

Функция $y = \cos x$: свойства и график

$\cos x$ объединяет геометрию и алгебру:
окружность задаёт определение, график
показывает колебания.

Почему косинус изучают в 10 классе

Косинус связывает измерение углов в радианах с координатами точки на окружности. Поэтому в программе он «склеивает» геометрию, алгебру и чтение графиков, помогая решать уравнения и строить периодические зависимости.



Определение косинуса через единичную окружность

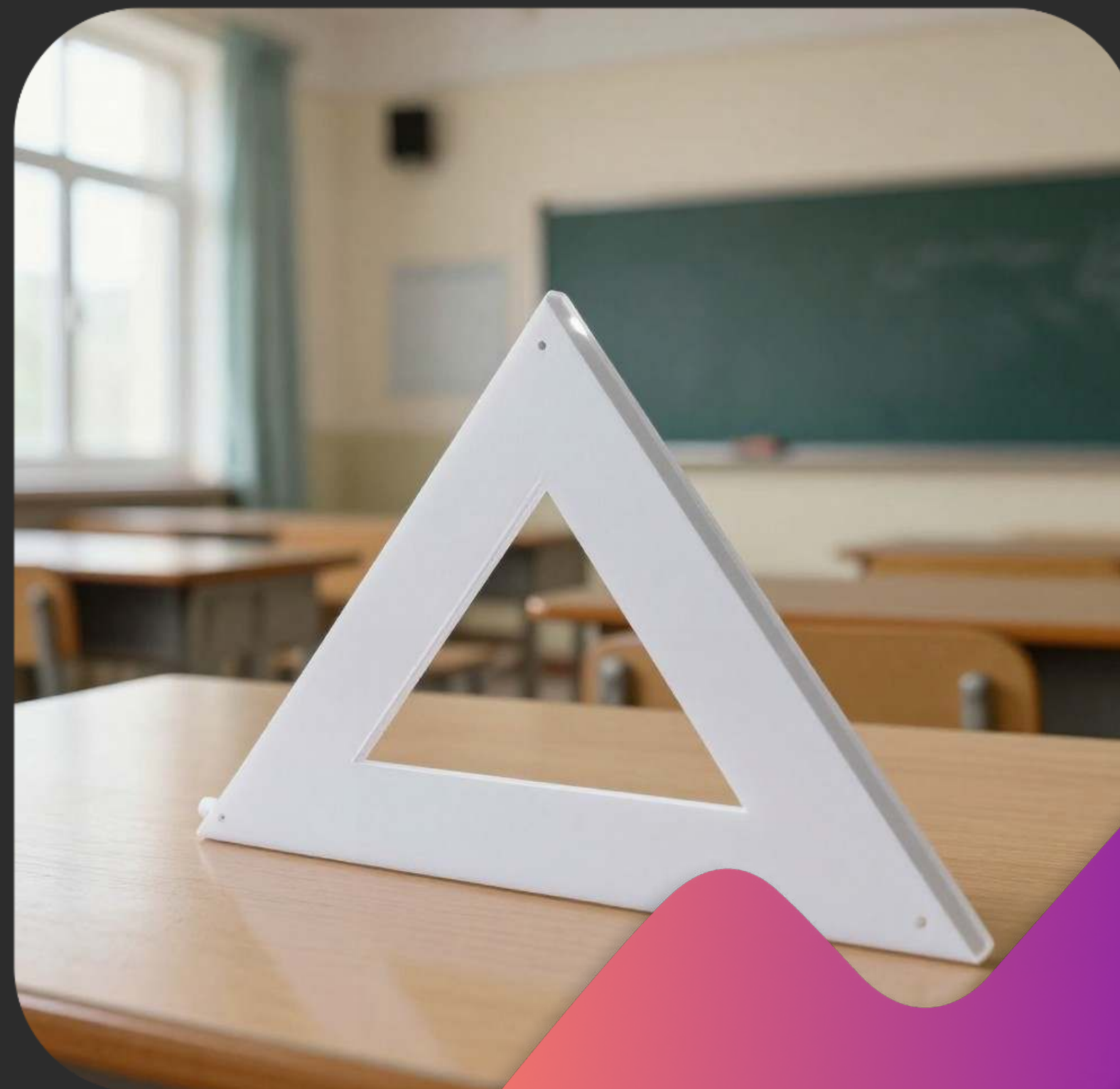
Рассмотрим единичную окружность. Для любого действительного числа x $\cos x$ равен абсциссе точки, полученной поворотом на угол x от оси Ox .

Так, при $x = 0$ точка находится на правом конце окружности, поэтому $\cos 0 = 1$; при $x = \pi/2$ — вверху окружности, поэтому $\cos(\pi/2) = 0$.

Дальше: при $x = \pi$ получаем $\cos \pi = -1$, при $x = 3\pi/2$ — $\cos(3\pi/2) = 0$, а при $x = 2\pi$ снова правый край, значит $\cos 2\pi = 1$. Определение работает для любых углов.

Косинус в прямоугольном треугольнике

- В прямоугольном треугольнике косинус острого угла α равен отношению прилежащего катета к гипотенузе: $\cos \alpha = a/c$. Именно это связывает тригонометрию с измерениями в геометрии.
- Формула справедлива только для острых углов, зато даёт наглядную интерпретацию: чем ближе угол к нулю, тем ближе $\cos \alpha$ к 1, и наоборот. На рисунке видны катеты, гипотенуза и угол α .



Основные значения $\cos x$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1

Стандартные значения на единичной окружности (школьный курс)

Опорные точки на единичной окружности позволяют быстро строить график и проверять вычисления.

$\cos x$ всегда лежит в пределах $[-1; 1]$ и проходит через характерные значения с шагом $\pi/2$, что помогает уверенно восстанавливать форму графика.

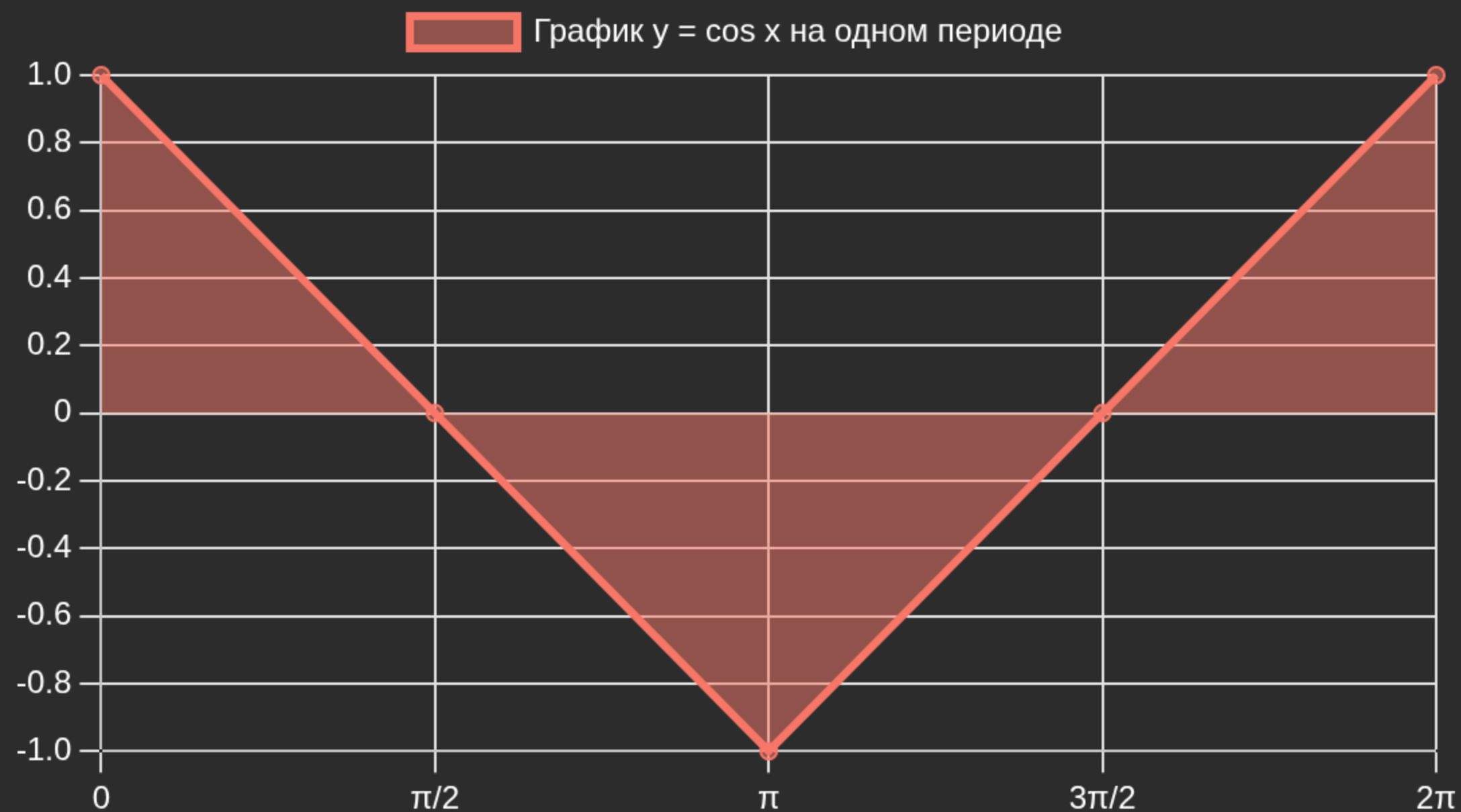
Область определения и область значений

Область определения функции $y = \cos x$ — все действительные числа: косинус задаётся для любого угла, а поворот на угол x можно выполнить при любом x .

Область значений ограничена: y принимает только значения от -1 до 1 включительно, потому что абсцисса точки единичной окружности не выходит за рамки отрезка $[-1; 1]$.

Это ограничение не «исчезает» при смене x : как бы ни возрастал или убывал аргумент, точка остаётся на единичной окружности, а значит, её координата по оси Ox всегда в этих пределах.

График косинуса на одном периоде



Построение по опорным значениям на единичной окружности; учебные таблицы значений (школьный курс).

Значения в серединах интервалов определяют плавную «волнообразность»: $\cos x$ меняется непрерывно и предсказуемо между опорными точками.

Полученная на $[0; 2\pi]$ форма повторяется без изменения высоты: амплитуда равна 1, а минимумы и максимумы возникают в строго заданных точках.

Чётность функции $y = \cos x$

Косинус — чётная функция: для любого x выполняется равенство $\cos(-x) = \cos x$. Это означает, что знак аргумента не влияет на значение функции.

График поэтому симметричен относительно оси Oy : точки с противоположными абсциссами имеют одинаковые ординаты. Симметрия сразу сокращает объём вычислений.

Если вы уже нашли $\cos x$ для положительного x , то значение для $-x$ находится автоматически. При построении графика это помогает быстро восстановить левую половину.

У косинуса основной период равен 2π : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Это свойство делает его удобной моделью для циклических процессов, где всё повторяется регулярно.

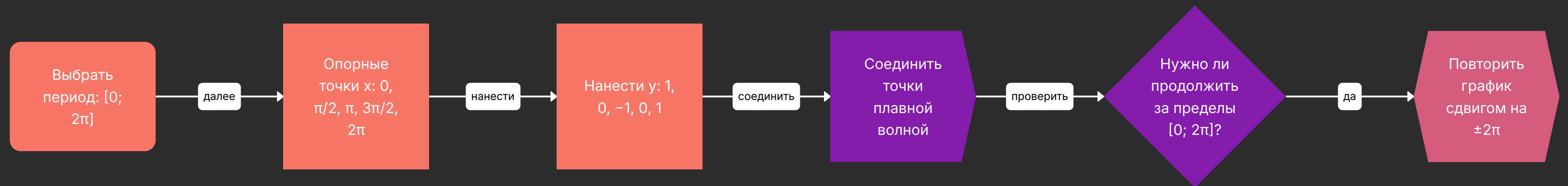
2π

После сдвига аргумента на этот промежуток график возвращается к исходному положению.

Определение косинуса через единичную окружность и периодичность поворота на полный угол.

Построение графика $y = \cos x$

Схема построения на основе опорных точек и периодичности с шагом 2π



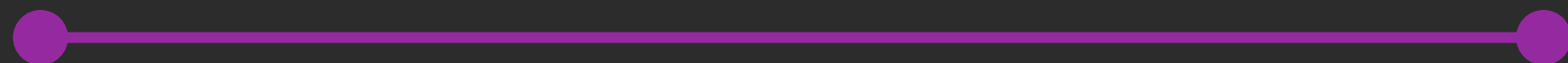
Промежутки возрастания и убывания

Отрезок $[0; \pi]$: убывание

При x , идущем от 0 к π , функция $y = \cos x$ плавно уменьшается: от 1 до -1 . Это участок, где значение аргумента растёт, а высота графика опускается.

Отрезок $[\pi; 2\pi]$: возрастание

При x , идущем от π к 2π , функция $y = \cos x$ плавно возрастает: от -1 до 1. На этом участке график «поднимается», возвращая значения к максимуму.



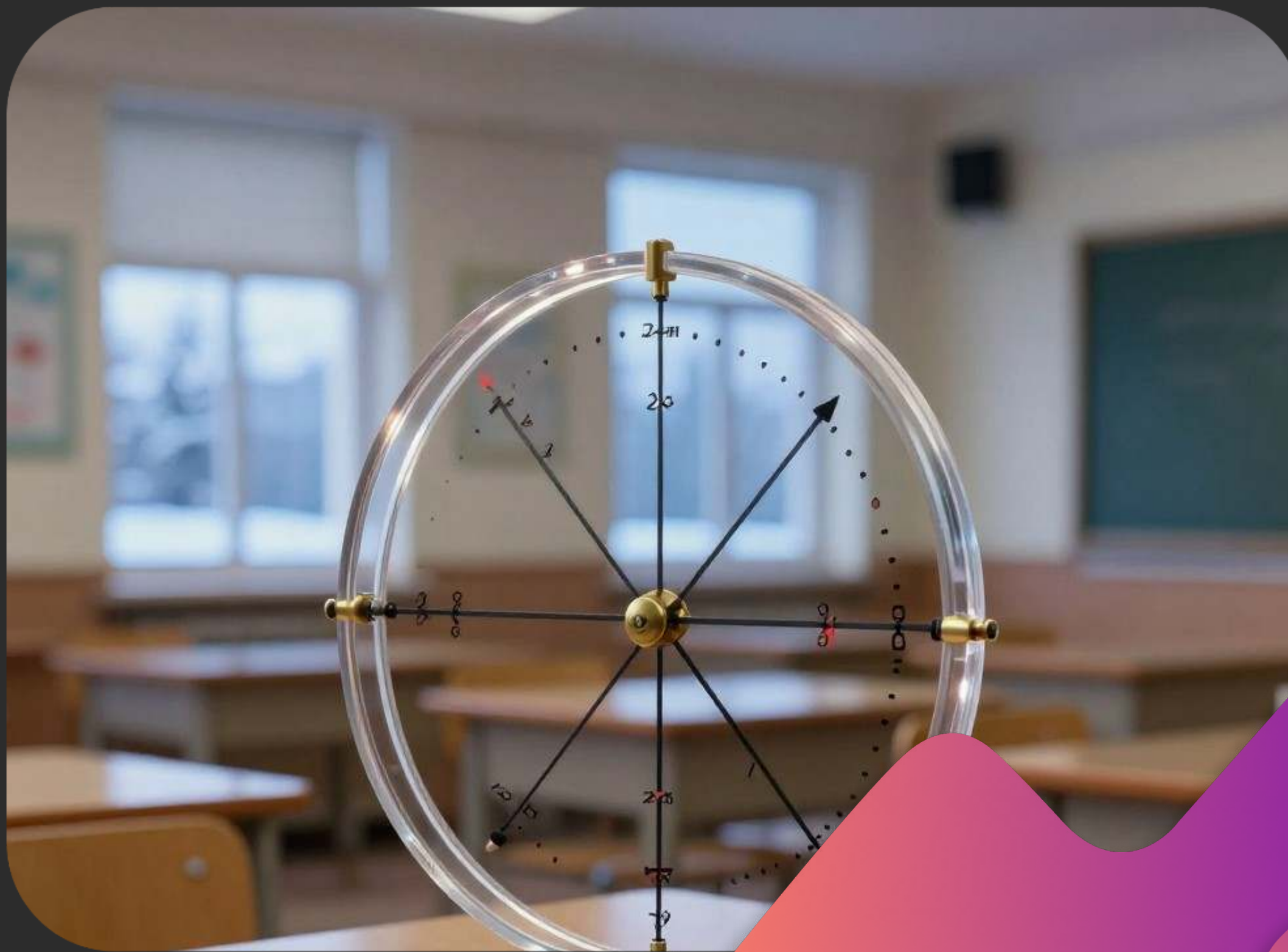
Нули, максимумы и минимумы косинуса

Нули и периодическая повторяемость

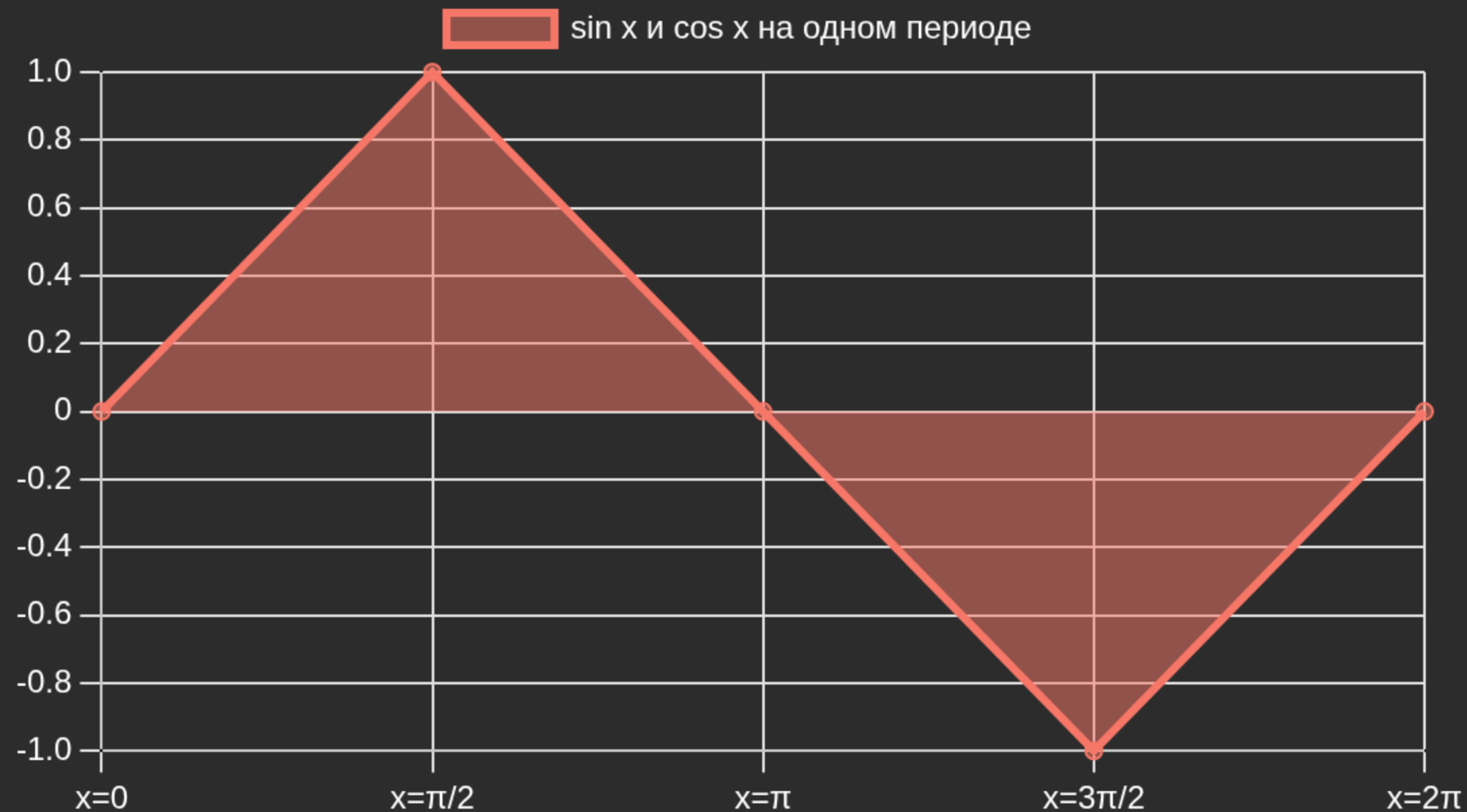
Нули функции $y = \cos x$ находятся в точках, где абсцисса соответствует пересечению с осью Ox . Это происходит при $x = \pi/2 + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Между соседними нулями аргумент меняется на π .

Экстремумы: где $\cos x$ принимает ± 1

Максимум 1 достигается при $x = 2\pi k$, а минимум -1 — при $x = \pi + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому вершины повторяются через целые обороты по единичной окружности, что удобно при быстром построении.



Сравнение графиков $\sin x$ и $\cos x$



Опорные значения $\sin x$ на единичной окружности (стандартные точки $x=0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$)

Одинаковый период 2π означает, что формы колебаний совпадают по «длине волны», но фазовый сдвиг меняет стартовую точку графика.

По данным о значениях в ключевых точках видно, что $\sin x$ и $\cos x$ имеют амплитуду 1 и возвращаются к начальным значениям ровно через 2π .

Преобразования графика косинуса

Функция $y = A \cos(Bx + C) + D$ изменяется четырьмя параметрами: A , B , C и D . Коэффициент A определяет амплитуду $|A|$ и при $A < 0$ приводит к отражению графика относительно оси Ox .

Коэффициент B управляет частотой: период становится $2\pi/|B|$. Увеличение $|B|$ делает колебания «частее» и сжимает график по оси Ox , уменьшая расстояния между одноименными точками.

Параметр C задаёт горизонтальный сдвиг: аргумент $Bx + C$ смещает график вправо или влево. На уровне точек максимумов и нулей это проявляется как изменение x -координат характерных пересечений.

Параметр D отвечает за вертикальный сдвиг, то есть смещает всю кривую вверх или вниз. Из-за него меняются значения y всех точек, но амплитуда $|A|$ и период $2\pi/|B|$ остаются теми же.

Сводка свойств функции $y = \cos x$

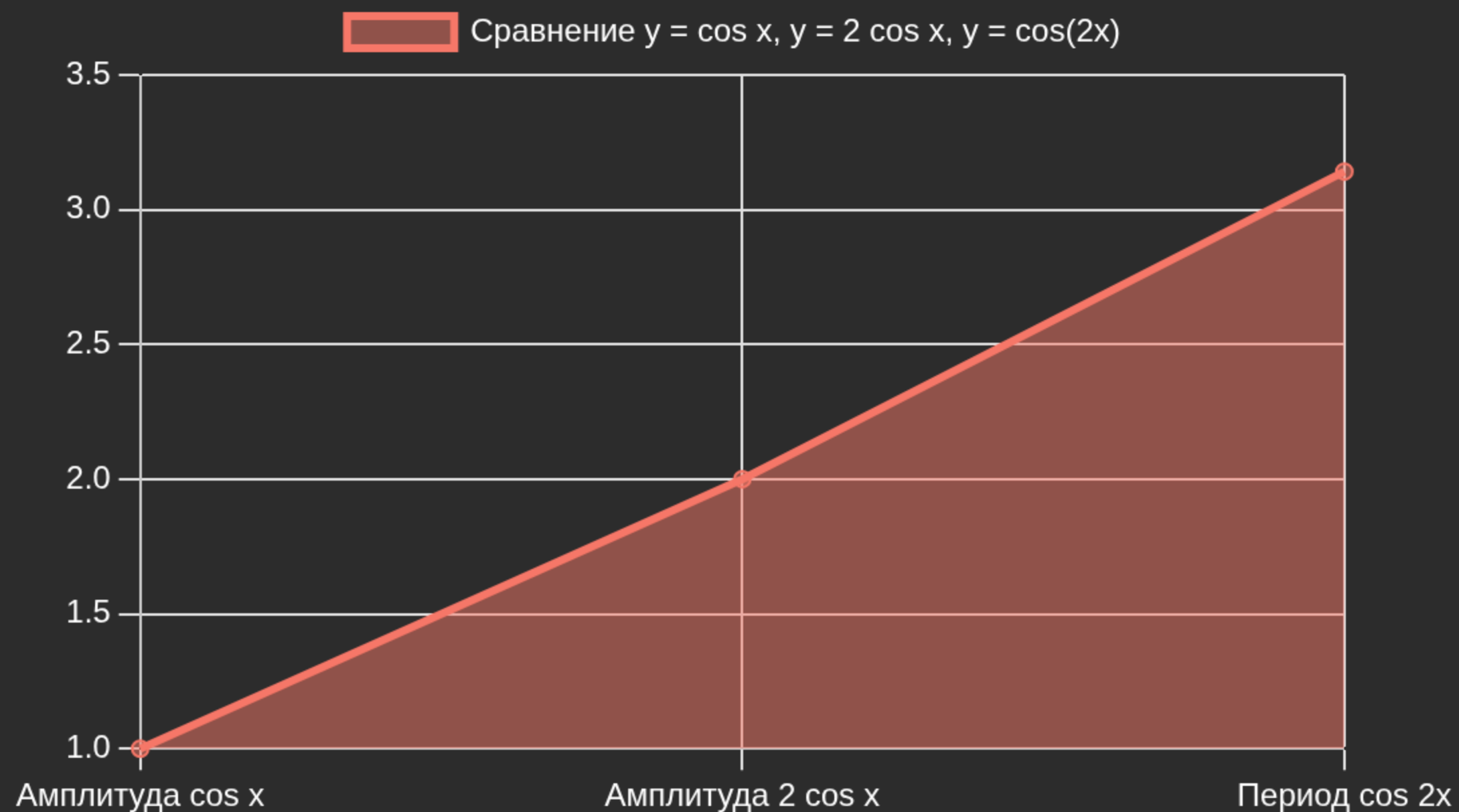
Параметр	Значение
Область определения	$\mathbb{R}$
Область значений	$[-1; 1]$
Чётность	чётная
Период	2π
Максимум	1
Минимум	-1
Нули	$\pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Ключевые характеристики косинуса: область допустимых аргументов, диапазон значений, симметрия, периодичность и позиции экстремумов и нулей.

Таблица показывает, что косинус устойчиво сохраняет амплитуду и период, а характерные точки на оси Ox задаются простыми формулами с шагом π .

Стандартные свойства функции $\cos x$ на единичной окружности (учебная программа средней школы)

Как меняется график при изменении коэффициентов



Свойства периодичности и амплитуды для $\cos(Bx)$ и $A \cos x$ (стандартные формулы)

Увеличение множителя при косинусе меняет «высоту» колебаний, а изменение аргумента — «частоту». Поэтому $y = 2 \cos x$ и $y = \cos 2x$ визуально перестраиваются по-разному.

Сопоставление амплитуды 1 и 2 и сокращения периода до π подчёркивает, что высота и частота независимы: меняется то одно, то другое.

Где встречается косинус в реальных задачах



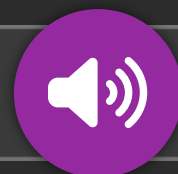
Циклические колебания

Косинус помогает описывать регулярные колебания, например движение маятника вокруг положения равновесия. В таких задачах важно понимать период и то, как значения смещаются во времени.



Переменный ток и сигналы

Во многих моделях электротехника использует синусоидальные зависимости, где $\cos x$ часто появляется вместе с фазой. Это позволяет анализировать изменения тока и напряжения и прогнозировать моменты максимумов.



Звук и свет как волны

При изучении распространения волн косинус входит в описания интенсивности и фазы колебаний. На уровне школьных задач он связывается с повторяющимися изменениями во времени и пространстве.



Вращение и сезонные ритмы

Косинус удобно использовать для описания вращательного движения и периодических процессов, например сезонных изменений. Он поддерживает модель «повторяемости»: состояние системы возвращается через одинаковый интервал.

Типичные ошибки при работе с $\cos x$

Путают $\sin x$ и $\cos x$

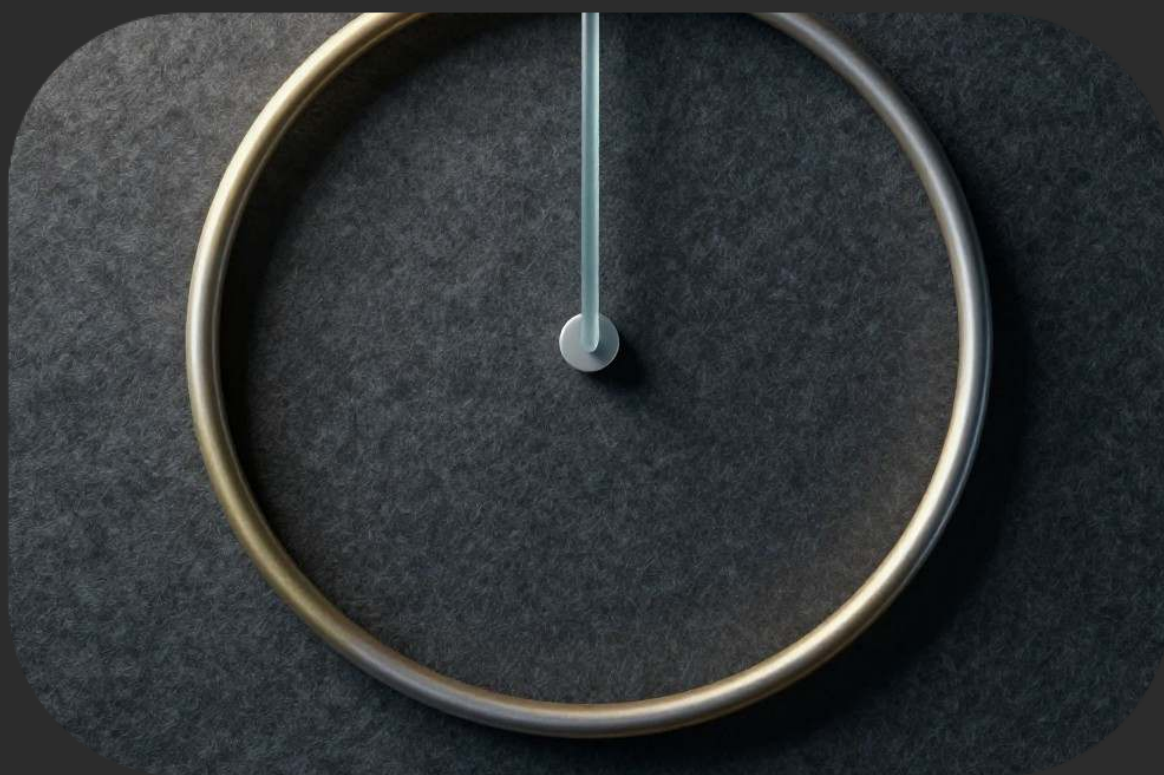
Иногда при решении задач ученики автоматически подставляют формулы $\sin$ вместо $\cos$ и получают неверные значения в характерных точках. Особенно заметна ошибка при $x=0, \pi/2$ и π , где функции отличаются стартовыми значениями.

Считают $\cos(\pi/2)$ не тем значением

Частая ловушка — неверно помнить, чему равен косинус в точке $\pi/2$. На единичной окружности это координата пересечения с осью Oy , поэтому $\cos(\pi/2)$ равно 0, а не 1 или -1.

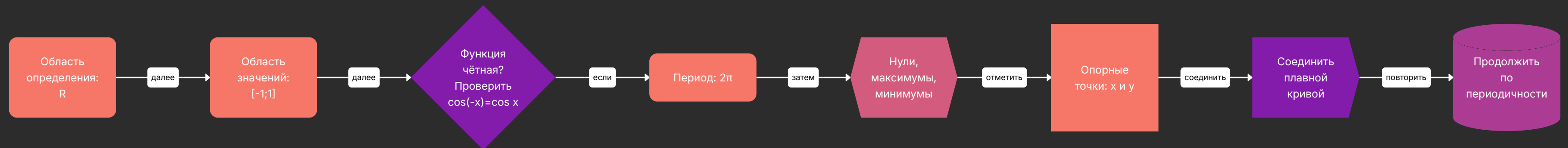
Теряют знак при отрицательных аргументах

Косинус чётный, то есть $\cos(-x)=\cos x$. Если перепутать это свойство и заменить $\cos(-x)$ на противоположное значение, знак у ответа изменится ошибочно. Такие ошибки потом «маскируются» при дальнейших преобразованиях.



Алгоритм исследования функции $y = \cos x$

Пошаговая логика анализа по свойствам косинуса



Косинус: компактная модель повторяющихся процессов

Функция $y = \cos x$ является одной из основных тригонометрических функций школьного курса. Она определена на всей числовой прямой, принимает значения только от -1 до 1 , является чётной и периодической с периодом 2π . График косинуса имеет плавную волнообразную форму, что делает функцию удобной моделью для описания повторяющихся процессов и основой для изучения более сложных тригонометрических преобразований.