

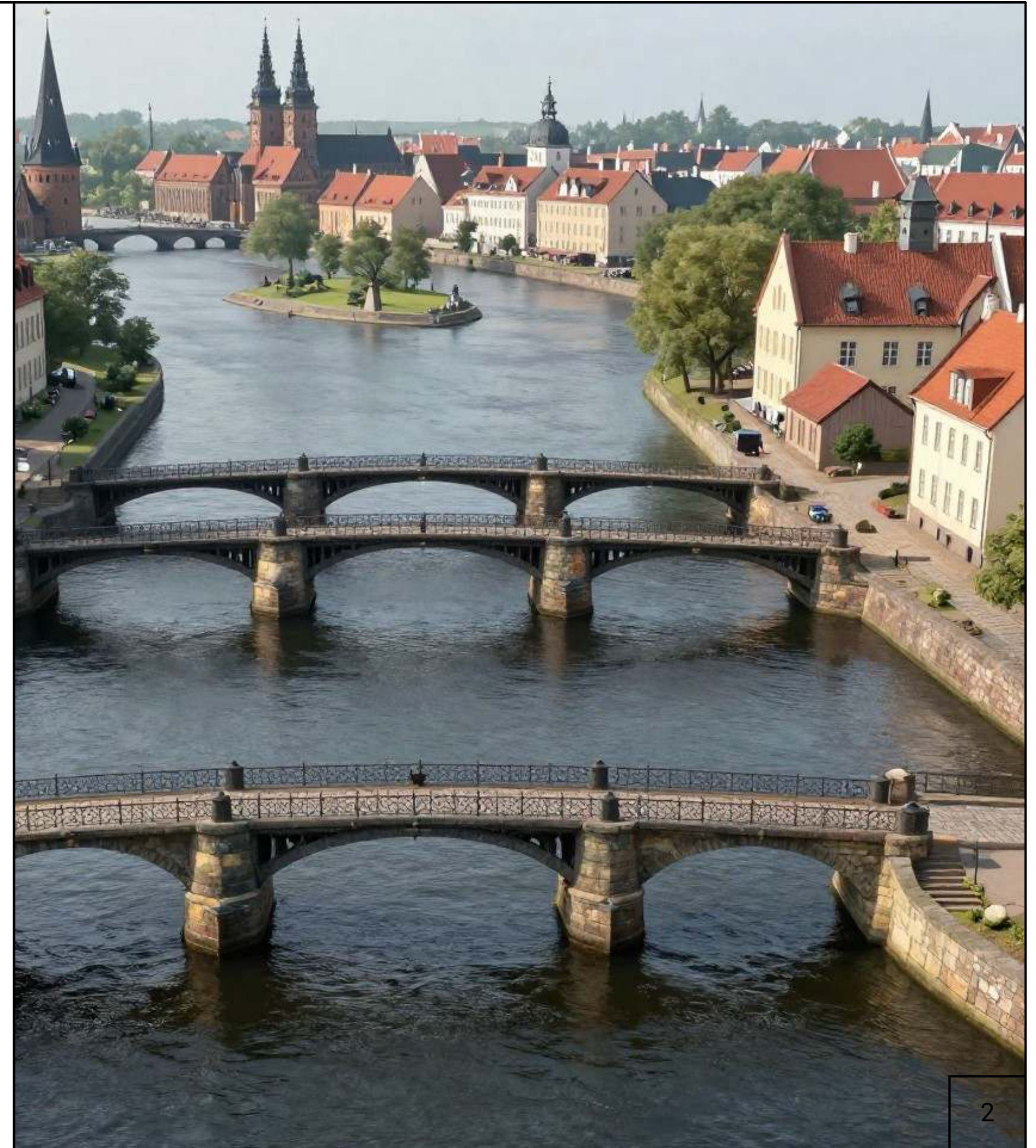
Задача Эйлера и рождение теории графов

Кёнигсбергские мосты привели к строгой модели связей: важны не расстояния, а соединения.



Исторический контекст задачи о мостах Кёнигсберга

В XVIII веке Кёнигсберг располагался на двух берегах Преголи и двух островах, связанных семью мостами. Жители искали маршрут: пройти каждый мост ровно один раз и вернуться в старт. Эйлер перевёл задачу в общий критерий существования такого пути.



Условие задачи в математической формулировке

1 Есть сеть из четырёх частей суши и семи мостов между ними. Нужно выяснить, существует ли маршрут, в котором каждый мост используется ровно один раз, без повторов и пропусков.

2 При этом не важны длины, ширина реки, углы поворотов или любые геометрические детали. Вопрос целиком зависит от того, какие части соединены между собой мостами.

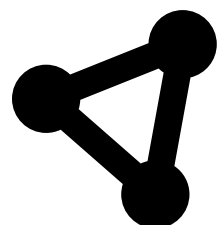
3 Именно поэтому задача становится образцом перехода от привычной географической картины к исследованию структуры связей: изучаем не “как выглядит”, а “как соединено”.



Схема Кёнигсберга как граф

- 1** Части суши заменяются вершинами, а мосты — рёбрами. Так географическая картинка превращается в граф, где решение определяется не расстояниями, а наличием и количеством соединений.
- 2** Важным становится, сколько рёбер “приходит” к каждой вершине. Эта простая перестройка делает задачу универсальной: любой похожей сетью можно заниматься одинаковыми правилами.

Основные элементы графа



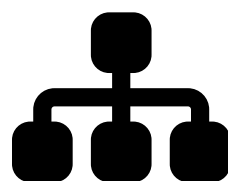
Вершины

Вершина — это объект сети (например, часть суши). Все вершины можно обозначить как “узлы”, между которыми возможны перемещения по заданным связям.



Рёбра

Ребро соответствует связи между двумя объектами. В задаче Эйлера каждое ребро — это один мост, по которому можно пройти ровно один раз в маршруте.



Степень вершины

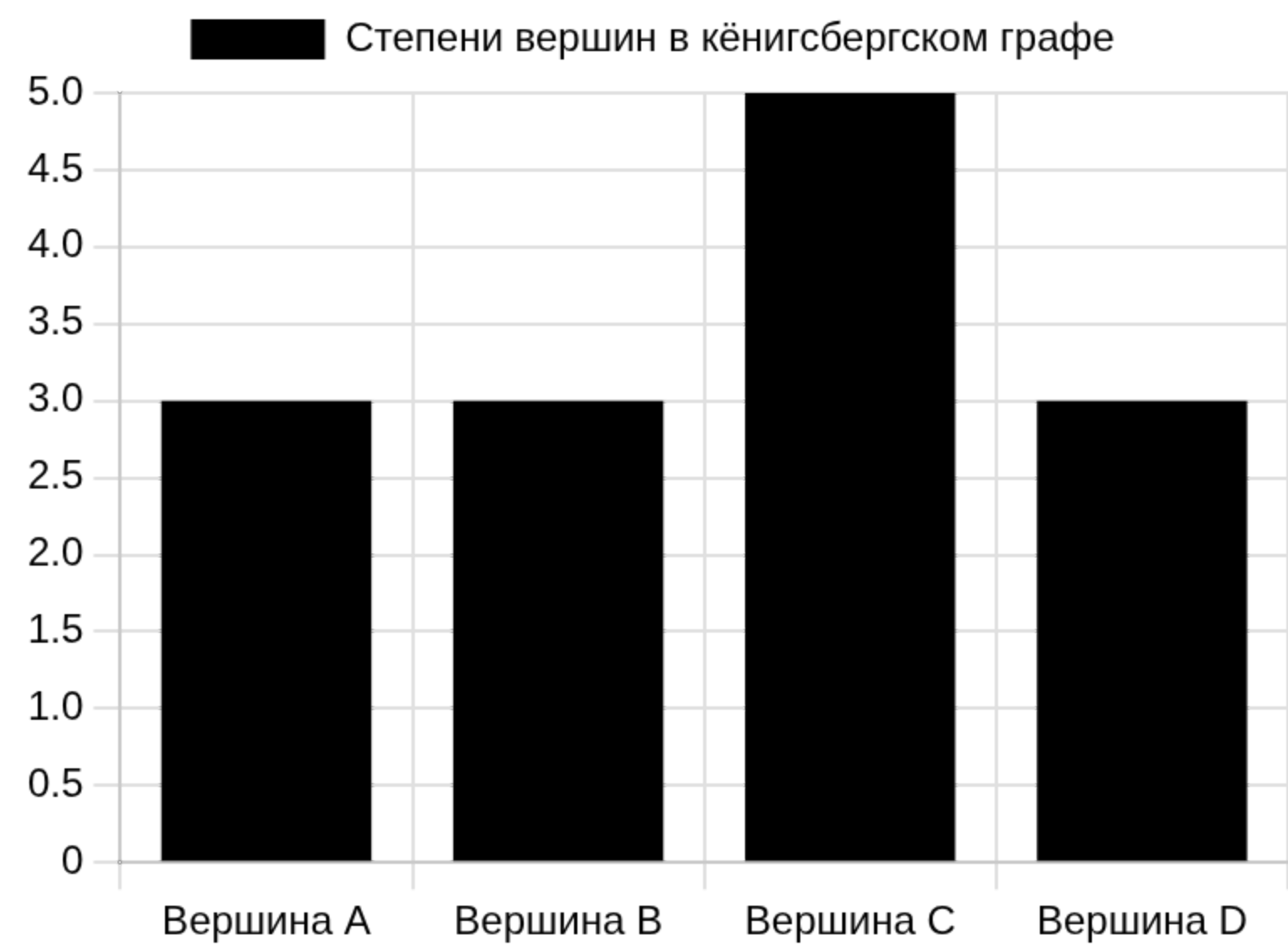
Степень вершины — число рёбер, которые к ней примыкают. Для маршрутов важно, как входы и выходы чередуются при движении по рёбрам.



Чётность степени

Если степень чётная, обход можно организовать без “перекоса” входов и выходов. Нечётная степень создаёт неизбежное нарушение баланса в маршруте.

Степени вершин в кёнигсбергском графе



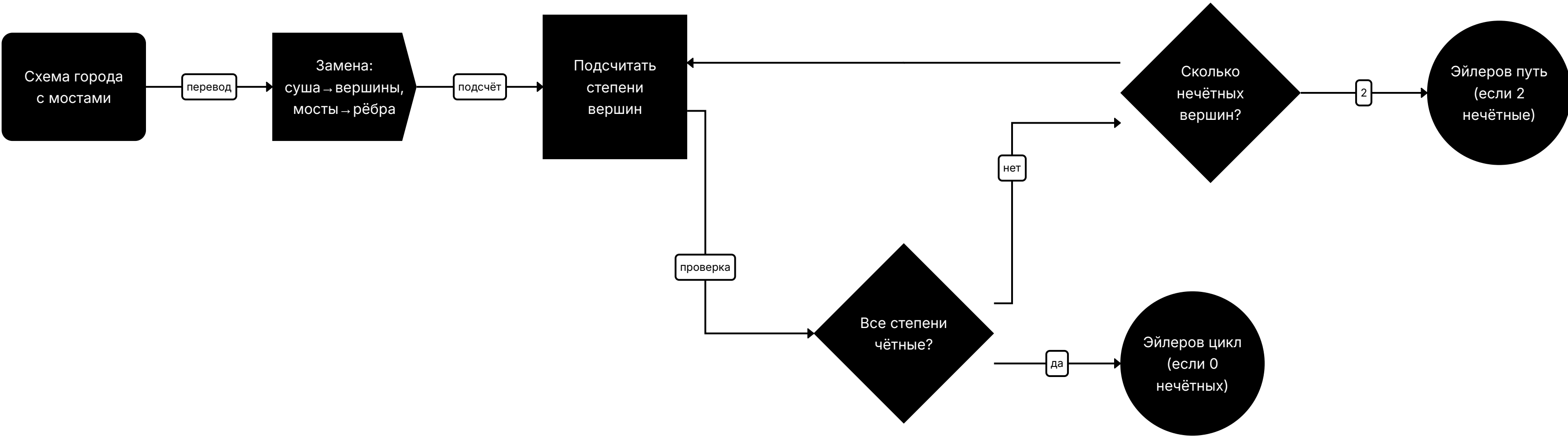
В данном графе степени составляют 3, 3, 5 и 3, то есть каждая вершина имеет нечётную степень.

Поскольку нечётных вершин четыре, условие для существования эйлерава пути (две нечётные) и эйлерава цикла (нулевая нечётность) не выполняется.

По данным школьной формулировки задачи Эйлера: степени вершин 3, 3, 5, 3 (XVIII век, схема мостов Кёнигсберга).

Логика рассуждения Эйлера

Путь от наглядной схемы города к строгому критерию маршрута



Теорема об эйлеровом цикле

- | | | |
|--|--|---|
| <p>1 Эйлеров цикл существует тогда и только тогда, когда граф связан и все его вершины имеют чётную степень. В таком маршруте каждое ребро используется ровно один раз.</p> | <p>2 Начальная точка и конечная совпадают: обход замыкается. Это происходит потому, что при чётной степени в каждую вершину можно войти и выйти “парами” без остатка.</p> | <p>3 Для школьного уровня эта теорема удобна как проверочный тест: достаточно оценить связность и чётность степеней, не привязываясь к геометрии сети.</p> |
|--|--|---|

Теорема об эйлеровом пути

Шаг 1: проверь связность

Сначала убедитесь, что граф связан: от любой вершины можно добраться до любой другой по рёбрам. Разрозненные части означают, что единый обход невозможен.

Шаг 2: посчитай нечётные степени

Эйлеров путь существует, когда ровно две вершины имеют нечётную степень. Эти вершины естественно становятся началом и концом маршрута.

Шаг 3: исключи остальные случаи

Если нечётных вершин нет, маршрут превращается в цикл. Когда нечётных вершин больше двух, пройти по каждому ребру ровно один раз невозможно.

Эйлеров путь и эйлеров цикл: сравнение

Параметр	Эйлеров путь	Эйлеров цикл
Число нечётных вершин	2	0
Начало и конец	разные	одна вершина
Условие связности	нужен связный граф	нужен связный граф
Ключевой признак	незамкнутый обход	замкнутый обход

Ключевое различие задаётся числом вершин нечётной степени и тем, замыкается ли обход. Ни форма графа, ни “длина” ребер решения не определяют.

Можно быстро классифицировать маршрут по чётности степеней: две нечётные вершины дают путь, ноль — цикл, всё остальное исключает эйлеров обход.

4

Наличие четырёх вершин нечётной степени делает невозможным маршрут, проходящий по каждому мосту ровно один раз.

Расчёт по степеням вершин в графовой модели кёнигсбергских мостов (классическое решение Эйлера, XVIII век).

В кёнигсбергской модели есть 4 вершины нечётной степени. При обходе без повторов каждая входящая «проходка» требует парного выхода, что ломается на нечётных вершинах.

Пример графа, в котором существует эйлеров цикл

Идея условия

Если граф связан и каждая вершина имеет чётную степень, существует замкнутый маршрут, проходящий по каждому ребру ровно один раз. Чётность обеспечивает «парность» входов и выходов у каждой вершины.

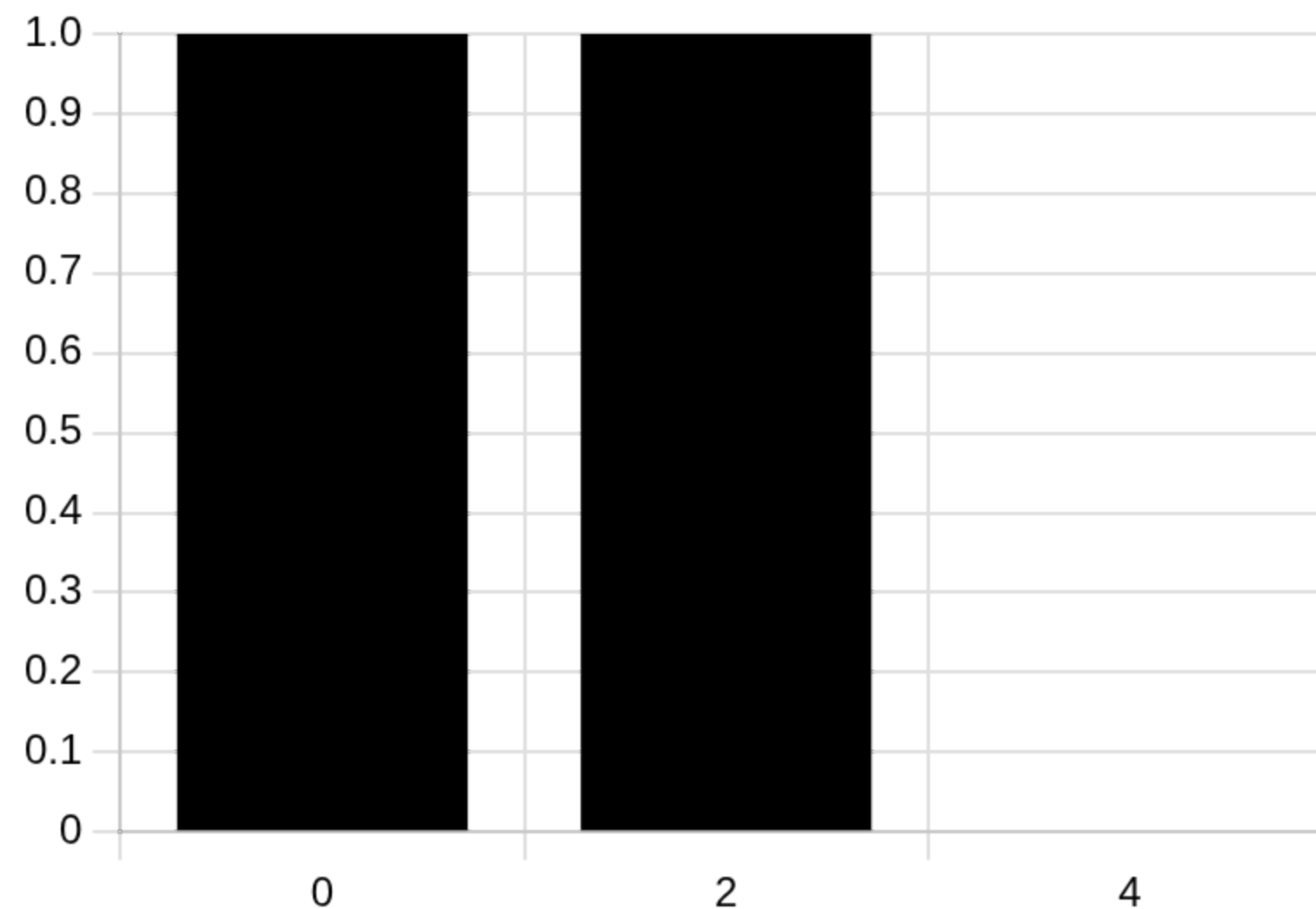
Сопоставление с кёнигсбергским графом

Рассмотрим квадратный граф с дополнительными рёбрами: степени его вершин равны 2 или 4. Здесь условие Эйлера выполняется, поэтому маршрут возможен — в отличие от кёнигсбергского случая, где оно нарушено.



Сколько нечётных вершин допускается

Зависимость существования эйлера маршрута от числа нечётных

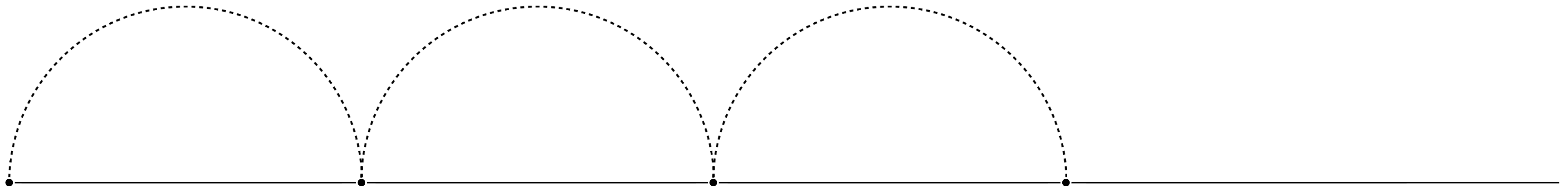


Число нечётных вершин — это единственный ориентир для эйлеровых маршрутов: граф может быть сложным, но решение определяется этим параметром.

По диаграмме видно правило: 0 ведёт к циклу, 2 — к пути без замыкания, а 4 и более — к невозможности обхода без повторов.

Теоремы Эйлера (критерии существования эйлера цикла и пути) в терминах степеней вершин; формулировка общепринята в учебниках по теории графов.

Алгоритм проверки графа на наличие эйлерова маршрута



Проверить связность

Сначала убедитесь, что граф связан: если части разобщены, один маршрут не сможет пройти по рёбрам во всех областях.

Посчитать степени вершин

Далее подсчитайте степени всех вершин и отметьте, сколько среди них вершин нечётной степени.

Сделать вывод по количеству нечётных

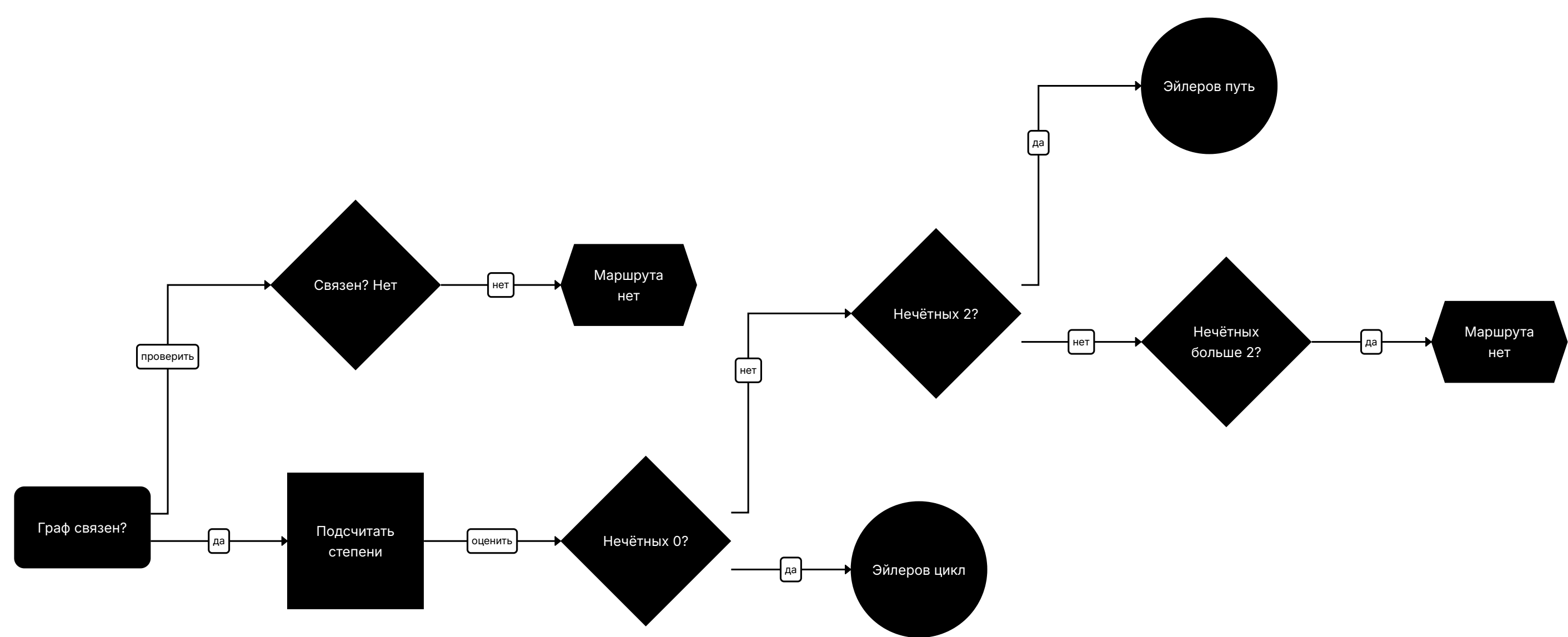
Если нечётных вершин больше двух — эйлеров маршрут невозможен. Если ровно две — существует эйлеров путь.

Разобрать оставшийся случай

Если нечётных вершин нет, то все степени чётные, и существует эйлеров цикл; маршрут будет замкнутым.

Проверка маршрута по шагам

Схема соответствует критериям Эйлера по связности и чётности степеней.



Применения в реальной жизни

Маршрутизация работ

Модели графов помогают спланировать обходы техники или сотрудников так, чтобы минимизировать повторные проезды и лишние затраты времени.

Прокладка коммуникаций

При проектировании трасс для кабелей и труб важно понимать, где нужно входить и выходить без «разрывов» маршрута, опираясь на структуру соединений.

Доставка и логистика

Графовая постановка позволяет сравнивать варианты маршрутов доставки: иногда оптимальный обход зависит не от расстояний, а от чётности связей.

Дорожные обходы

Задачи планирования объездов похожи на эйлеровы обходы: требуется системный маршрут по участкам, где ключевую роль играет наличие повторов.

Связь задачи Эйлера с разделами математики

1 Геометрия задаёт привычную картинку городских мостов, но графовая модель переводит её в язык вершин и рёбер — так исчезают лишние измерения и остаётся структура связей.

2 Комбинаторика помогает рассматривать возможные маршруты как набор вариантов обхода и анализировать их свойства, опираясь на степени вершин и ограничения на повторения рёбер.

3 Теория графов обобщает конкретную историю на любые сети, где элементы соединены линиями: критерии Эйлера становятся универсальными правилами для целого класса задач.

Как меняется чётность при изменении графа



Одно добавленное ребро увеличивает степень двух вершин на 1, поэтому их чётность меняется на противоположную.

Если изначально было 4 нечётные вершины, то корректное изменение может привести к 2 нечётным и тем самым сделать возможным эйлеров путь.

Общее свойство графов: добавление/удаление ребра меняет степени ровно двух вершин на 1 (и, следовательно, их чётность).

1

Один шаг абстракции позволяет заменить поиск по расстояниям анализом структуры связей.

Обобщение подхода Эйлера в классическом решении задачи о кёнигсбергских мостах (исторически сложившаяся формулировка в учебной традиции по теории графов).

Главный принцип: сложная задача о мостах решается через чётность степеней, то есть через анализ связей, а не через измерения расстояний или углов.

Геометрия превращается в строгие правила

Задача о кёнигсбергских мостах стала важной отправной точкой теории графов: она соединяет школьную геометрическую наглядность, логику доказательства и чёткие критерии — для цикла и для пути.