

# Прямая, перпендикулярная плоскости, и симметрия относительно плоскости

Перпендикуляр, проекции и отражение помогают находить расстояния и распознавать симметрию в пространстве.

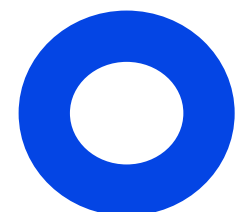


# Место темы в курсе геометрии 10 класса



Стереометрия рассматривает взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Перпендикуляр задаёт кратчайший путь от точки до плоскости и помогает находить углы и проекции. Отражение относительно плоскости сохраняет ключевые геометрические величины и связывает фигуры по разные стороны.

# Определение перпендикулярности прямой и плоскости



Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна каждой прямой этой плоскости, проходящей через точку пересечения.



Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости и проходящим через точку пересечения, то она перпендикулярна всей плоскости. Это определение служит базой для доказательств.



Точка пересечения прямой и плоскости называется основанием перпендикуляра. Именно в ней «собирается» прямой угол в пространственном чертеже.

# Признак перпендикулярности прямой плоскости

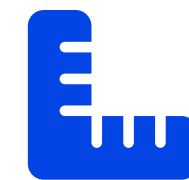
Дана прямая  $l$  и плоскость  $\alpha$ ; опираемся на прямой угол относительно двух пересекающихся прямых в плоскости.

# Свойства перпендикуляра к плоскости



## Единственность перпендикуляра

Через любую точку пространства можно провести ровно одну прямую, перпендикулярную данной плоскости. Это делает построения и вычисления однозначными.



## Кратчайшее расстояние

Отрезок перпендикуляра от точки до плоскости даёт кратчайшее расстояние от точки до плоскости. Любая другая прямая до плоскости оказывается длиннее.



## Перпендикуляр короче наклонных

Если из той же точки провести к плоскости наклонную, то её длина больше длины перпендикуляра. Так проявляется «минимальность» прямого пути.



# Перпендикуляр, наклонная и её проекция

Таблица связывает три отрезка: перпендикуляр, наклонную и проекцию наклонной на плоскость. Главная связь задаётся теоремой Пифагора.

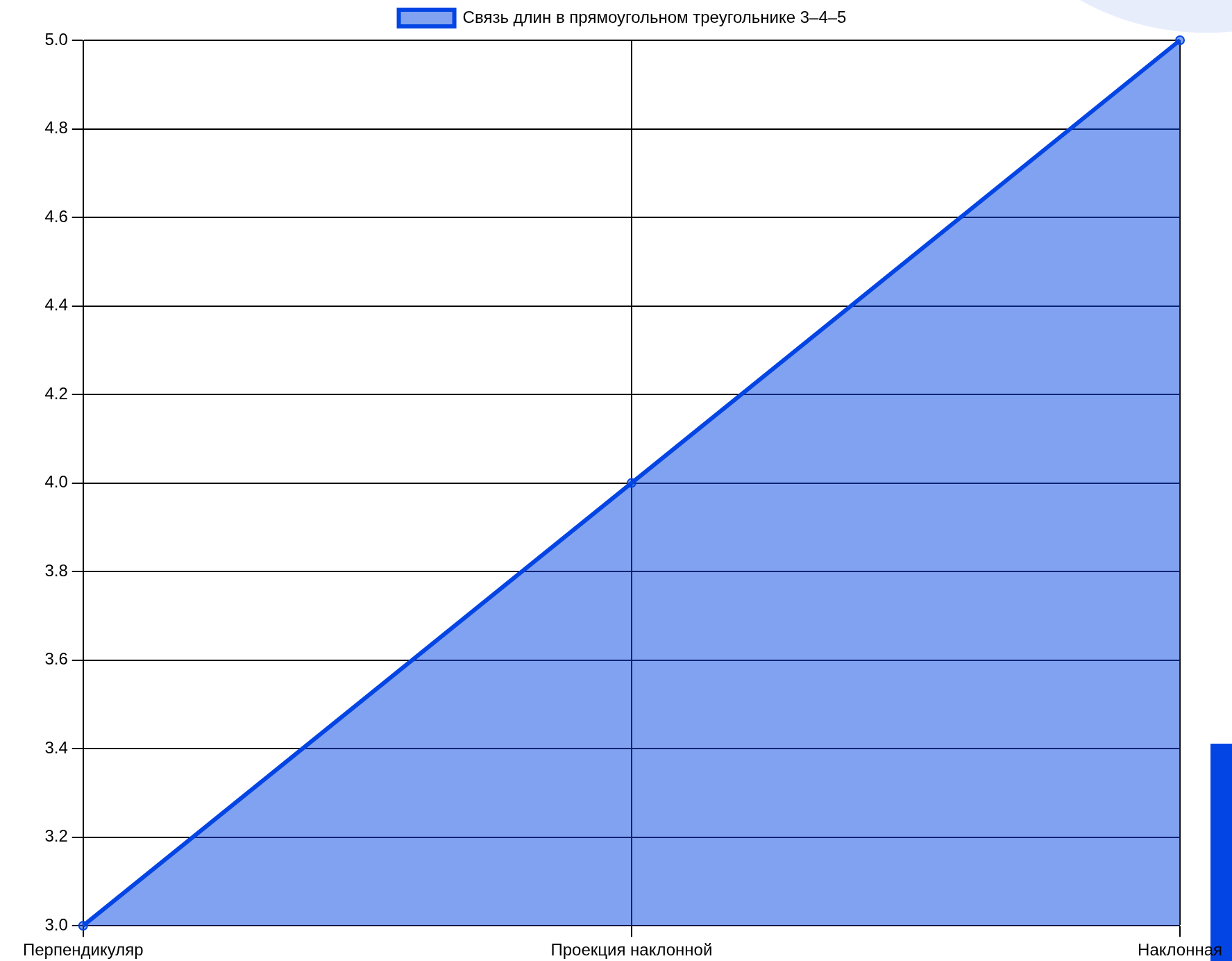
Перпендикуляр всегда короче наклонной, а длины наклонной, перпендикуляра и проекции образуют соотношение по теореме Пифагора.

| Объект             | Определение                                                         | Обозначение | Ключевое свойство |
|--------------------|---------------------------------------------------------------------|-------------|-------------------|
| Перпендикуляр      | Отрезок из точки к плоскости под прямым углом                       | АН          | Кратчайший        |
| Наклонная          | Отрезок из той же точки к другой точке плоскости                    | АВ          | Длиннее           |
| Проекция наклонной | Отрезок от основания перпендикуляра до конца наклонной на плоскости | НВ          | Связь с длинами   |

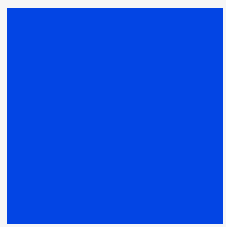
# Сравнение перпендикуляра, наклонной и проекции

В примере прямой угол находится между перпендикуляром и проекцией, поэтому длины согласуются с геометрическим смыслом проецирования.

Перпендикуляр — минимальный отрезок, наклонная — максимальный, а проекция занимает промежуточное положение; численный пример подтверждает теорему Пифагора.



Пример из условия: 3–4–5 (теорема Пифагора)



# Построение перпендикуляра в пространстве

## Шаг 1: задать точку и плоскость

Пусть дана точка вне плоскости и сама плоскость. Выбирают в плоскости две пересекающиеся прямые, каждая из которых проходит через основание предполагаемого перпендикуляра. Далее перпендикуляр «настраивают» через прямые.

## Шаг 2: проверить прямой угол в плоскости

Построение опирается на проверку прямого угла с каждой выбранной прямой. На чертеже перпендикуляр обычно отмечают значком прямого угла у основания, а для вычислений используют вспомогательные треугольники и теорему Пифагора.





# $90^\circ$

Если угол достигает  $90^\circ$ , прямая перпендикулярна плоскости и даёт прямой «короткий путь».

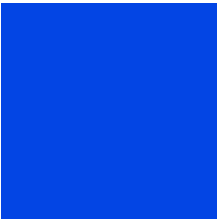
Определения и свойства из темы о перпендикулярности и проекциях

Угол между прямой и плоскостью определяют через угол между прямой и её ортогональной проекцией на плоскость.



# Взаимное расположение прямой и плоскости

Алгоритм различения трёх случаев взаимного расположения по наличию общих точек и по углу с плоскостью.



# Определение симметрии относительно плоскости

## 01

Точки  $A$  и  $A'$  называют симметричными относительно плоскости  $\alpha$ , если плоскость  $\alpha$  проходит через середину отрезка  $AA'$  и перпендикулярна этому отрезку.

## 02

Любая точка, принадлежащая плоскости симметрии, не меняет своего положения: её образ совпадает с исходной точкой, поскольку расстояние до плоскости равно нулю.

## 03

Отражение относительно плоскости — движение пространства: оно сохраняет длины, углы и поэтому фигуры остаются равными; при повторном применении образ возвращается на исходное место.

# Свойства отражения относительно плоскости

| Свойство                 | Результат отражения   |
|--------------------------|-----------------------|
| Расстояния               | сохраняются           |
| Углы                     | сохраняются           |
| Площади                  | сохраняются           |
| Объёмы                   | сохраняются           |
| Принадлежность плоскости | точки неподвижны      |
| Ориентация               | меняется левое/правое |

Симметрия относительно плоскости сохраняет ключевые метрические характеристики, а точки, лежащие в самой плоскости, остаются неподвижными. Изменение связано прежде всего с «переходом» изображения по другую сторону плоскости.

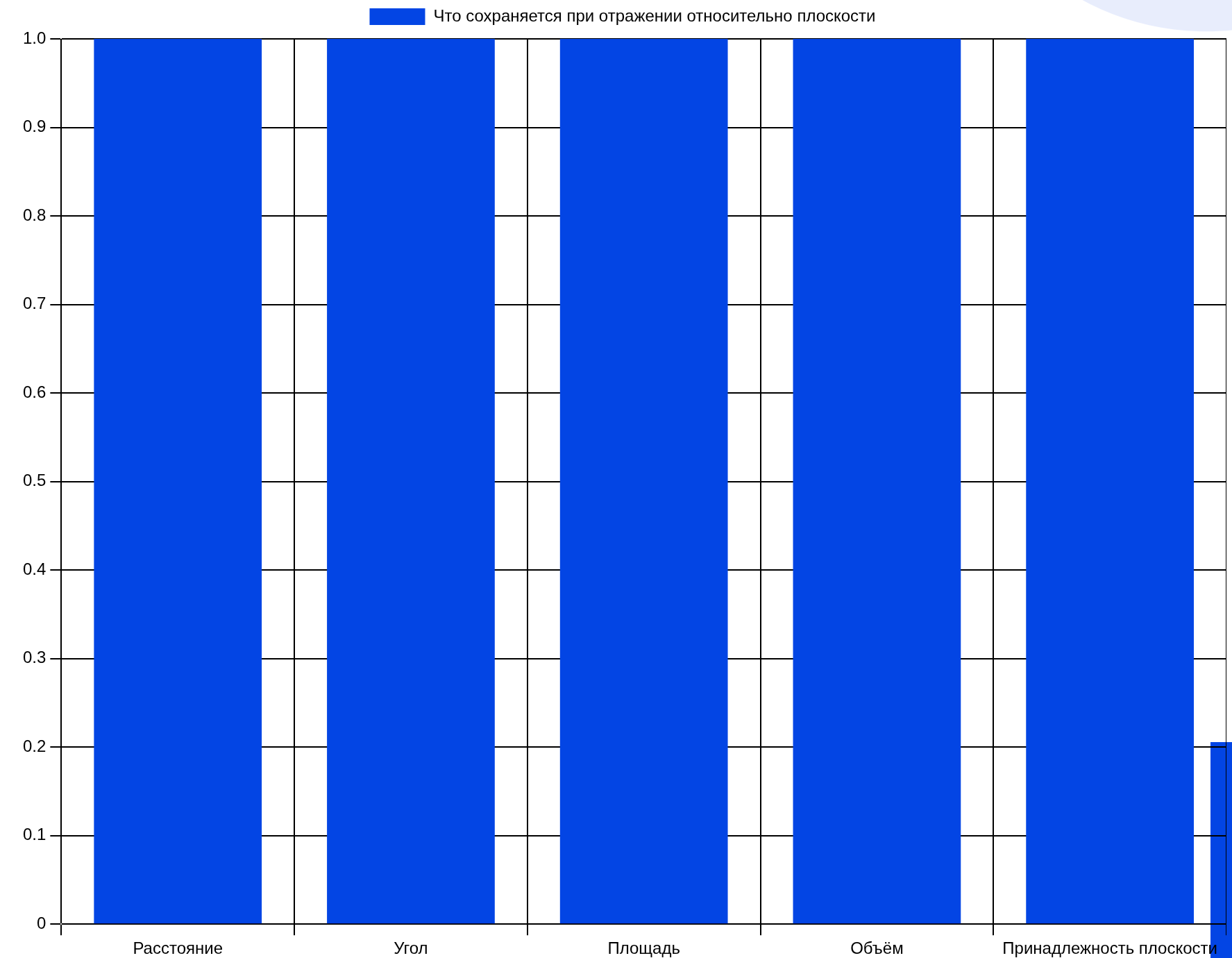
Отражение является движением: оно сохраняет размеры и угловую структуру фигур, при этом «переворачивает» расположение по разные стороны плоскости.

Изложение свойств отражения в рамках  
школьного курса стереометрии

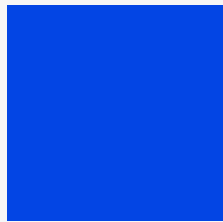
# Какие величины сохраняет симметрия относительно плоскости

Первые четыре характеристики задают метрическую структуру фигуры, поэтому после отражения она остаётся равной; на плоскости симметрии точки не смещаются.

Диаграмма подчёркивает: отражение сохраняет метрические величины, а изменение касается лишь того, по какую сторону плоскости окажется образ.



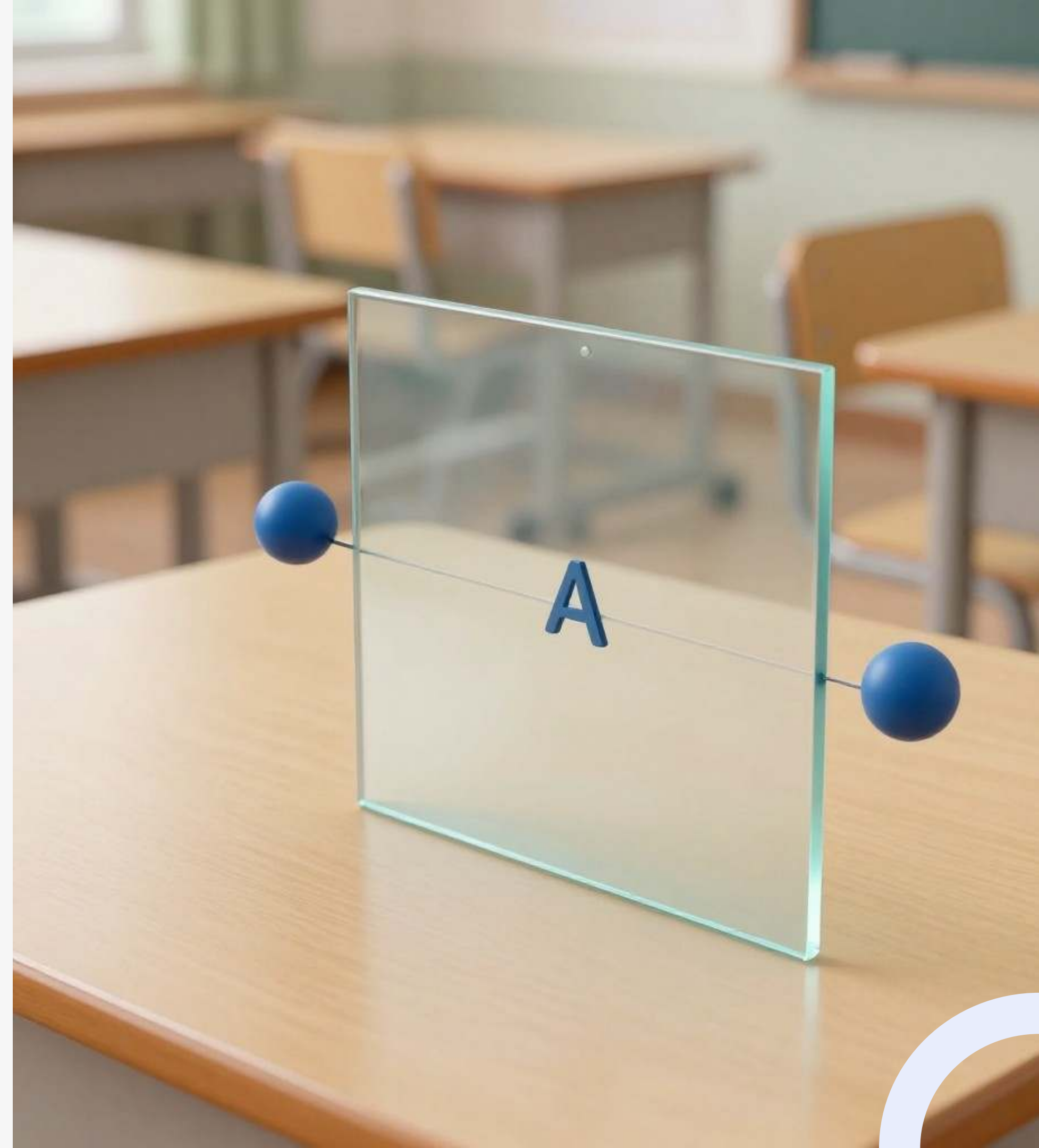
Учебные материалы по геометрии (стереометрия),  
раздел «симметрия относительно плоскости»



# Образ точки и отрезка при отражении

Точка  $A$  и её образ  $A'$  располагаются по разные стороны плоскости симметрии  $\alpha$  так, что сама плоскость проходит через середину отрезка  $AA'$ . Этот отрезок перпендикулярен плоскости.

Так как расстояния от  $A$  и  $A'$  до плоскости равны, отражение переводит отрезок в равный ему отрезок; для отрезка, пересекающего плоскость, точки пересечения остаются неподвижными.



# Образ фигуры и тела при плоской симметрии

1. При отражении треугольник, многоугольник и любая плоская фигура переходят в равные фигуры: соответствующие вершины и стороны задают тот же набор длин и углов.
2. Если фигура лежит в плоскости симметрии, то отражение оставляет её без изменения: она совпадает сама с собой, поскольку все её точки принадлежат плоскости  $\alpha$ .
3. Для симметричных фигур равны соответствующие стороны и углы, а площади совпадают, потому что отражение является движением и сохраняет метрические характеристики.
4. Для пространственных тел образ остаётся равным по объёму: сохраняется объём, а изменяется только относительное расположение по разные стороны плоскости симметрии.

# Алгоритм построения симметричной точки

Построение образа  $A'$  относительно плоскости  $\alpha$  по шагам чертежа



# Координатная запись отражения относительно координатных плоскостей

Отражение относительно плоскости  $xOy$  задаётся заменой координаты  $z$  на противоположную: точка  $(x, y, z)$  переходит в  $(x, y, -z)$ .

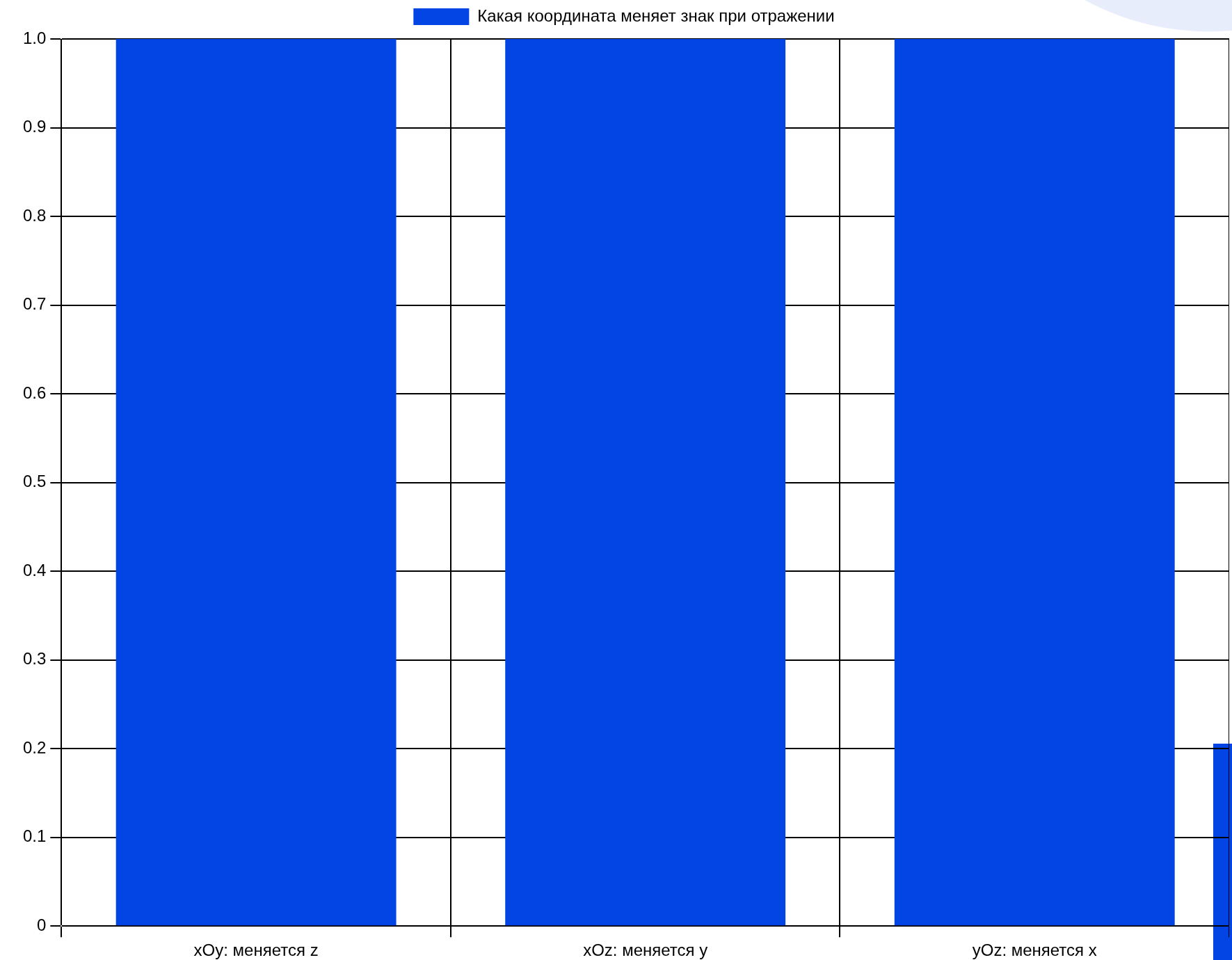
Отражение относительно плоскости  $xOz$  меняет знак координаты  $y$ :  $(x, y, z)$  преобразуется в  $(x, -y, z)$ . Аналогично для плоскости  $yOz$  меняется знак  $x$ .

Для отражения в координатных плоскостях меняется знак только той координаты, которая перпендикулярна плоскости отражения; две остальные координаты сохраняют свои значения.

# Изменение координат при отражении в координатных плоскостях

При отражении относительно координатной плоскости знак меняется только у координаты, перпендикулярной этой плоскости; две другие координаты остаются без изменений.

Диаграмма подтверждает правило «одна меняется — две сохраняются»: именно перпендикулярное направление определяет геометрию преобразования.



Применение формул отражения в декартовой системе координат (школьный курс)

# Типичные задачи по теме и способы их решения



## Расстояние от точки до плоскости

Нужно найти кратчайшее расстояние: проводят перпендикуляр к плоскости, используют основание перпендикуляра и, при необходимости, теорему Пифагора для связи длин на чертеже.



## Построение перпендикуляра и доказательства

Перпендикулярность проверяют через признак: если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна всей плоскости, что позволяет обосновать прямой угол.



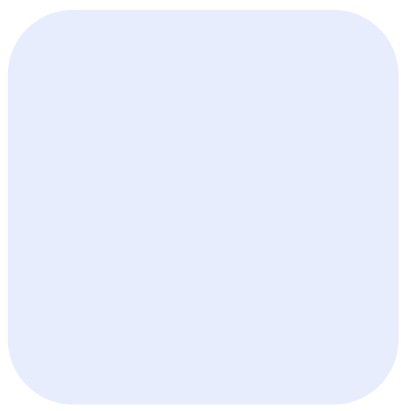
## Угол между прямой и плоскостью

Угол находят как угол между прямой и её ортогональной проекцией на плоскость. Для перпендикулярной прямой получаем  $90^\circ$ , а при параллельности —  $0^\circ$ .



## Координаты и симметричная точка

При решении удобно менять одну координату на противоположную в зависимости от плоскости отражения. Затем строят образ и проверяют равенство расстояний до плоскости симметрии.



# Итоги: как «работают» перпендикуляр и плоская симметрия

Перпендикуляр задаёт кратчайшее расстояние до плоскости и помогает определять угол между прямой и плоскостью. Признак перпендикулярности через две пересекающиеся прямые служит для строгих доказательств, а симметрия — для сохранения метрик с «перемещением» по сторонам плоскости.