

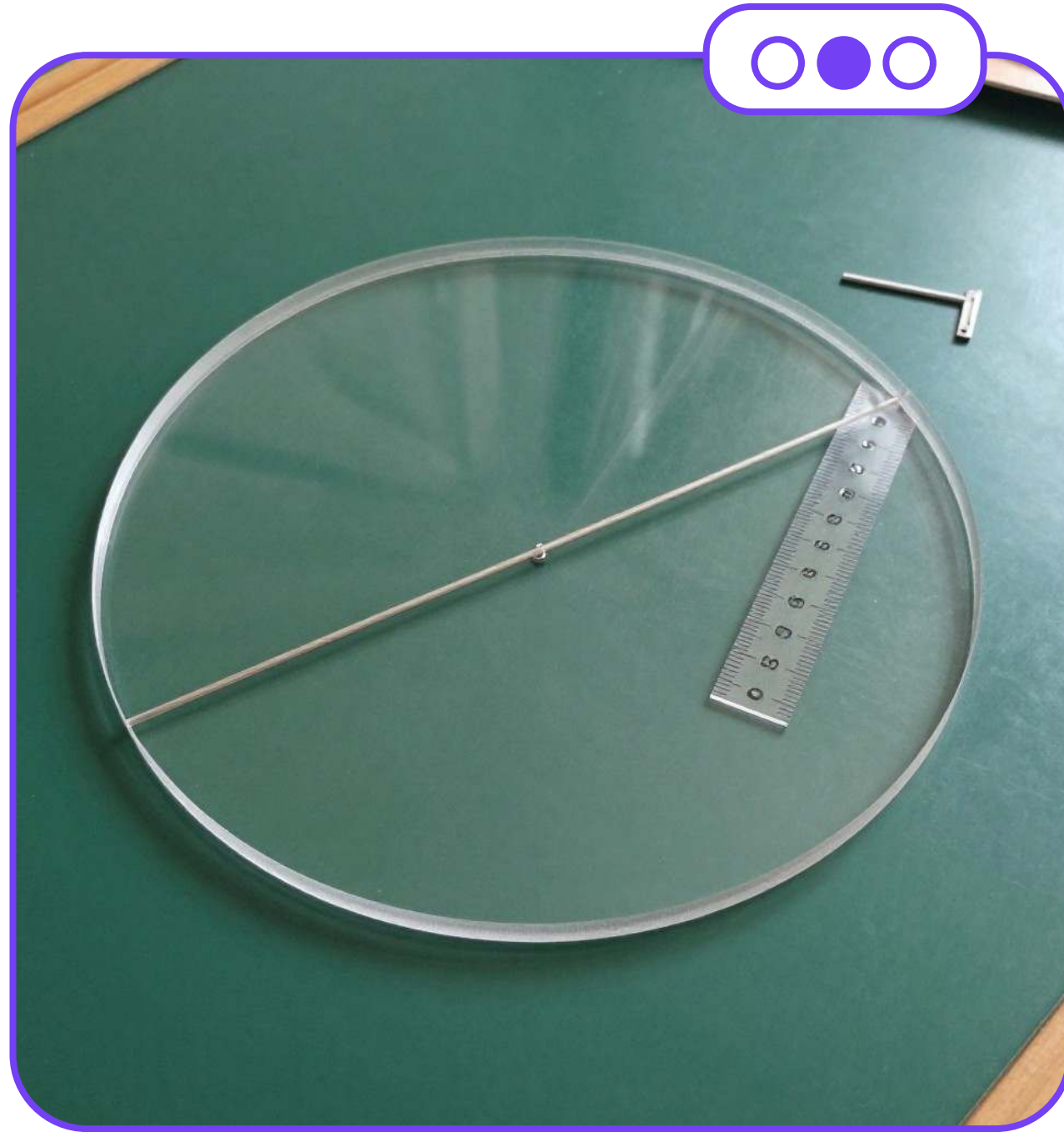
Тангенс и котангенс в геометрии



Узнайте, как углы связаны
со сторонами и наклоном.



Где в школьной геометрии появляются тангенс и котангенс



Эти функции помогают работать с прямоугольными треугольниками, находить высоты и расстояния, проверять вычисления и выбирать самый удобный способ решения задачи.

Определение тангенса острого угла



01

Отношение катетов

Тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике равен отношению противолежащего катета к прилежащему.
Записывают: $\operatorname{tg} \alpha = a / b$, где угол обозначен α .

02

Зависимость только от угла

Значение тангенса не зависит от размеров треугольника. Если треугольники подобны и угол одинаков, то tg этого угла будет одинаковым в каждом из них.

03

Связь с единичной окружностью

Тангенс удобно выражать через уже известные функции: $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$. Это помогает переходить от одного способа вычисления к другому без нового чертежа.

04

Практический смысл

Тангенс особенно полезен, когда нужно сравнить высоту и основание фигуры, определить наклон линии или найти неизвестную сторону по одной известной стороне и углу.



Определение котангенса острого угла



○ Обратное отношение

Котангенс острого угла равен отношению прилежащего катета к противолежащему. Формула записывается так: $\operatorname{ctg} \alpha = b / a$, где стороны берутся относительно угла α .

○ Не зависит от размера

Как и тангенс, котангенс определяется только величиной угла. При изменении размеров треугольника, но сохранении углов, значение ctg остаётся тем же.

○ Удобство в задачах

Котангенс удобно применять, когда в задаче известен катет рядом с углом. Тогда легче сразу составить нужное отношение и найти неизвестную величину.

○ Связь через синус и косинус

На единичной окружности котангенс выражается формулой $\operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha$. Это делает его частью общей системы тригонометрических формул.



Тангенс и котангенс на рисунке прямоугольного треугольника

Выделяем угол

Сначала на рисунке отмечают острый угол α . Именно от него зависит, какой катет будет прилежащим, а какой — противолежащим, поэтому без этого шага формулы нельзя применить верно.

Записываем отношения

Для тангенса берут противолежащий катет и делят на прилежащий. Для котангенса делают наоборот. На схеме это видно особенно наглядно, если стороны подписаны разными цветами.

Смотрим на стороны

Гипотенуза лежит напротив прямого угла, а два других катета образуют выбранный острый угол. Для тангенса и котангенса гипотенуза не участвует в отношении.

Проверяем одинаковость угла

Если треугольники подобны, то при одном и том же угле отношения сторон не меняются. Поэтому тангенс и котангенс можно использовать даже в треугольниках разных размеров.



Основные формулы для запоминания



Школьный курс тригонометрии



Краткая таблица показывает
главные связи между tg и ctg,
а также стандартные значения
для угла 45°.

Формула	Смысл
$\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$	через sin и cos
$\operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha$	обратное отношение
$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$	взаимно обратны
$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$	$\operatorname{ctg} 45^\circ = 1$

Формулы показывают, что tg и ctg тесно
связаны между собой и с sin, cos; при 45° обе
функции равны 1.



Когда тангенс и котангенс не определены

01

Тангенс без значения

Тангенс не определён, если $\cos \alpha = 0$. Это происходит при углах 90° , 270° , 450° и далее через каждые 180° , потому что деление на ноль невозможно.

02

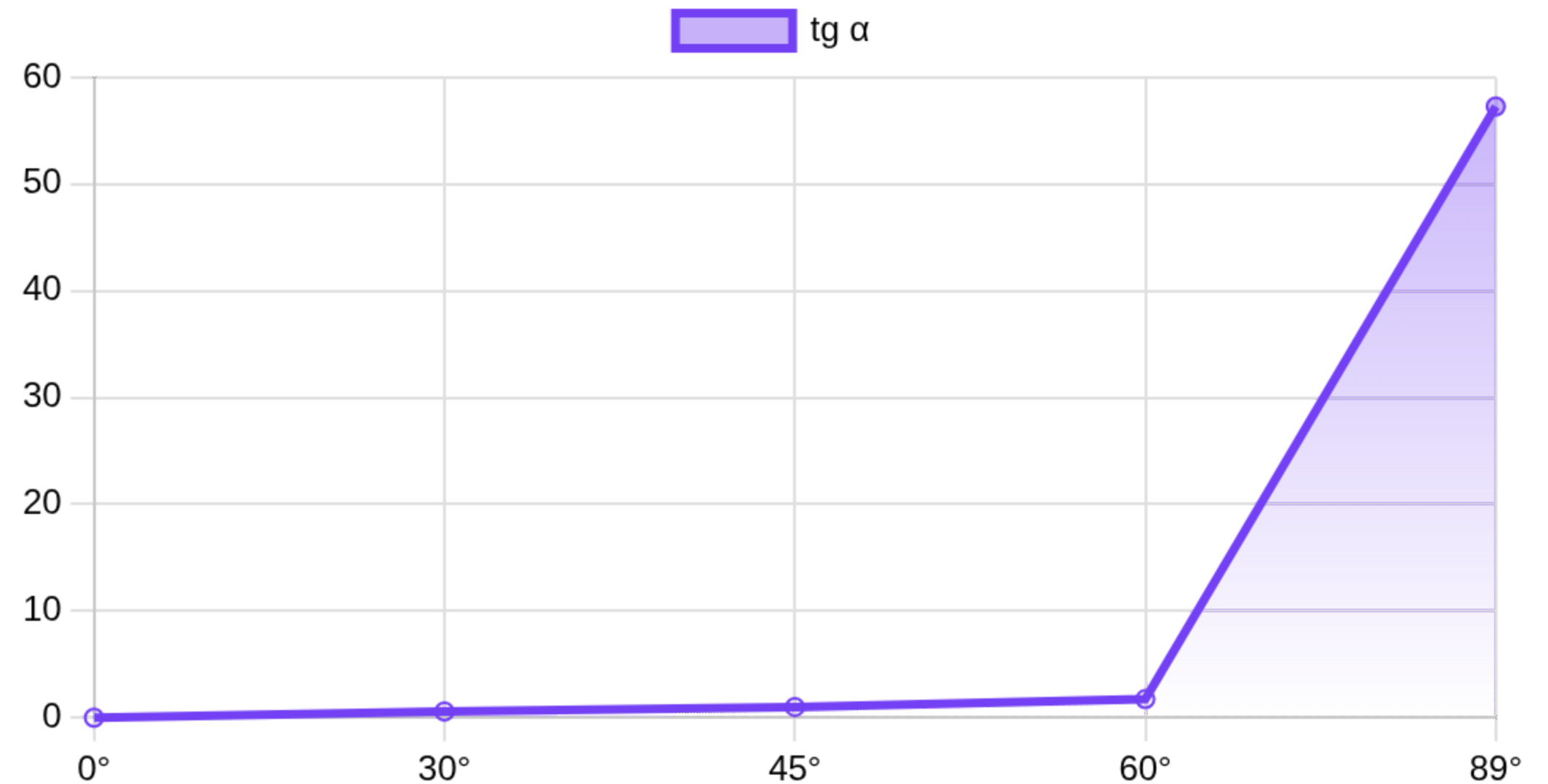
Котангенс без значения

Котангенс не определён, если $\sin \alpha = 0$. Такие углы: 0° , 180° , 360° и далее через каждые 180° . Эти случаи нужно учитывать при решении задач и построении графиков.

Как меняется тангенс при увеличении острого угла



График помогает увидеть не только рост значений, но и резкое увеличение тангенса перед 90° , где функция теряет конечное значение.



Школьные значения тригонометрических функций для 0° , 30° , 45° , 60° и приближённо 89°

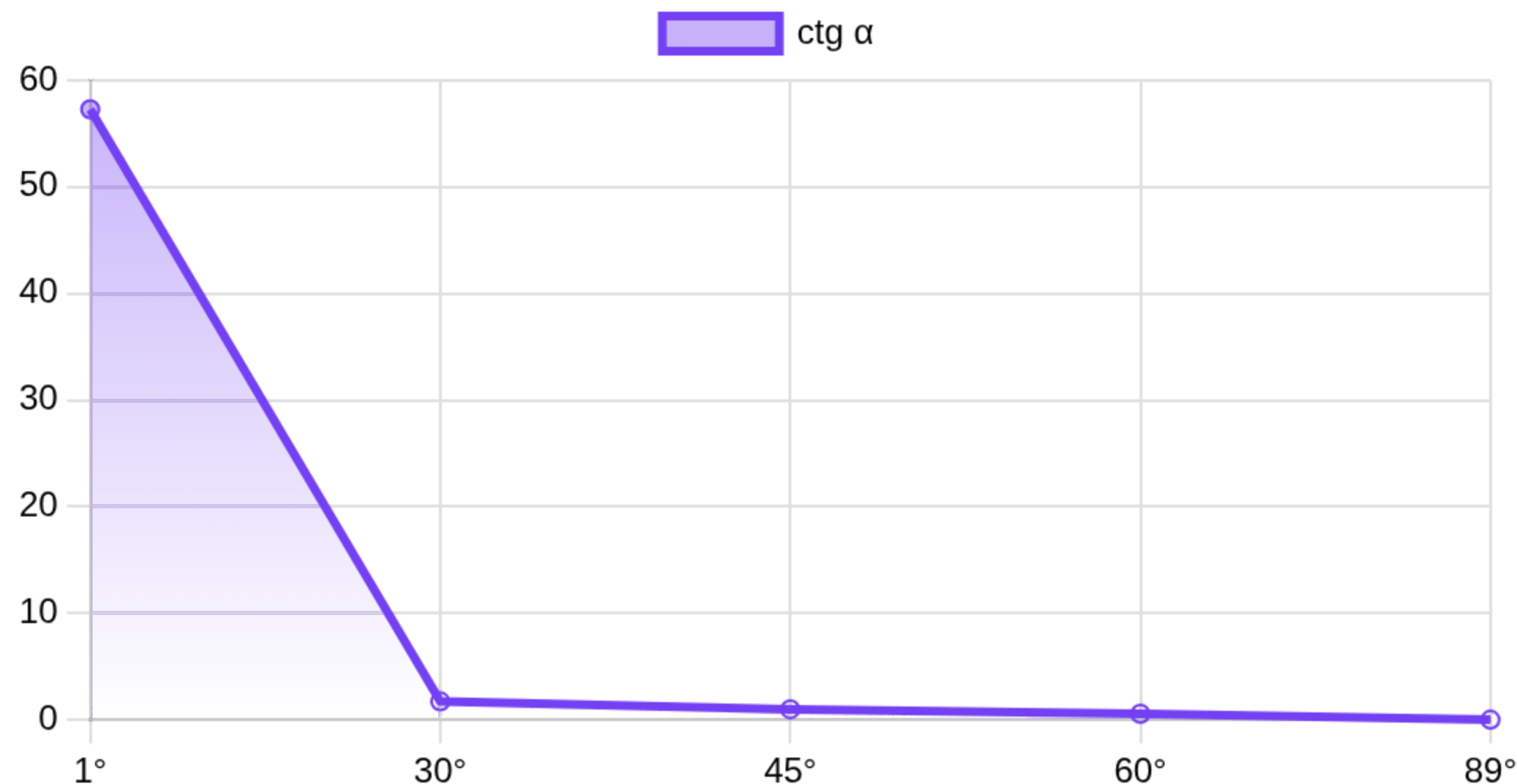
Чем больше острый угол, тем больше tg ; ближе к 90° он быстро стремится к бесконечности.

Как меняется котангенс при увеличении острого угла



Котангенс ведёт себя
противоположно тангенсу:
при росте угла его значения
уменьшаются, а около 0°
становятся очень большими.

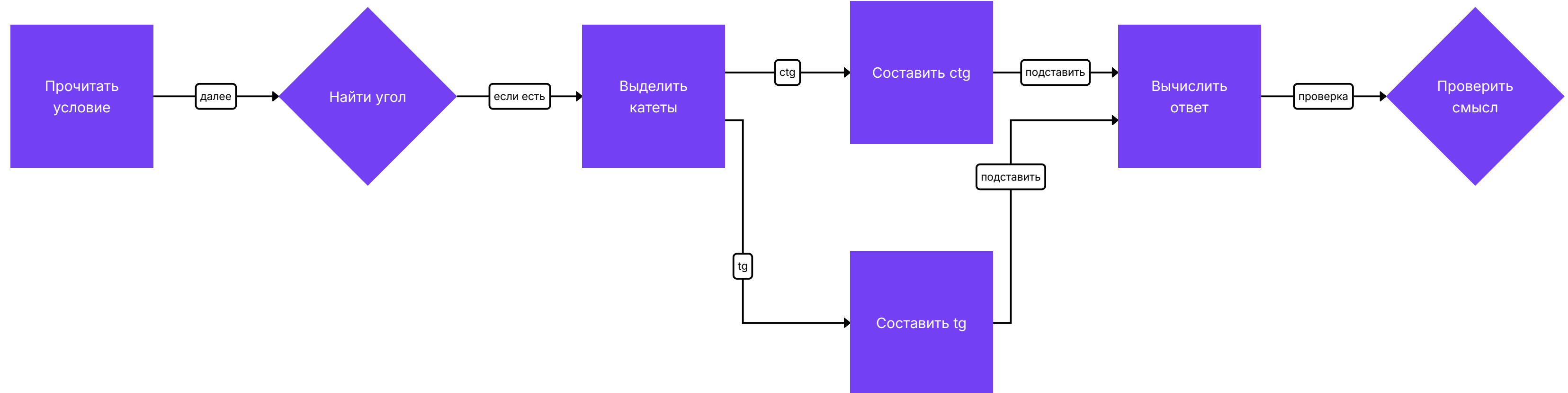
Школьные значения тригонометрических
функций для 1° , 30° , 45° , 60° и приближённо 89°



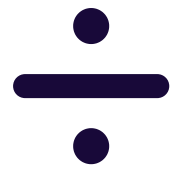
При увеличении острого угла ctg убывает,
приближаясь к нулю у 90° ; около 0° функция
стремится к очень большим значениям.

Алгоритм нахождения tg и ctg в задаче

Последовательность действий для задач на стороны и углы прямоугольного треугольника



Связь тангенса и котангенса с синусом и косинусом



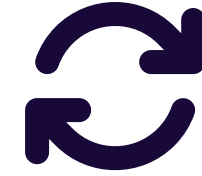
Формулы связи

Тангенс и котангенс удобно выражать через $\sin$ и $\cos$: $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha$. Поэтому их легко вычислять в уже решённых выражениях.



Без нового треугольника

Если значения синуса и косинуса уже известны, то tg и ctg находят сразу по формулам. Это экономит время и помогает решать задачи, не строя дополнительный рисунок.



Удобно в преобразованиях

Связь с $\sin$ и $\cos$ делает тангенс и котангенс полезными при преобразовании формул. Их можно заменять, когда в уравнении уже присутствуют другие тригонометрические функции.



Одна задача — разные пути

Один и тот же угол можно исследовать через стороны треугольника или через $\sin$ и $\cos$. Такие переходы особенно полезны, когда нужно выбрать самый короткий способ решения.

Знаки тангенса и котангенса на единичной окружности



▮ Первые две четверти

В I четверти обе функции положительны, потому что и синус, и косинус имеют нужные знаки. Во II четверти они становятся отрицательными, так как меняется знак косинуса.

▮ Третья и четвёртая четверти

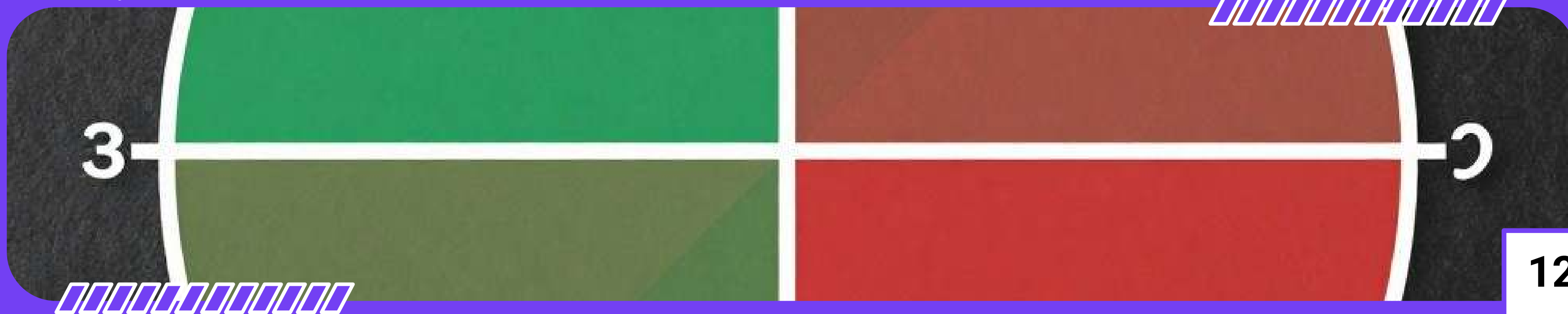
В III четверти tg и ctg снова положительны, а в IV — отрицательны. Это удобно запоминать по знакам синуса и косинуса на единичной окружности.

▮ Нули функций

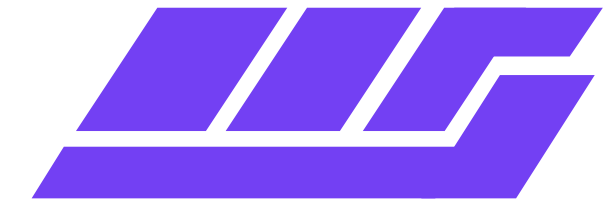
Тангенс обращается в ноль там, где синус равен нулю, а котангенс — там, где косинус равен нулю. Такие точки помогают быстро проверять графики и формулы.

▮ Точки без значения

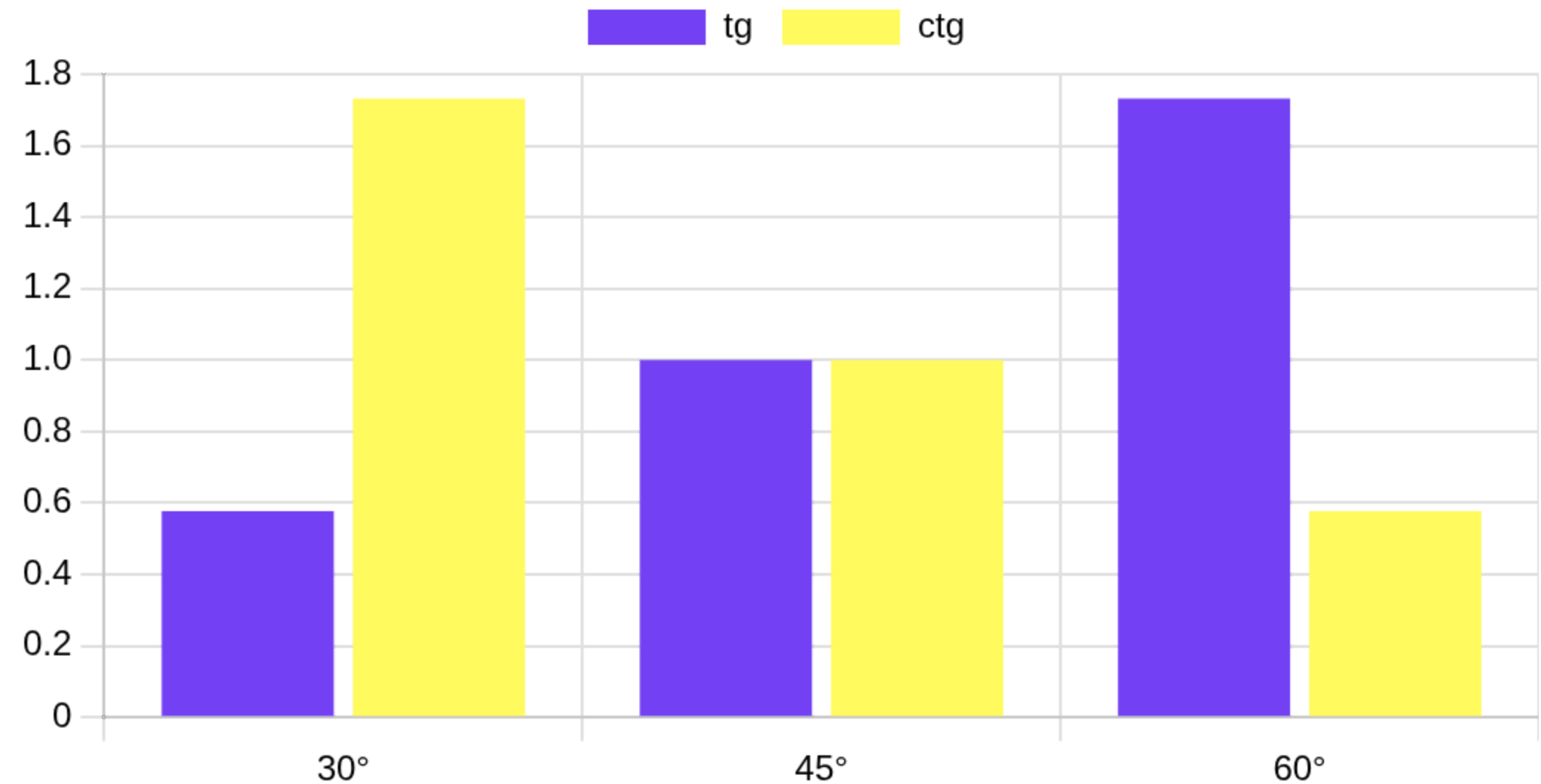
Если $\cos \alpha = 0$, тангенс не определён; если $\sin \alpha = 0$, не определён котангенс. На рисунке эти положения выделяют отдельно, чтобы не допустить ошибки в задаче.



Сравнение значений tg и ctg для стандартных углов



На диаграмме хорошо видно, что при переходе от 30° к 60° значения функций меняются в противоположных направлениях.



Школьный курс тригонометрии; стандартные значения для 30° , 45° и 60°

Чем больше острый угол, тем больше tg и меньше ctg ; при 45° обе функции равны 1.

Таблица значений для стандартных углов

Школьный курс тригонометрии

Угол	tg	ctg
0°	0	не опр.
30°	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
45°	1	1
60°	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$

Таблица помогает быстро вспомнить значения tg и ctg для самых частых углов и проверить вычисления без лишних преобразований.

Значения меняются закономерно: tg растёт, а ctg убывает; при 45° обе функции равны 1.

Типичные ошибки при работе с функциями



○ Путают катеты

Часто вместо противолежащего катета берут прилежащий или наоборот. Из-за этого выбирают неверную формулу и получают неправильный ответ, даже если вычисления выполнены аккуратно.

○ Не замечают область определения

Иногда записывают tg или ctg в точках, где функция не определена. Перед подстановкой всегда нужно проверить, не равен ли нулю знаменатель.

○ Игнорируют знак

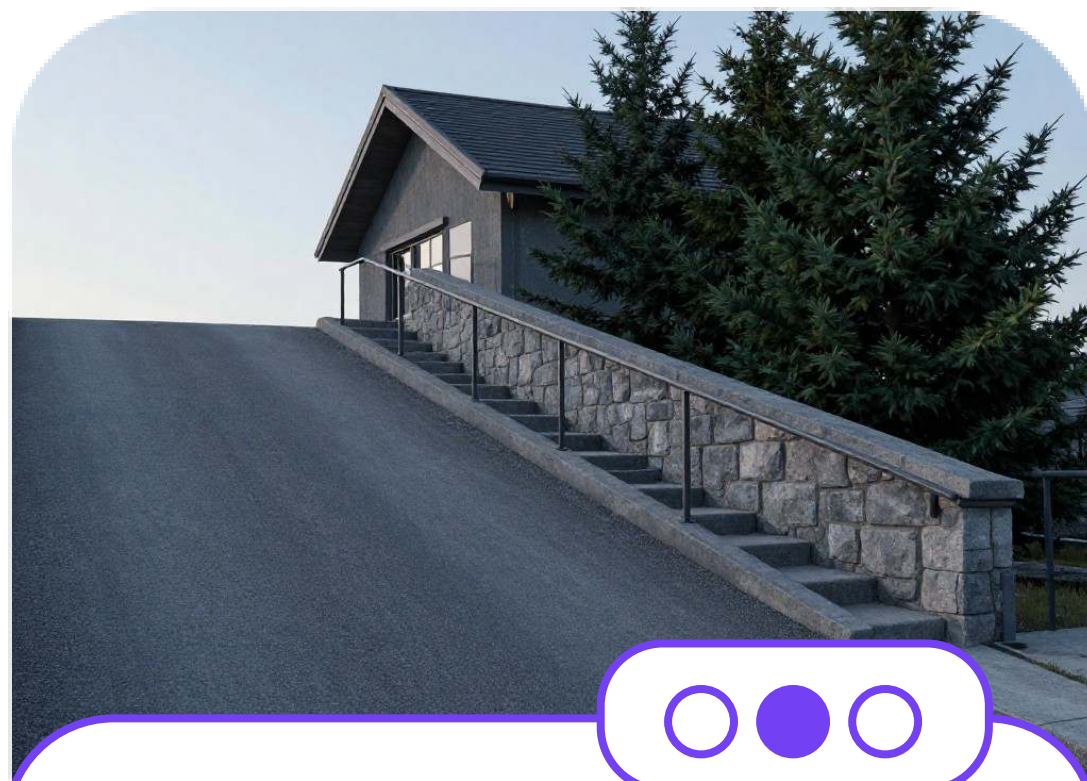
Во II и IV четвертях знаки функций меняются. Если угол не острый, нельзя автоматически считать, что tg и ctg положительны.

○ Проверяют только вычисление

Ученик может правильно посчитать дробь, но не заметить, что ответ не подходит по смыслу задачи. Полезно всегда оценивать, какой должна быть величина результата.

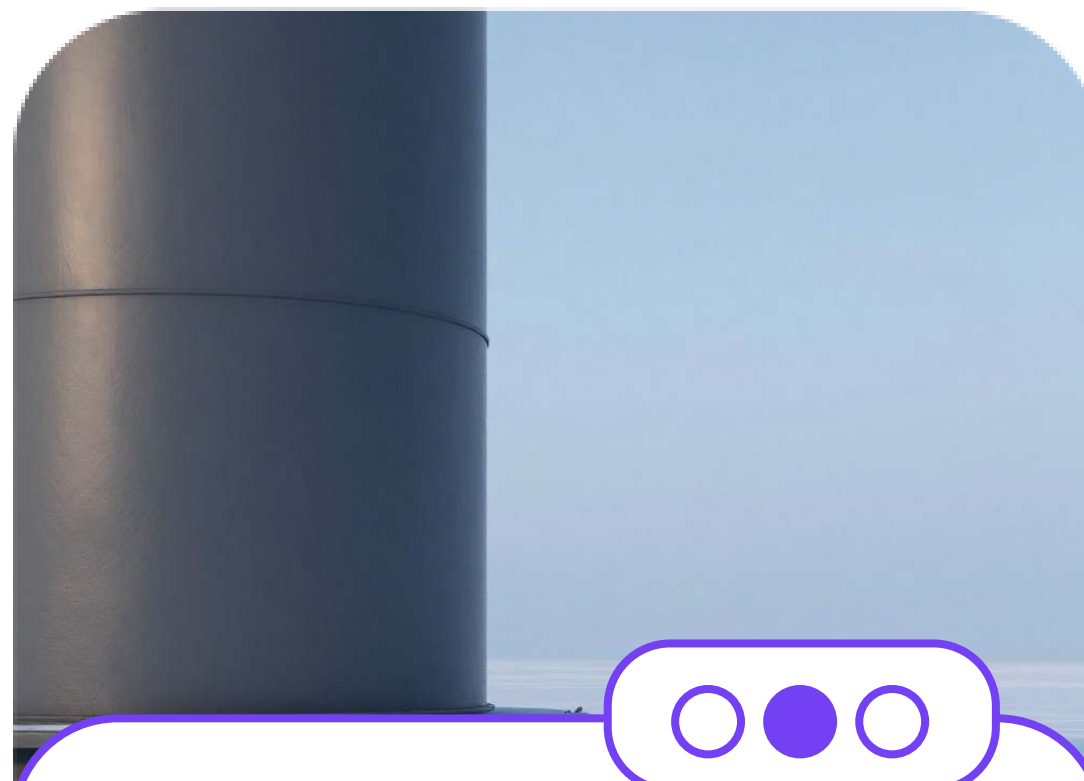


Применение тангенса и котангенса в реальных задачах



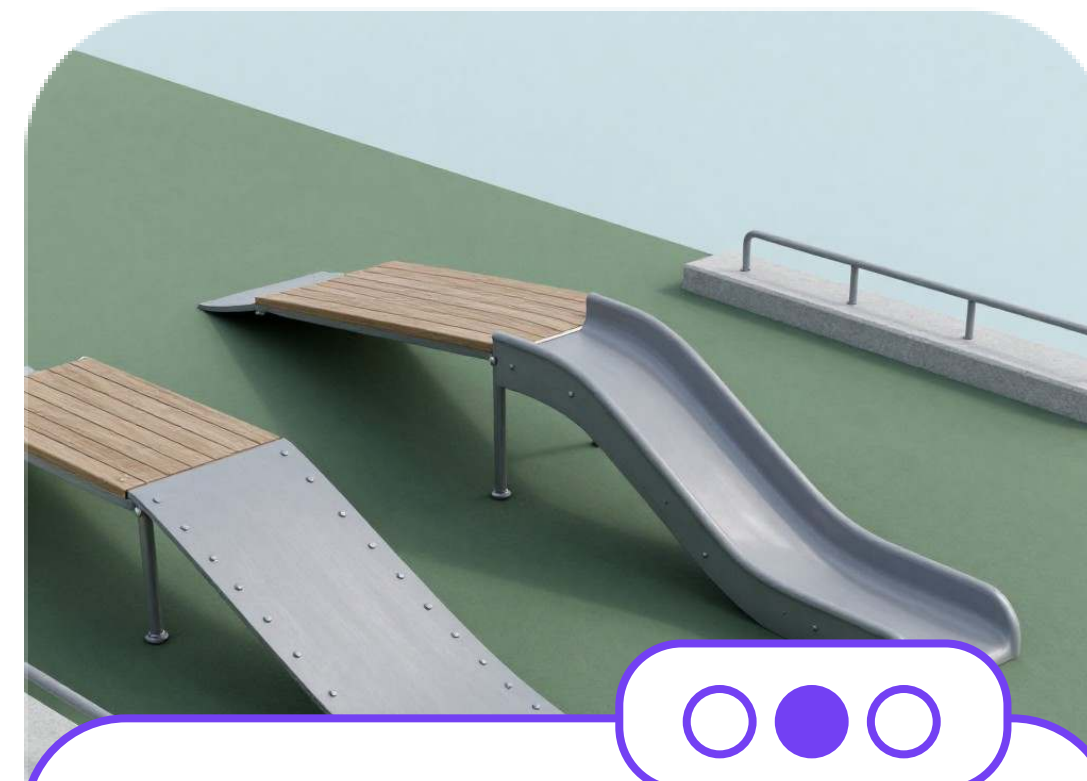
Дорога, лестница и крыша

Когда нужно узнать, насколько круто поднимается дорога, лестница или крыша, удобнее всего использовать тангенс. Он связывает высоту подъёма и горизонтальную длину основания, поэтому сразу показывает наклон конструкции. Такой расчёт помогает выбрать безопасный и удобный угол.



Высота и расстояние до объекта

Котангенс особенно полезен, если известна высота и расстояние по горизонтали. Например, так можно оценить положение вершины относительно точки наблюдения или найти недостающую сторону в чертеже. В задаче важно правильно выбрать угол, от которого ведётся отсчёт.

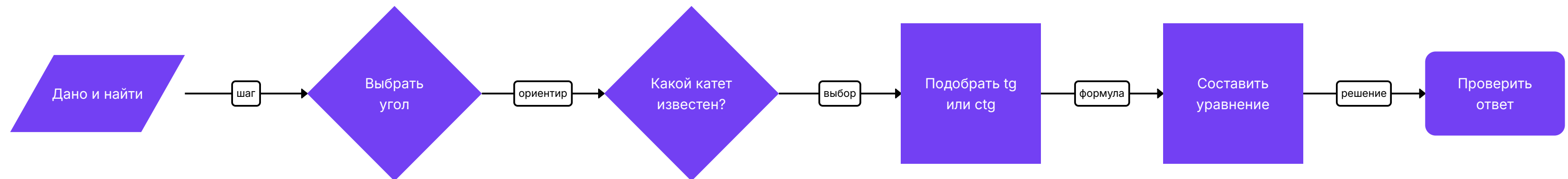


Геометрия вокруг нас

Тангенс и котангенс встречаются не только в учебнике, но и в схемах реальных объектов: рамп, горок, пандусов, склонов. Эти функции переводят жизненную ситуацию на язык треугольника, где можно точно измерить угол и длину нужного отрезка.

Как решать геометрические задачи на стороны и углы

Последовательность действий при использовании tg и ctg в прямоугольном треугольнике

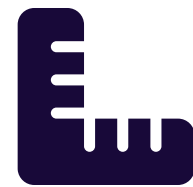


Главные свойства тангенса и котангенса



Периодичность

Обе функции повторяют свои значения через 180° . Это значит, что одинаковые результаты появляются для углов, отличающихся на пол-оборота, что удобно при работе с большими значениями.



Не зависят от размера

Тангенс и котангенс зависят только от величины угла, а не от длины сторон треугольника. Поэтому одинаковые углы в подобных фигурах дают одинаковые значения функций.



Поведение tg

Для острых углов тангенс возрастает: от 0 при малых углах до очень больших значений рядом с 90° . Это помогает заранее понять, каким должен быть ответ в задаче.



Поведение ctg

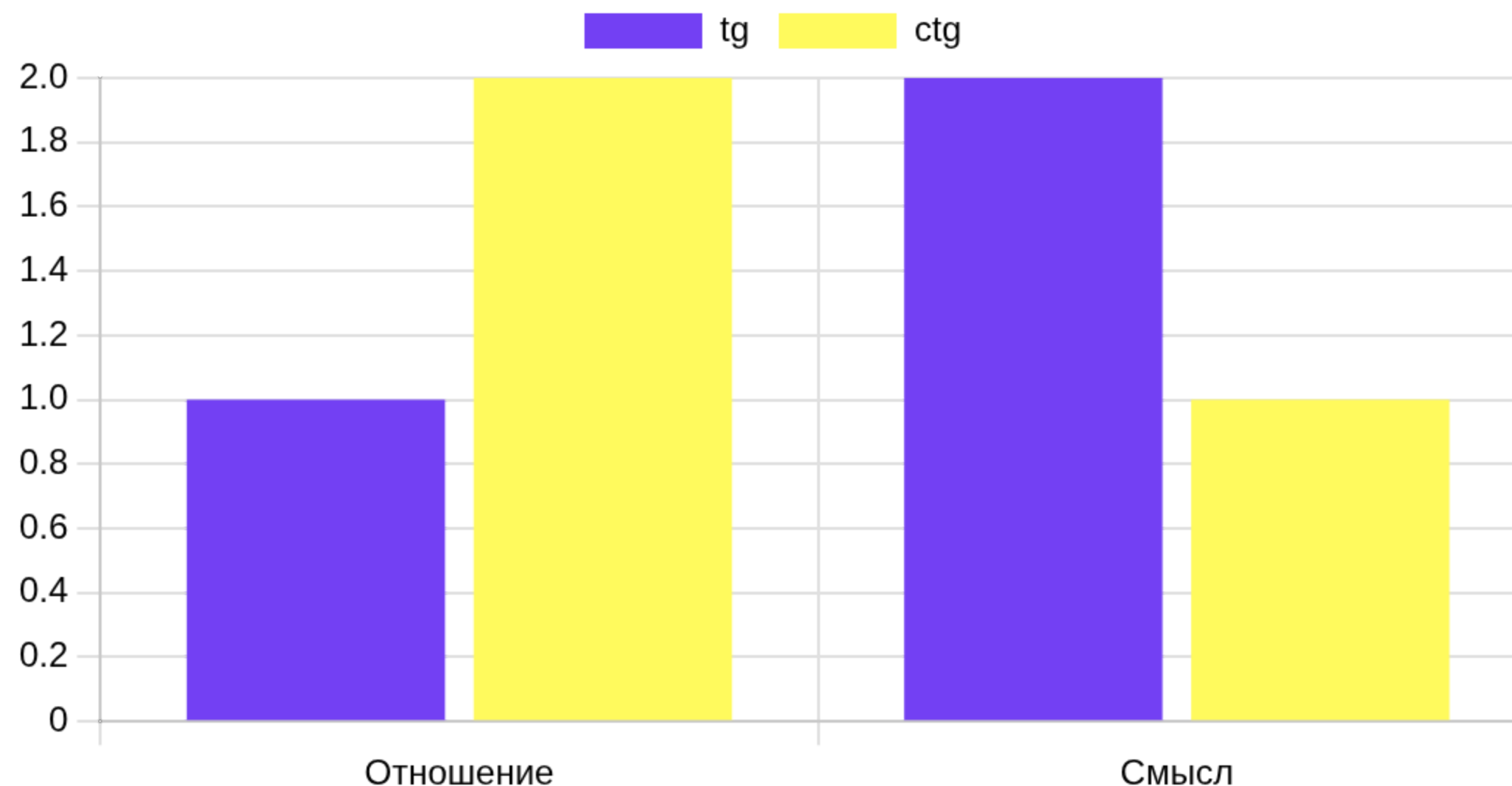
Котангенс ведёт себя наоборот: он убывает от больших значений к нулю. Если угол становится больше, ctg уменьшается, и это удобно использовать для быстрой проверки результата.



Сравнение смысла функций tg и ctg



Обе функции описывают один и тот же прямоугольный треугольник, но смотрят на него с разных сторон: через высоту и основание.





Тангенс и котангенс: главное без лишнего



Тангенс и котангенс помогают быстро описывать угол через стороны треугольника, находить неизвестные величины и проверять ответ. Если помнить определения, знаки и стандартные значения, задачи становятся заметно проще.

