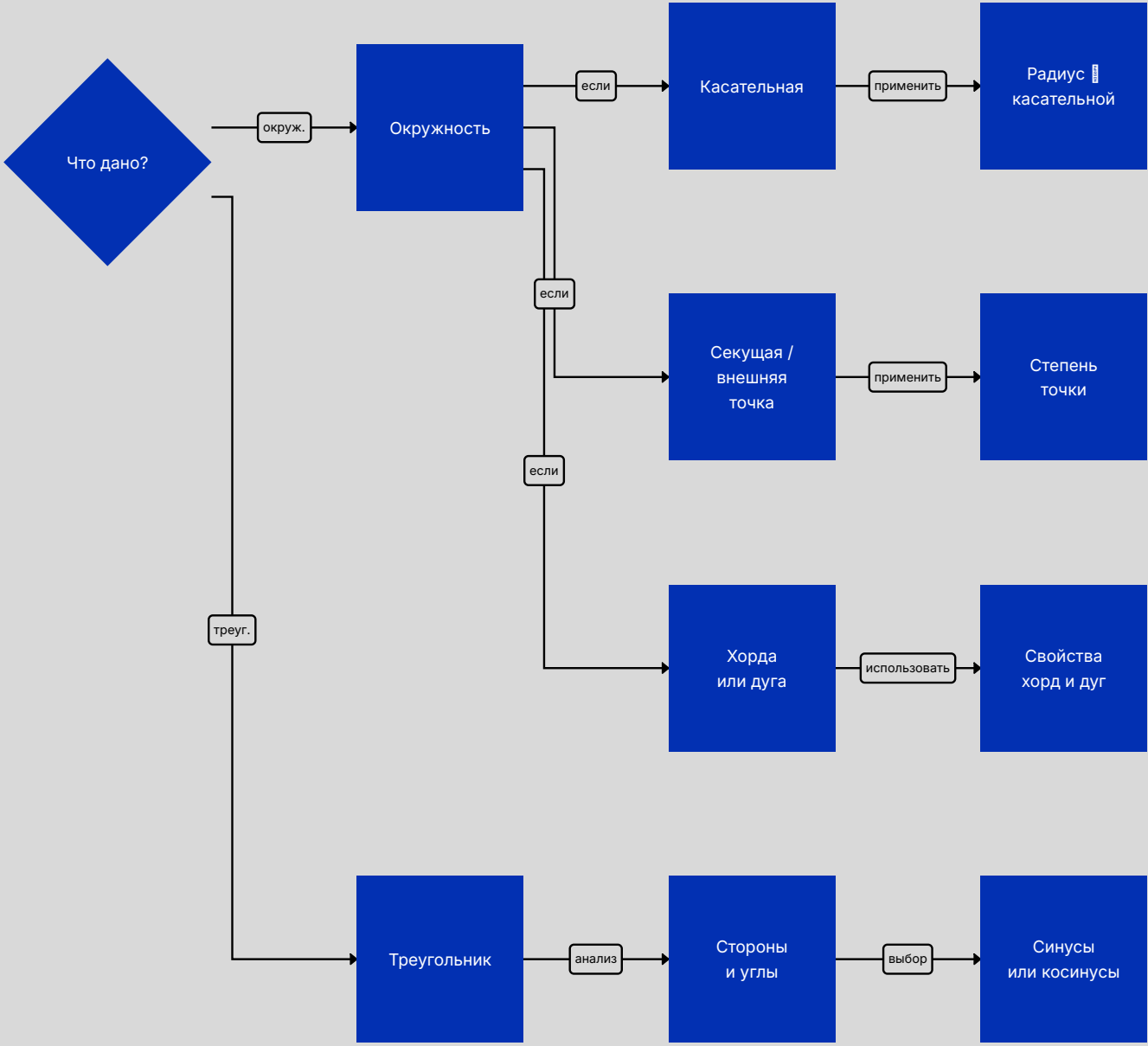
Если в задаче есть касательная или секущая, переходят к произведениям отрезков. Так находят неизвестные длины без прямого измерения всей фигуры.



Как выбрать нужное свойство или теорему

Схема помогает по условию задачи быстро определить, какая формула подходит лучше всего.

Ok



На что чаще всего ошибаются в решении

Путают виды углов

Центральный и вписанный углы выглядят похоже, но связаны с дугой по-разному. Если не учесть это различие, можно получить неверную величину и выбрать не ту формулу.

Нет пары для синусов

Теорема синусов работает надёжно, когда известна сторона и противолежащий ей угол. Без такой пары уравнение часто не даёт нужного пути к решению.

Забывают про перпендикуляр

Радиус, проведённый в точку касания, образует прямой угол с касательной. Если это не заметить на чертеже, легко ошибиться в построении и вычислениях.

Неверно читают обозначения

Путаница в буквах сторон и углов приводит к ошибкам даже при правильной формуле. Поэтому важно сначала аккуратно подписать рисунок, а уже потом считать.

Где нужны метрические соотношения на практике



Черчение и архитектурный эскиз

На чертеже важно точно переносить размеры и углы, даже если объект нельзя измерить линейкой целиком. Метрические соотношения помогают восстановить скрытые отрезки по уже известным данным и сделать построение аккуратным.

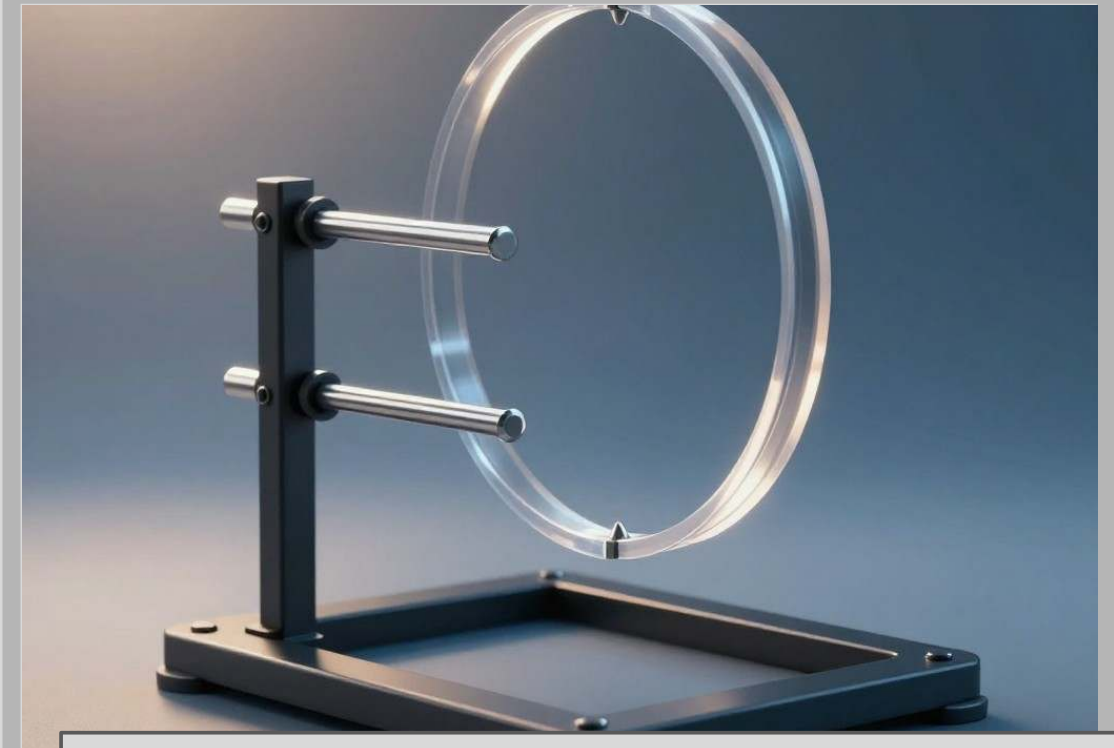
Ok



Навигация и ориентирование

При работе с картой или схемой расстояния часто находят не напрямую, а через геометрические связи. Формулы для треугольника и окружности позволяют оценивать путь, направление и взаимное положение объектов.

Ok



Инженерные расчёты и модели

В инженерных задачах геометрия описывает детали, дуги, кривые и точки соприкосновения. Метрические соотношения делают такие расчёты надёжными: неизвестную величину можно найти по нескольким известным параметрам модели.

Ok

Геометрия, которая считает и объясняет

Ok

Метрические соотношения связывают стороны, углы, хорды и радиусы в единую систему. Они помогают не только решать школьные задачи, но и понимать, как устроены треугольник и окружность.