

Арктангенс и арккотангенс: обратные тригонометрические функции и уравнения

Узнаем, как по значению получить главный угол и общее множество решений.

Зачем нужны арктангенс и арккотангенс



Тангенс и котангенс повторяются через период, поэтому одному значению соответствует множество углов. Чтобы получать один «главный» ответ, вводят $\arctg x$ и $\operatorname{arcctg} x$ с ограниченными областями значений, и затем добавляют период в решении уравнений.

Тангенс и котангенс как отношения сторон

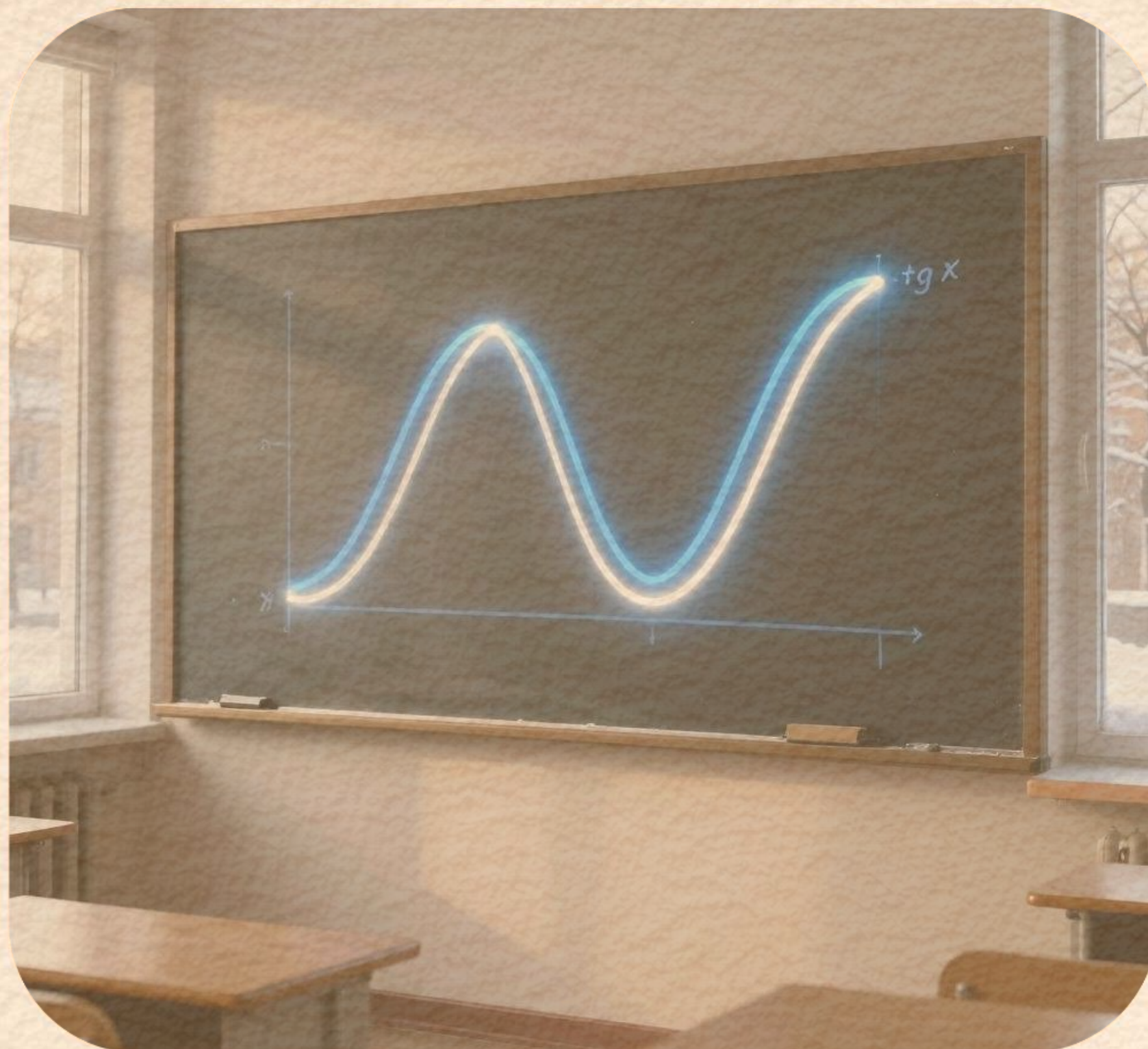
$\operatorname{tg} \alpha$ — это отношение синуса к косинусу:
 $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$. Значит, $\operatorname{tg} \alpha$ не определён, когда $\cos \alpha = 0$, то есть при углах вида $\pi/2 + \pi k$.

Знак $\operatorname{tg} \alpha$ зависит от четверти: в I и III четвертях он соответствует знаку α , а в II и IV различается. Аналогично ведёт себя $\operatorname{ctg} \alpha$, что помогает сразу понять, где искать главное значение.

$\operatorname{ctg} \alpha$ — отношение косинуса к синусу: $\operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha$. Поэтому arcctg не нужна, а $\operatorname{ctg} \alpha$ не определён при $\sin \alpha = 0$, то есть при углах πk .

При решении уравнений это правило превращается в ориентир: по знакам $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ можно определить, в какой четверти окажется угол из главного промежутка.

Графики $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$



Ветви тангенса

График $y = \operatorname{tg} x$ имеет вертикальные асимптоты $x = \pi/2 + \pi k$ и период π . Между соседними асимптотами функция возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, поэтому пересечения с прямой $y = a$ повторяются снова и снова.

Ветви котангенса

График $y = \operatorname{ctg} x$ имеет вертикальные асимптоты $x = \pi k$ и также период π . На каждом промежутке определения он убывает от $+\infty$ до $-\infty$, а значит, уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ тоже даёт бесконечное число решений.

Главные значения арктангенса и арккотангенса

Сравнение показывает, как ограничение области значений делает обратные функции однозначными.

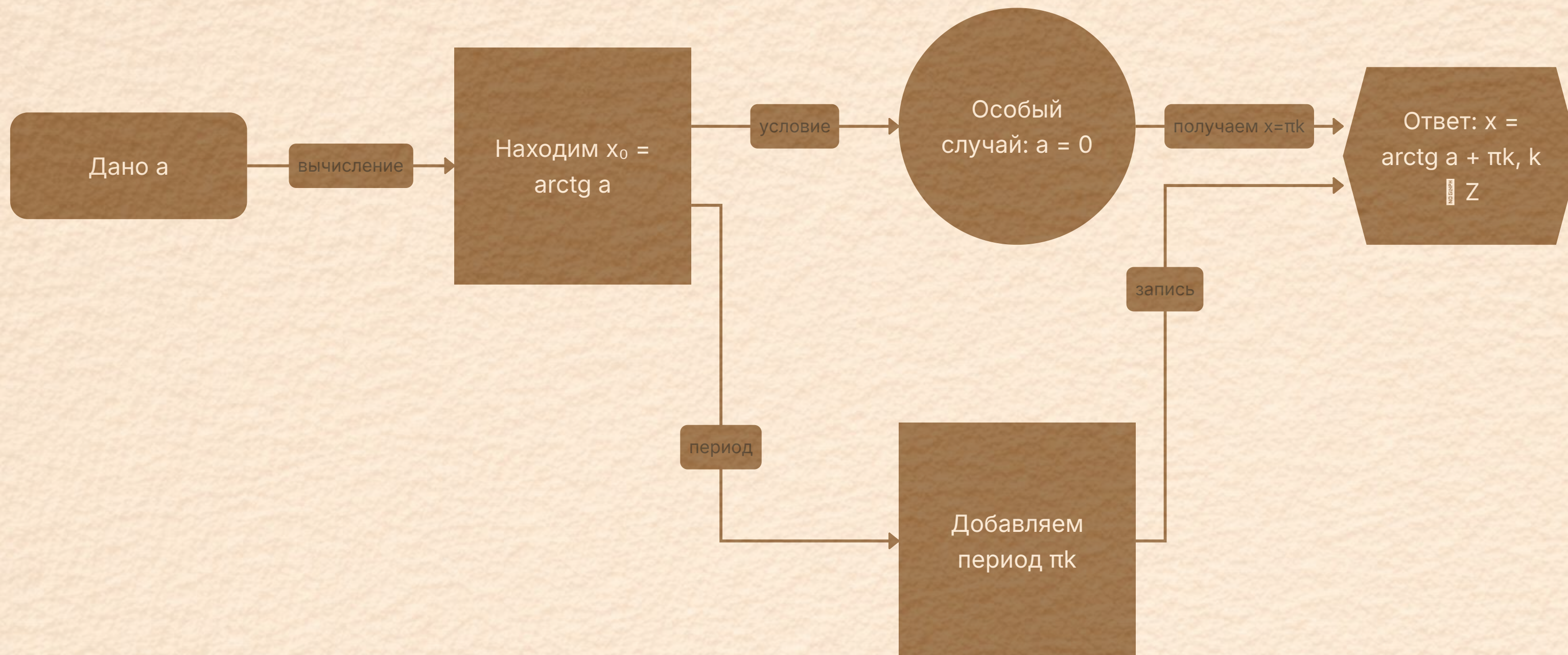
Одна и та же величина a соответствует многим углам, но главный ответ выбирается за счёт заранее заданного промежутка.

Функция	Область значений	Монотонность	Обратная формула
$\operatorname{arctg} x$	$(-\pi/2; \pi/2)$	возрастает	$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$
$\operatorname{arcctg} x$	$(0; \pi)$	убывает	$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$

Свойства обратных тригонометрических функций (школьная программа)

Как получить общее решение $\operatorname{tg} x = a$

Схема основана на главном значении $\operatorname{arctg} a$ и периодичности тангенса (период π).



Общее решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ при любом действительном a имеет бесконечно много решений. Главный угол задаётся функцией $\operatorname{arctg} a$, а остальные ответы возникают из-за повторяемости тангенса.

Формула общего решения выглядит так: $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Она работает, потому что $\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x$ для любого целого k .

Где находится главный угол $\operatorname{arctg} a$? Если $a > 0$ — в I четверти, если $a < 0$ — в IV, а при $a = 0$ главный ответ равен 0 (решения имеют вид $x = \pi k$).

Примеры значений $\arctg a$

По столбцам видно: при положительном a главный угол положителен, а при отрицательном – отрицателен.

Табличные примеры подтверждают выбор области значений $(-\pi/2; \pi/2)$: $\arctg a$ всегда попадает внутрь этого коридора.

Вычисления по значениям $\operatorname{tg}(\pi/4)=1$ и $\operatorname{tg}(\pi/3)=\sqrt{3}$; школьные определения $\arctg$.

Проверка решений уравнения $\operatorname{tg} x = a$

Чтобы проверить ответ, подставьте найденное x в левую часть: вычислите $\operatorname{tg} x$. Если x записано как $\operatorname{arctg} a + \pi k$, то тангенс должен вернуть исходное число a .

Частые ошибки возникают, когда теряют множитель πk или записывают только один частный угол. Иногда путают знак $\operatorname{arctg} a$ при отрицательном параметре, что сдвигает ответ на другую ветвь.

Добавление πk не меняет значение tg , потому что период тангенса равен π : $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a + \pi k) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$. Значит, проверка подтверждает правильность всего семейства решений.

Для аккуратного результата важно одновременно сохранить общий вид решения и помнить, что arctg выбирает именно главный угол из промежутка $(-\pi/2; \pi/2)$.

Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$

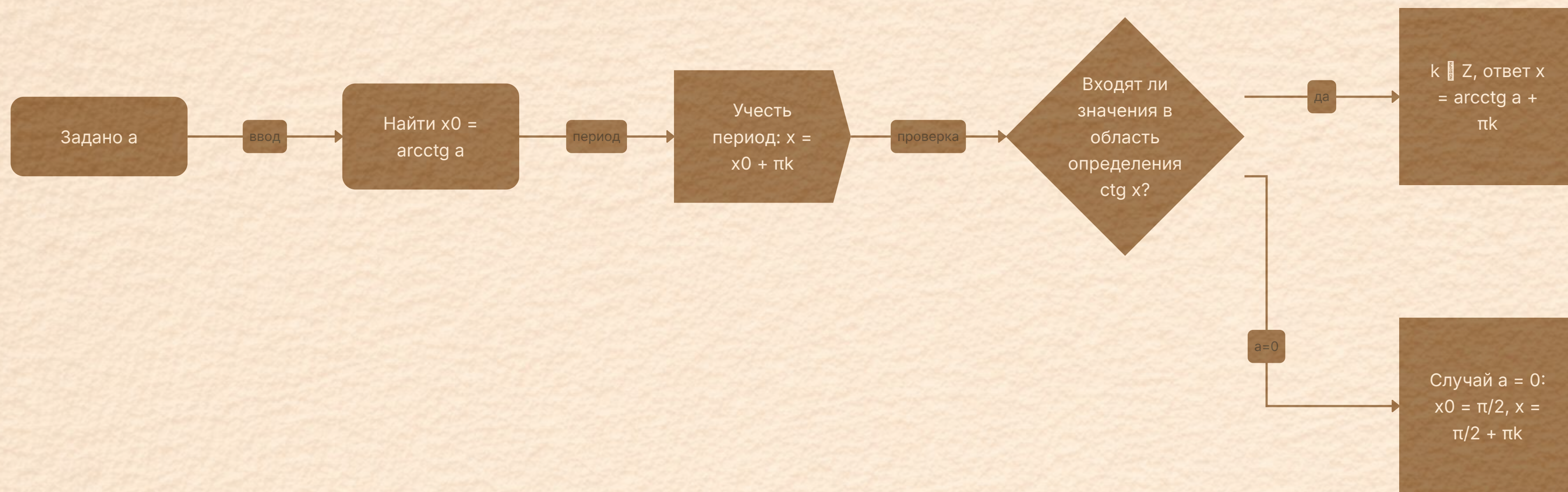
Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ тоже имеет бесконечно много решений, потому что котангенс периодичен с периодом π . Поэтому одного главного угла недостаточно — нужны все повторения.

Общее решение записывается так: $x = \operatorname{arccctg} a + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Например, при $a = 0$ получаем $x = \pi/2 + \pi k$, ведь $\operatorname{ctg}(\pi/2 + \pi k) = 0$.

В отличие от arctg , главные значения $\operatorname{arccctg}$ лежат в промежутке $(0; \pi)$. Поэтому главный угол часто оказывается в I или II четверти, а при $a = 0$ он соответствует точке $\pi/2$.

Логика решения уравнения $\text{ctg } x = a$

Порядок: выбрать главное значение через arcsctg , затем учесть период π и исключить точки, где котангенс не определён.



Сравнение уравнений $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$

Признак	$\operatorname{tg} x = a$	$\operatorname{ctg} x = a$	Одинаково
Общий вид решения	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$	$k \in \mathbb{Z}$
Область значений обратной функции	$(-\pi/2; \pi/2)$	$(0; \pi)$	—
Точки неопределённости	$\cos x = 0$	$\sin x = 0$	—
Период	π	π	π

Кратко сопоставляются формулы общего решения, области значений обратных функций, точки неопределённости и период.

Разница между задачами возникает из-за разных областей значений и разных точек, где функция не определена; период при этом одинаков.

Учебные определения обратных функций и периодичность $\operatorname{tg}/\operatorname{ctg}$.

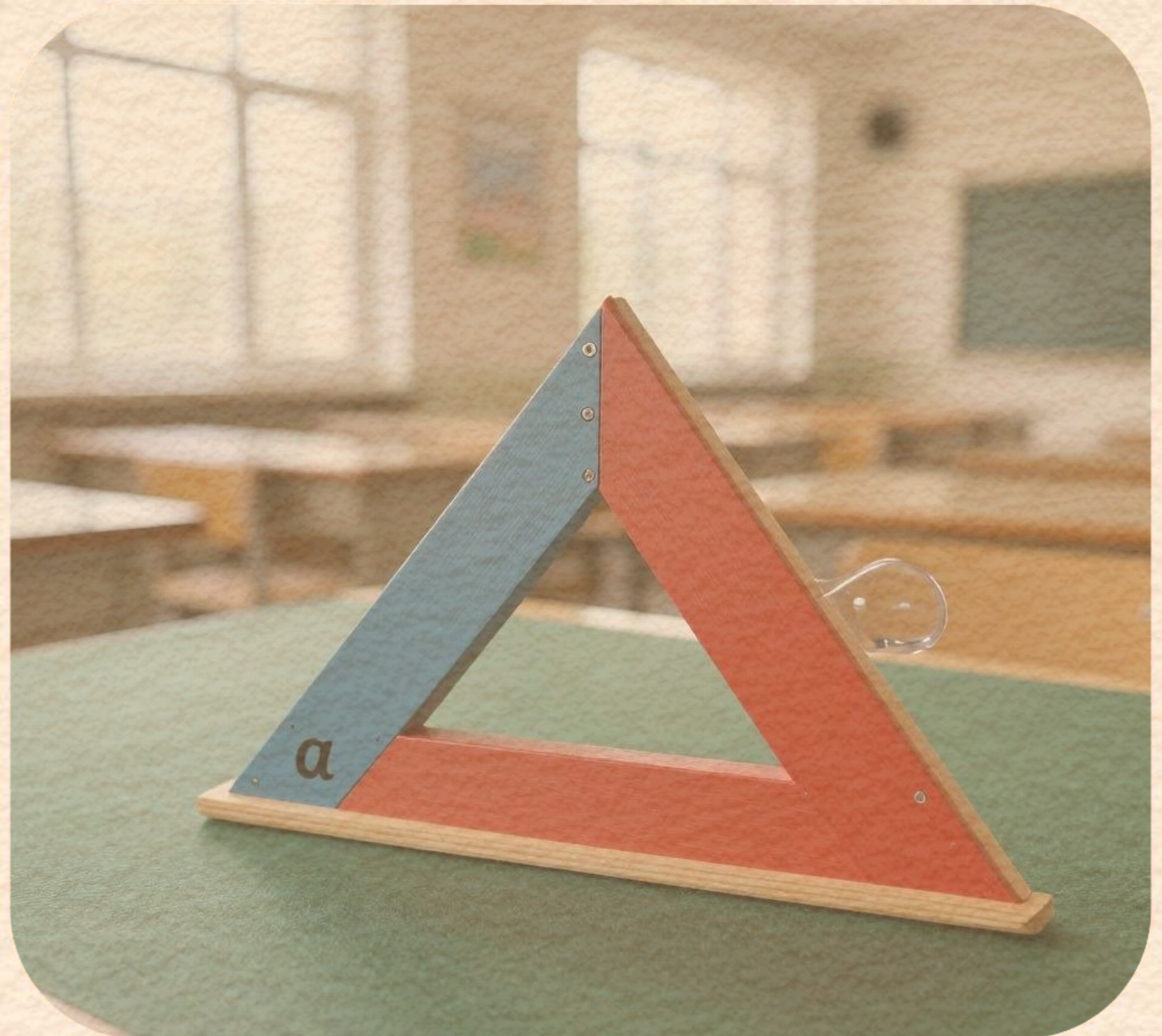
Геометрический смысл арктангенса и арккотангенса

Угол через отношения катетов

Для прямоугольного треугольника удобно смотреть на углы через отношения сторон. Если α — острый угол, то $\operatorname{tg} \alpha$ выражает противолежащий катет через прилежащий, а $\operatorname{ctg} \alpha$ — наоборот, отношение прилежащего к противолежащему.

Связь с задачами на наклон и построения

Именно поэтому арктангенс и арккотангенс переводят найденное отношение сторон обратно в угол. Это применяется не только в треугольниках: по угловому коэффициенту прямой можно находить наклон и работать с направлениями в координатной плоскости.



Главные значения при одинаковых параметрах a

Для одних и тех же a главные углы различаются: $\arctg a$ задаёт ветвь в $(-\pi/2; \pi/2)$, а $\operatorname{arcsctg} a$ – в $(0; \pi)$.

Диаграмма подчёркивает смысл выбора «главного значения»: одинаковый параметр соответствует разным главным углам в зависимости от того, какую обратную функцию берём.

Пары $a \in \{-3, -1, 0, 1, 3\}$; значения — главные аргументы обратных функций в указанных промежутках.

Типичные ошибки при решении

Часто забывают добавлять πk : тогда вместо семейства решений получают только одно частное значение. Из-за периодичности tg и ctg это ведёт к неполному ответу, хотя проверка сразу показывает несоответствие.

Неверно определяют знак при отрицательном a и иногда заменяют период π периодом 2π . В итоге ответ не совпадает с исходным уравнением: $\operatorname{tg}(x+2\pi)$ и $\operatorname{ctg}(x+2\pi)$ возвращаются, но лишний «удвоенный» период ломает структуру решений.

Путают арктангенс и арккотангенс: для одного и того же a берут не тот главный угол, игнорируя, что $\operatorname{arccctg}$ ограничен промежутком $(0; \pi)$. В результате знак и четверть определяются неверно.

Ещё одна частая причина ошибок — путаница точек неопределённости: для $\operatorname{tg} x$ недопустимы $\cos x = 0$, а для $\operatorname{ctg} x$ — $\sin x = 0$. Если забыть исключить эти точки, в ответ попадают невозможные x .

Алгоритм решения уравнений с тангенсом и котангенсом

Начните с упрощения: приведите уравнение к виду, где явно выделяется $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$. Затем аккуратно найдите параметр a и проверьте, что он действительно является действительным числом.

После этого запишите общее решение, добавив период: $x = x_0 + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. На этом шаге важно сохранить именно π , потому что период tg и ctg одинаков и равен π .

Далее вычислите главное значение через обратную функцию: для $\operatorname{tg} x = a$ используйте $\operatorname{arctg} a$, а для $\operatorname{ctg} x = a$ — $\operatorname{arcctg} a$. Главный угол берётся строго из его области значений, чтобы ответ был однозначным.

Завершите проверкой: убедитесь, что найденные x не попадают в точки неопределённости (для tg — $\cos x = 0$, для ctg — $\sin x = 0$) и подставьте ответ обратно в исходное уравнение по необходимости.

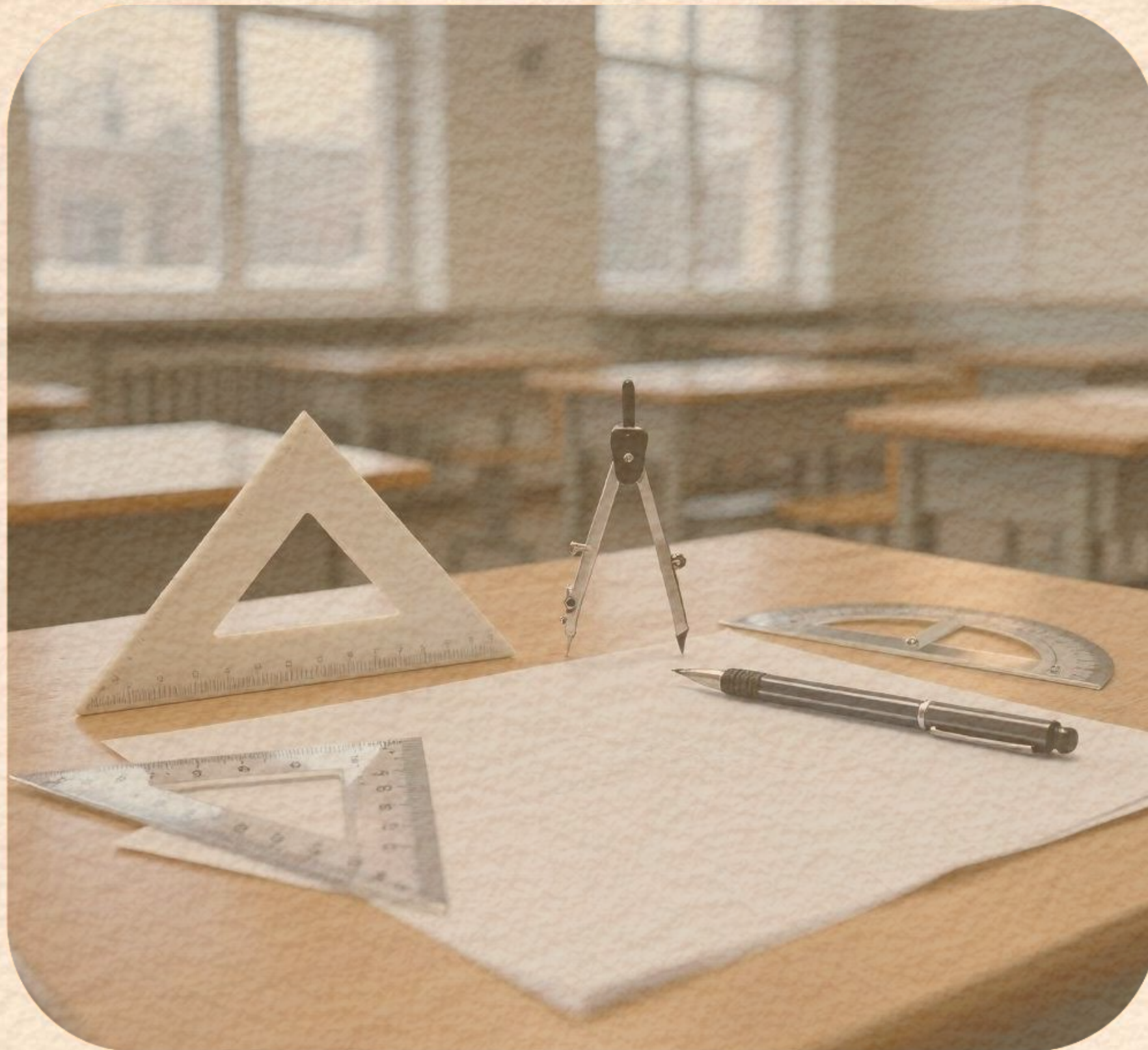
Как знак параметра a влияет на решение

При фиксированной формуле $x_0 = \arctg a$ или $x_0 = \operatorname{arcctg} a$ знак a сразу определяет четверть главного значения, а также характерные «особые» значения при $a = 0$.

Диаграмма помогает быстро ориентироваться: меняется не период, а то, где именно лежит главное значение, что упрощает контроль правильности ответа.

Случаи по $\operatorname{sign}(a)$: $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$; учтены области главных значений $\arctg$ и arcctg .

Применение в задачах по геометрии и аналитической геометрии



Наклон прямой и угловой коэффициент

Если прямая задана уравнением $y = kx + b$, то её угол наклона α связан со значением $\operatorname{tg} \alpha = k$. Тогда α можно выразить как арктангенс от k и дальше использовать для построений.

Углы треугольника по отношениям катетов

В задачах на треугольники $\operatorname{arccctg}$ появляется, когда известны отношения сторон вида «прилежащий/противолежащий катет» или требуется найти острый угол. Это позволяет преобразовать численное отношение в конкретную величину угла для вычислений.

Контрольные примеры и ответы

Небольшая подборка стандартных случаев: показано, как к главному значению прибавляется семейство решений с периодом π .

Для всех примеров сохраняется одинаковая структура: сначала берут главный угол из области обратной функции, затем добавляют $+\pi k$ и делают проверку.

Уравнение	Главное значение	Общее решение
$\operatorname{tg} x = 1$	$\pi/4$	$x = \pi/4 + \pi k$
$\operatorname{tg} x = -1$	$-\pi/4$	$x = -\pi/4 + \pi k$
$\operatorname{tg} x = 0$	0	$x = \pi k$
$\operatorname{ctg} x = 1$	$\pi/4$	$x = \pi/4 + \pi k$
$\operatorname{ctg} x = 0$	$\pi/2$	$x = \pi/2 + \pi k$

Типовые решения на основе периодичности $\operatorname{tg}/\operatorname{ctg}$ и определений $\operatorname{arctg}/\operatorname{arcctg}$.

Итоги темы: арктангенс, арккотангенс и уравнения

Арктангенс и арккотангенс задают главные значения для многозначных тригонометрических зависимостей. Уравнения $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$ решаются через обратные функции и период πk , причём важно учитывать области значений, точки неопределённости и знак a .