

Принцип Кавальери: сравнение фигур по сечениям



Сравниваем площади и объёмы по параллельным сечениям: совпадает «рисунок слоёв» — совпадает мера.

От сечений к объёму: как возник принцип Кавальери



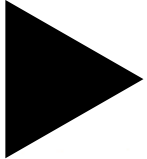
Бонавентура Кавальери (1598–1647) в XVII веке предложил рассматривать фигуры как наборы «неделимых». Идеи опередили строгий анализ и стали мостом к интегральным методам: где трудно считать целое, помогает сравнение слоёв.



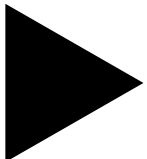
Принцип Кавальери для плоских фигур



Рассмотрим две плоские фигуры между одной парой параллельных прямых. Если на каждой прямой, параллельной границам, отрезки внутри фигур имеют равную длину, их площади совпадают.



Важно проверять это для всех «уровней», а не для нескольких выбранных сечений. Только полное совпадение по длине на каждой параллельной прямой гарантирует равенство площадей.



Смысл в том, что фигуры составлены из полос одинаковой высоты: когда на каждой высоте «полосы» по длине совпадают, совпадает и суммарная площадь.

Принцип Кавальери для пространственных тел

► Возьмём два тела одинаковой высоты. Если для любой плоскости, параллельной основаниям, площади их сечений на соответствующих уровнях равны, то объёмы тел равны.

◄ Сравнение проводят на одних и тех же высотах, сохраняя направление плоскостей. Тогда каждому «горизонтальному слою» одного тела соответствует слой другого тела с той же площадью.

▼ Идея проста: объём набирается как сумма одинаковых по площади слоёв по высоте. Когда площади всех таких слоёв совпадают, совпадает и итоговый объём.

Геометрический смысл: тело как сумма тонких слоёв

Слои одинаковой толщины

Мысленно разложим тело на множество очень тонких слоёв одинаковой толщины. Для каждого уровня важна площадь поперечного сечения: если она совпадает у двух тел, то совпадает и общий объём.

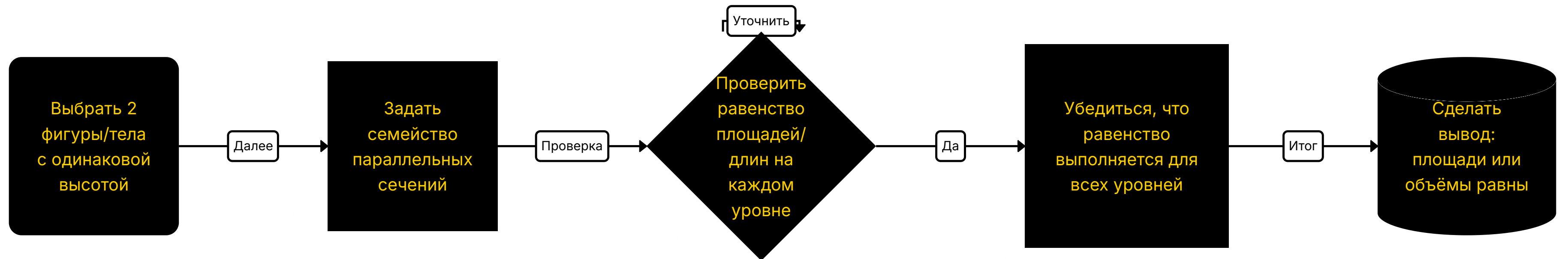
Прямой и наклонный цилиндр

На иллюстрации удобно сравнивать прямой и наклонный цилиндр: боковая поверхность выглядит по-разному, но площади сечений на соответствующих высотах остаются одинаковыми. Поэтому объём сохраняется.



Как применять принцип Кавальери на практике

Пошаговая схема сравнения фигур по «поперечным слоям»



Условия, при которых принцип работает корректно

- ▶ У сравниваемых фигур должна быть одна «высота» или, точнее, одинаковый диапазон уровней. Тогда соответствующие сечения берутся на тех же расстояниях от основания.
- ▶ Сечения выбираются параллельно друг другу и сравниваются на одних и тех же высотах. Менять направление плоскостей или уровни нельзя: нарушается соответствие слоёв.
- ▶ Недостаточно проверить только основание или одну грань. Принцип требует равенства всех параллельных срезов, иначе одинаковость «локальна», а не глобальна.
- ▶ Метод особенно удобен для фигур с криволинейными границами и для тел вращения: там сечение часто выражается проще, чем весь объём.

Слои с одинаковыми площадями дают равные объёмы

Если линии $S(h)$ для двух тел совпадают по всей высоте, то их объёмы равны — форма между слоями может отличаться.

Совпадение зависимости площади сечения от высоты означает равенство суммы слоёв, а значит, и равенство объёма.

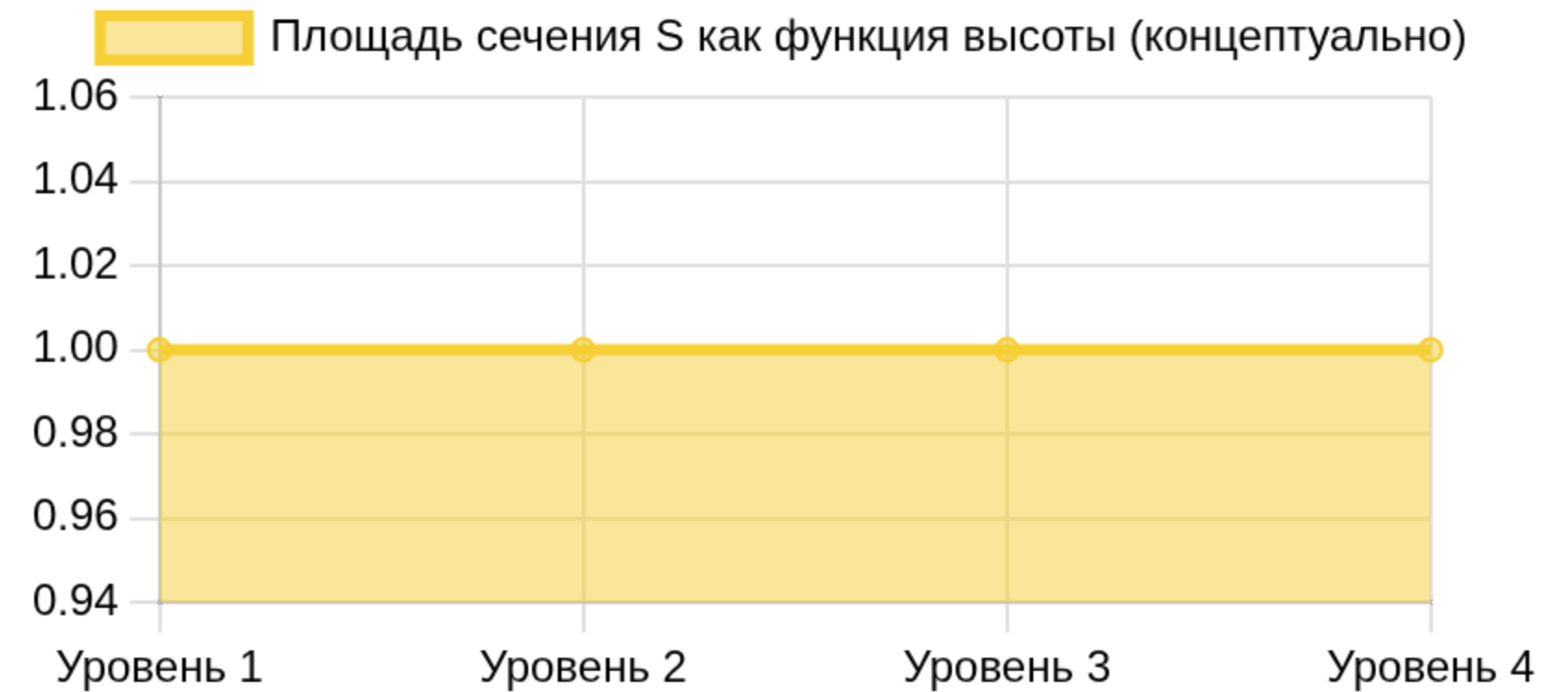


Схема для иллюстрации принципа, без привязки к конкретным численным измерениям.

Сравнение фигур и тел по принципу Кавальери

Объект	Одинаковая высота	Вид сечений	Вывод
Две плоские фигуры	Есть диапазон между параллельными прямыми	Отрезки на параллельных прямых	Площади равны
Прямой и наклонный цилиндр	Одинаковая высота	Круги на параллельных плоскостях	Объёмы равны
Тела вращения	Одинаковая высота	Сечения, полученные вращением	Объёмы равны

Равенство всех параллельных сечений приводит к равенству площади (для плоских фигур) или объёма (для пространственных тел).

Ключевой критерий — совпадение всех соответствующих параллельных сечений на всём протяжении высоты.

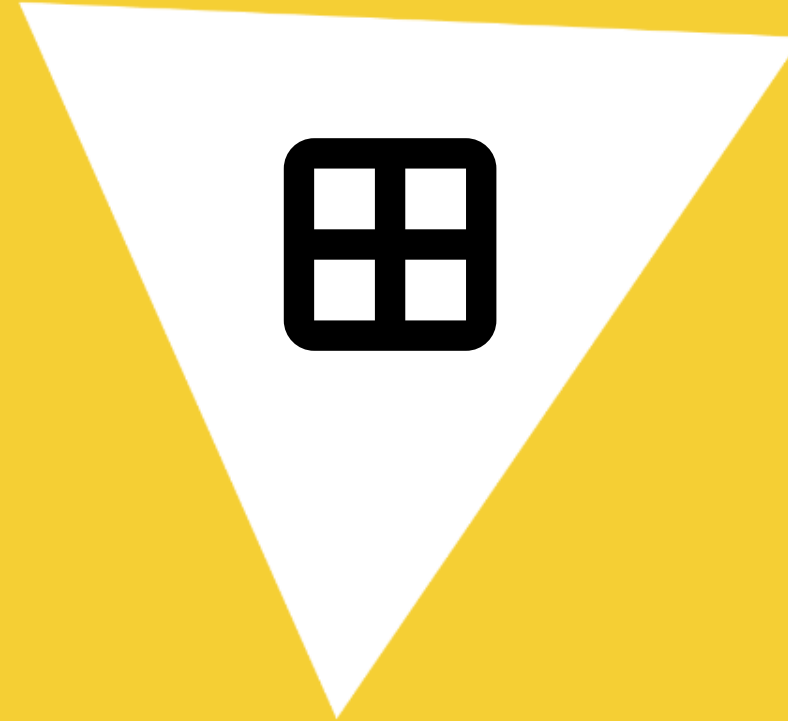
Составлено по формулировкам принципа Кавальери.

Классический пример: прямой и наклонный цилиндр



Одинаковые параметры

У прямого и наклонного цилиндра одинаковы радиус основания и высота. При одинаковой высоте сравниваем сечения на равных уровнях, чтобы слои точно «соотносились» друг с другом.



Сечения как равные круги

Любая плоскость, параллельная основаниям, пересекает оба цилиндра по окружности одного и того же радиуса. Значит, площади поперечных сечений совпадают на каждом уровне по высоте.



Наклон не меняет объём

Хотя боковые образующие наклонного цилиндра выглядят иначе, принцип Кавальери учитывает именно площади слоёв. Если каждый слой имеет ту же площадь, то суммарный объём остаётся тем же.

Связь с формулой объёма цилиндра



Цилиндр удобно «разобрать» на тонкие круговые слои: на каждой высоте сечение параллельно основанию даёт один и тот же круг радиуса r .



Площадь такого сечения равна $S = \pi r^2$ и не меняется при движении по высоте, поэтому все слои одинаковы по площади.



Если сложить вклад каждого слоя по высоте h , получается $V = \pi r^2 \cdot h$: именно это и выражает принцип Кавальери как сумма одинаковых площадей сечений.

Изменение площади сечения по высоте

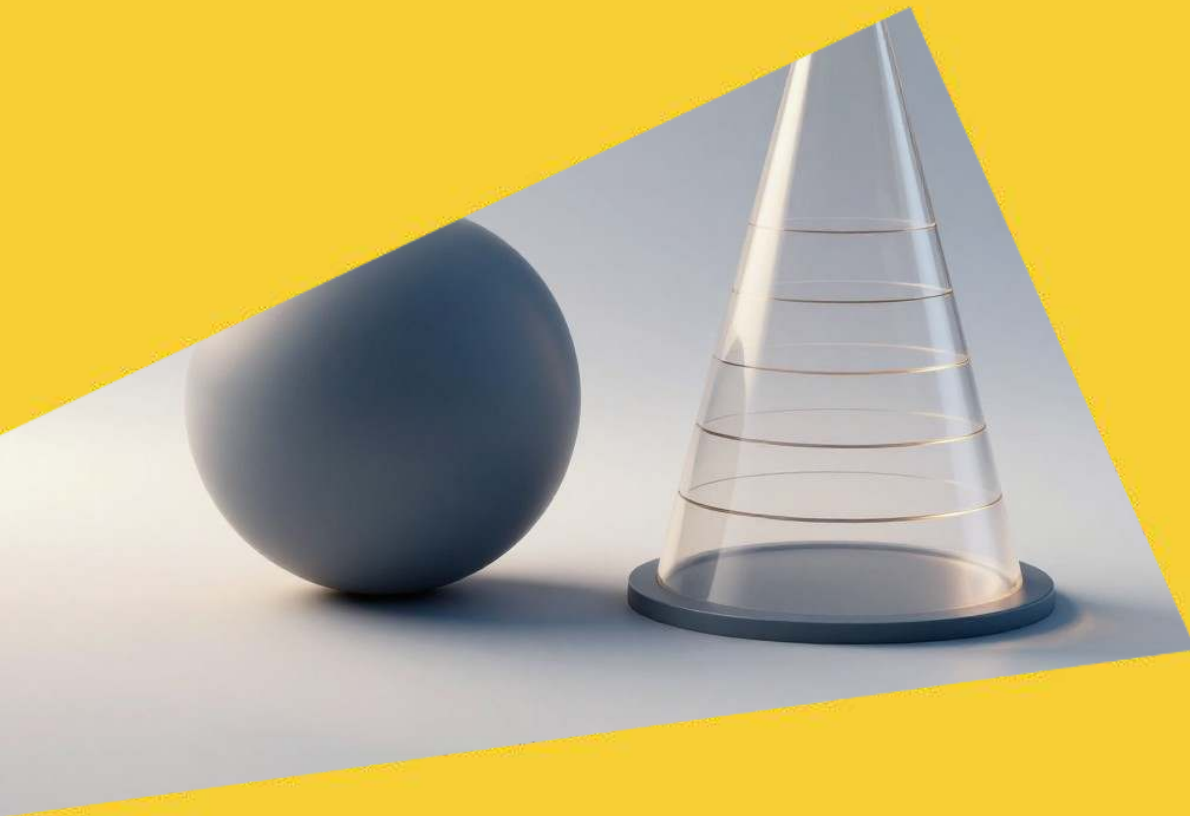
Если две фигуры имеют одинаковую функцию $A(h)$ — площадь сечения на уровне h , то их суммарный объём совпадает, даже когда боковые границы различны.

Совпадение графиков означает равенство всех соответствующих сечений по площади, значит, по принципу Кавальери объёмы будут равны на одной высотной «развёртке».



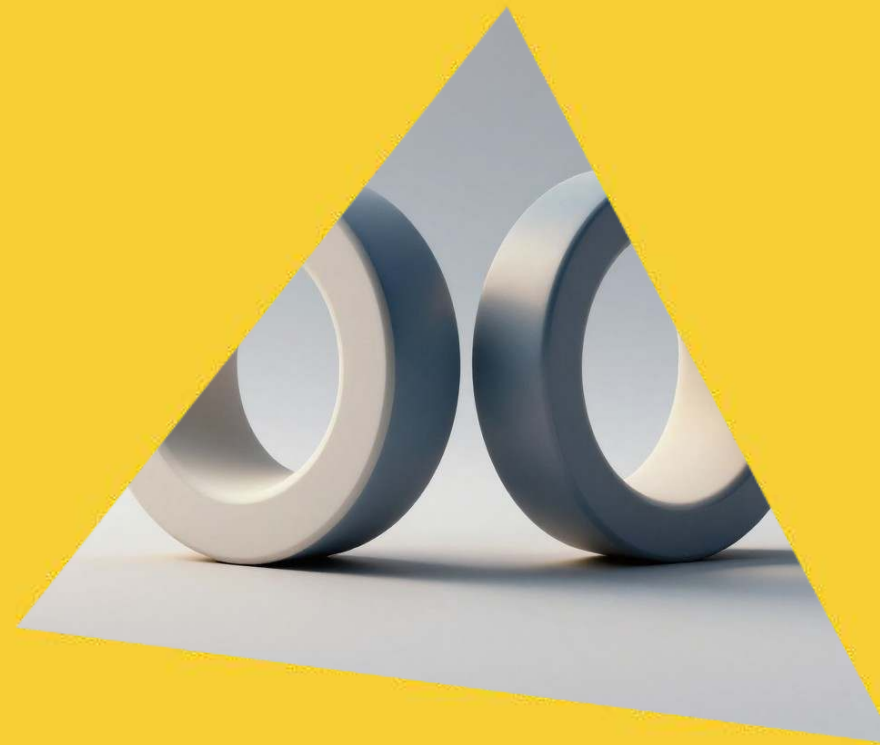
Схематичные значения (иллюстрация принципа Кавальери): $A(h)$ одинаково для обоих тел на всём интервале высоты.

Применение к телам вращения



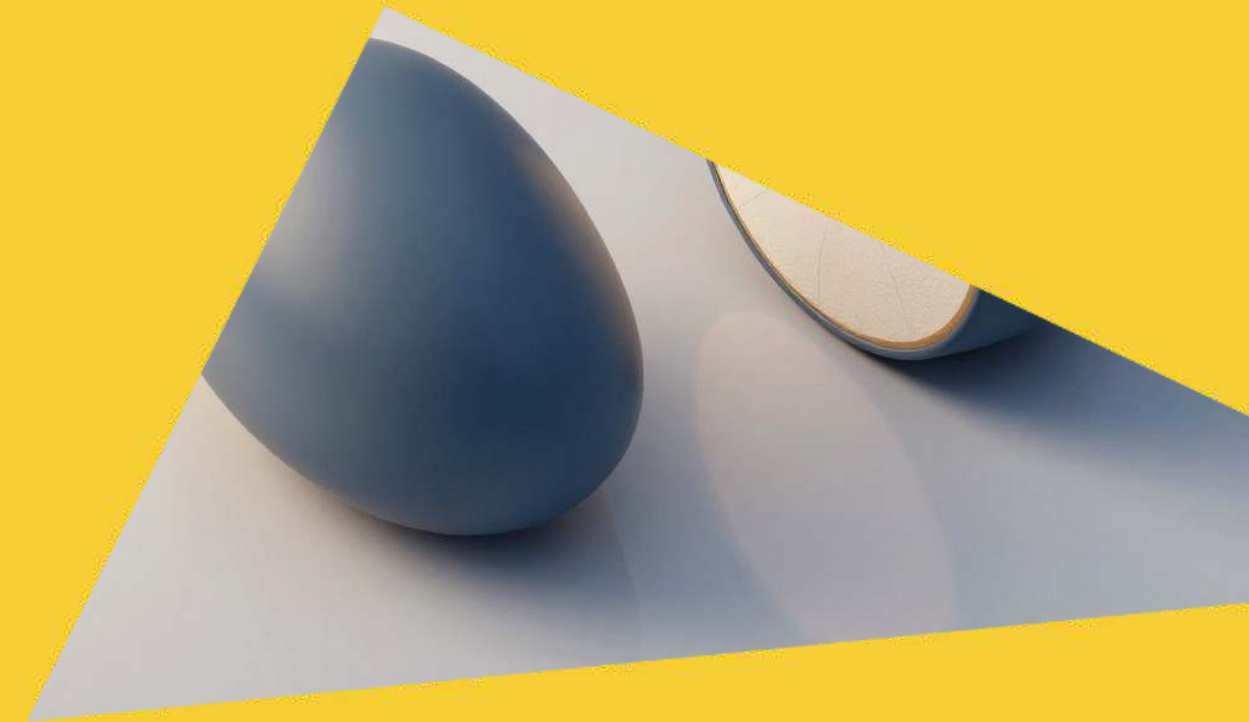
Шар и конус: одинаковая «внутренняя карта» сечений

Представьте тела, полученные вращением вокруг оси, и режьте их плоскостями, параллельными основанию. При совпадении площадей круговых сечений на одинаковых уровнях объёмы автоматически совпадают. Это особенно хорошо видно на круговых контурах разной внешности.



Цилиндр vs наклонная форма: форма меняется — слои сохраняют меру

Даже когда боковая поверхность выглядит иначе, вращение задаёт строгую систему круговых сечений. Если на каждом уровне площадь соответствующих кругов одна и та же, принцип Кавальери «снимает» вопрос о внешней форме. Тогда объём определяется внутренней структурой слоёв.



Как сравнить тела, если объём посчитать трудно

Тела вращения часто имеют гладкие поверхности, но прямое вычисление объёма бывает громоздким. Гораздо проще выразить радиус сечения на уровне h и получить площадь $A(h)$. Дальше достаточно сравнить $A(h)$ для разных тел и сделать вывод о равенстве объёмов.

Место принципа в развитии математики

Классическая геометрия (Евклид)

▶ Геометрия строилась вокруг измерения по внешним характеристикам и вычислений по известным формулам. Сравнение фигур по «внутренним» разрезам ещё не стало центральным инструментом.

XVII век: Бонавентура Кавальери

▶ Кавальери формулирует метод неделимых и идею сравнения площадей и объёмов через параллельные сечения. Это даёт способ обходить сложные прямые вычисления.

Переход к идее интеграла

▶ Логика суммирования бесконечно тонких слоёв подводит к интегральным методам. По сути, принцип готовит язык, в котором объём становится «накоплением» площадей по высоте.

Ньютон и Лейбниц: математический анализ

▶ После работ Ньютона и Лейбница развиваются систематические правила вычисления через интеграл и предельные переходы. Кавальери оказывается важным звеном между геометрией и анализом.

Когда принцип применим, а когда вывод неверен

Ситуация	Условия	Нарушение	Итог
Корректный случай	Одинаковая высота	Параллельные сечения	Равны площадь/ объём
Локальное совпадение	Сравнение только части уровней	Не выполняется равенство по всей высоте	Вывод неверен
Сбивка уровней	Высоты не согласованы	Сечения берут на разных «планках»	Равенство не гарантируется
Непараллельные сечения	Сравниваются не параллельно	Идёт другая ориентация уровней	Равенство не выводится

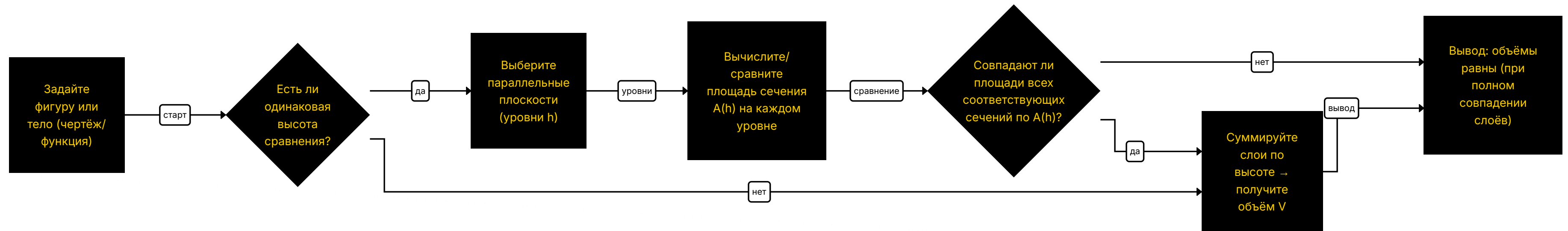
Сопоставьте условия корректного применения и типичные нарушения. Вывод о равенстве мер появляется только при выполнении всех требований по высоте и параллельности.

Принцип работает как строгий глобальный критерий: равенство по всем соответствующим уровням заменяет вычисления объёма, а локальное или «почти» совпадение — нет.

От сечения к вычислению

объёма

Вязи принцип Кавальери с идеей интеграла: объём накапливается как сумма площадей слоёв по высоте.



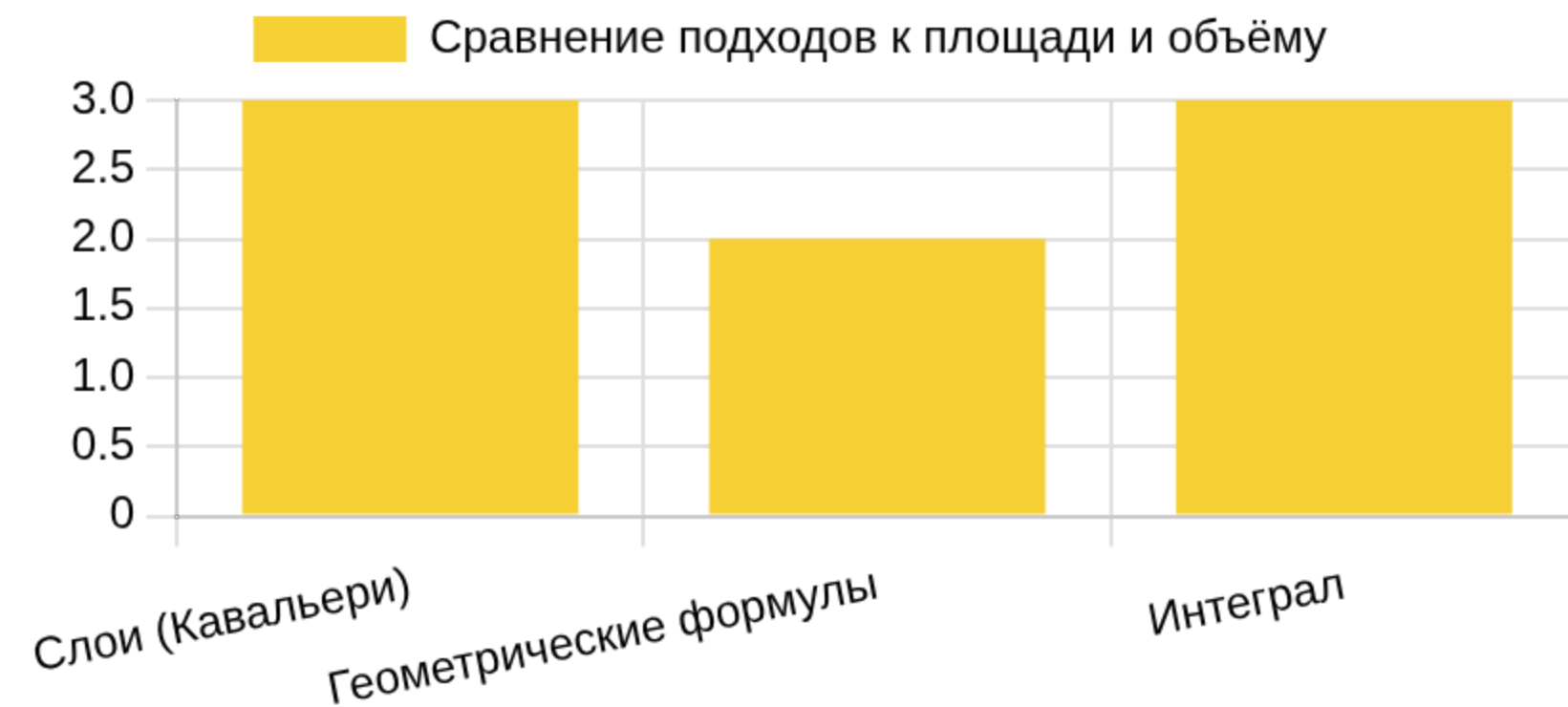
Типичные ошибки при изучении темы

- ▶ Самая частая ошибка — сравнивать только площади оснований и делать вывод про объём. Но принцип требует совпадения всех соответствующих параллельных сечений, а не одного уровня.
- ▶ Иногда путают одинаковую внешнюю форму с одинаковой мерой. Два тела могут выглядеть по-разному, но иметь ту же структуру сечений — и тогда объёмы действительно совпадают.
- ▶ Ещё один промах связан с высотой: если сравниваемые тела имеют разную высотную протяжённость, то «уровень» h для них не совпадает. Тогда слои складываются по-разному.
- ▶ Принцип Кавальери доказывает равенство лишь при глобальном совпадении по всей высоте: локальное совпадение не заменяет полное, поэтому частичные графики вводят в заблуждение.

Сравнение способов нахождения площади и объёма

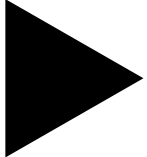
Для фигур с «ломаными» или криволинейными границами удобнее начинать со сечений: они превращают сложную геометрию в согласованную картину слоёв.

Диаграмма показывает, что метод Кавальери особенно нагляден как мост между рисунком и строгими вычислениями: он приводит к тем же значениям, что и формулы или интеграл.

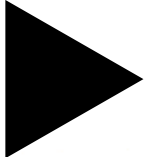


Качественная шкала (оценка наглядности/универсальности для учебных задач), не численные физические данные.

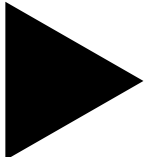
Практическая ценность для школьной геометрии



В школьных задачах принцип Кавальери помогает там, где требуется доказательство равенства, а прямой расчёт усложняется. Он развивает привычку смотреть на фигуру через разрезы, а не только через формулы.



Метод удобно применять и в олимпиадных сюжетах: сначала сравнивают сечения на одинаковых уровнях, а затем делают вывод о равенстве площади или объёма. Так доказательство становится короче и прозрачнее.



Для первой встречи с интегральными идеями принцип особенно полезен: ученики интуитивно понимают сумму тонких слоёв и начинают видеть инварианты, которые сохраняются несмотря на изменение формы.

Итог: равные сечения дают равную меру

Принцип Кавальери утверждает: при одинаковой высоте равенство всех параллельных сечений по площади приводит к равенству площадей или объёмов. Геометрическая форма не всегда определяет величину — решает структура сечений.