

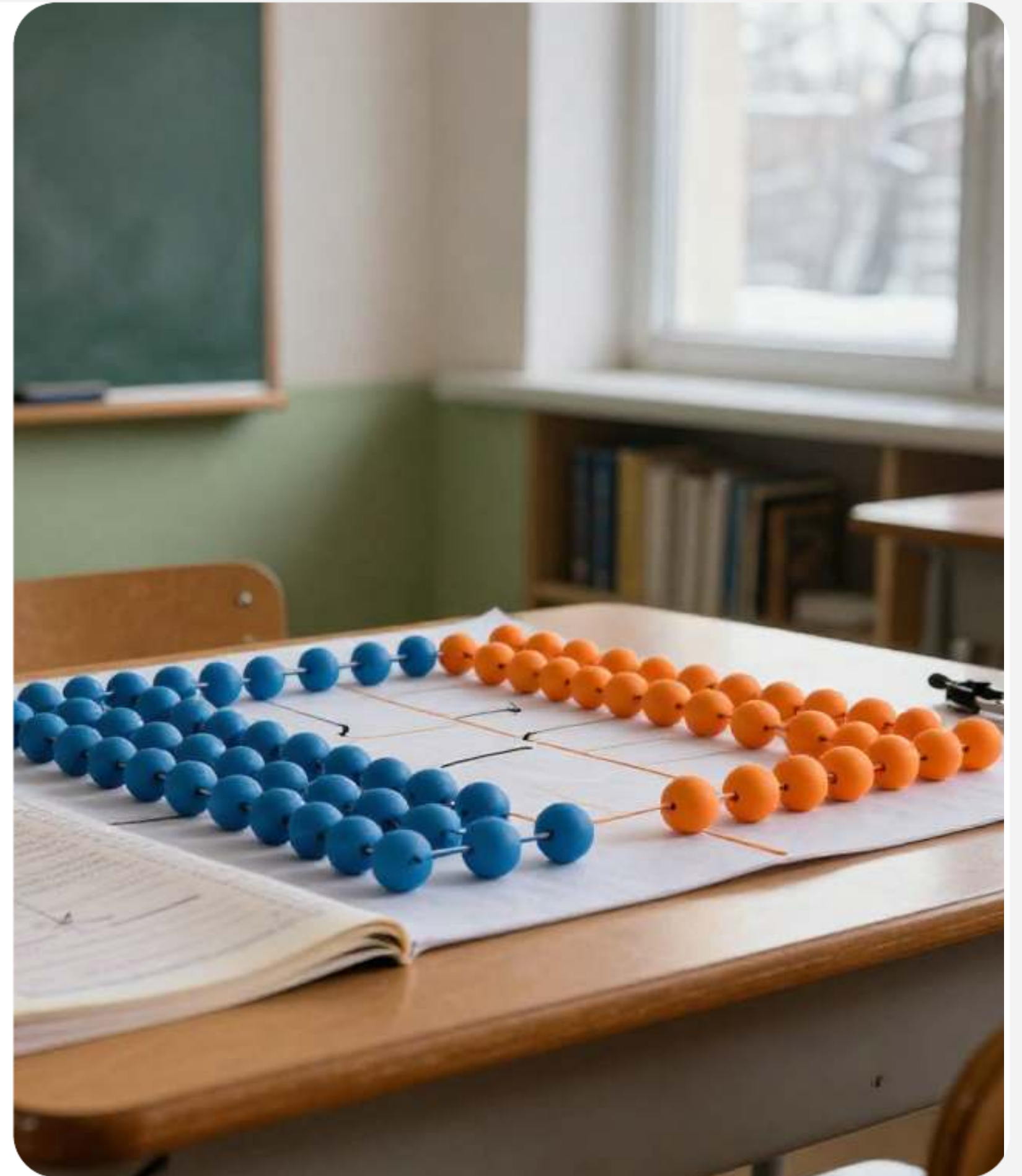
Свойства функций: как понимать поведение графика

Как читать график функции без лишних
вычислений?



Зачем изучать свойства функций в 9 классе

В 9 классе свойства функций помогают быстро понимать графики и описывать реальные ситуации: движение, температуру, стоимость и рост. Эти знания нужны, чтобы находить важные точки, сравнивать функции и делать выводы по рисунку, а не только по таблице значений.



Область определения функции

Что означает область

Область определения показывает, какие значения x можно подставлять в формулу, чтобы выражение имело смысл. Это первый шаг при изучении любой функции.

Простой пример

Для функции $y = x^2$ подходят все действительные числа, потому что квадрат можно найти для любого x . Ограничений здесь нет.

Когда есть запрет

У функции $y = 1/x$ нельзя брать $x = 0$, так как деление на ноль невозможно. Поэтому область определения этой функции не включает ноль.

Область значений функции

Какие y возможны

Область значений состоит из всех значений y , которые функция действительно может принимать. Она отвечает на вопрос: какие результаты возможны у этой зависимости?

Линейная зависимость

У линейной функции $y = kx + b$ при $k \neq 0$ обычно нет верхней или нижней границы. Поэтому ее область значений — все действительные числа.

Квадратичный пример

У функции $y = x^2$ все значения неотрицательны: график лежит на оси Ox или выше нее. Значит, y меньше нуля быть не может.

Как график помогает увидеть свойства функции

Пересечения с осями

По графику легко заметить, где линия или кривая пересекает ось Ox и ось Oy . Эти точки помогают быстрее находить нули функции и начальное значение.

Рост и убывание

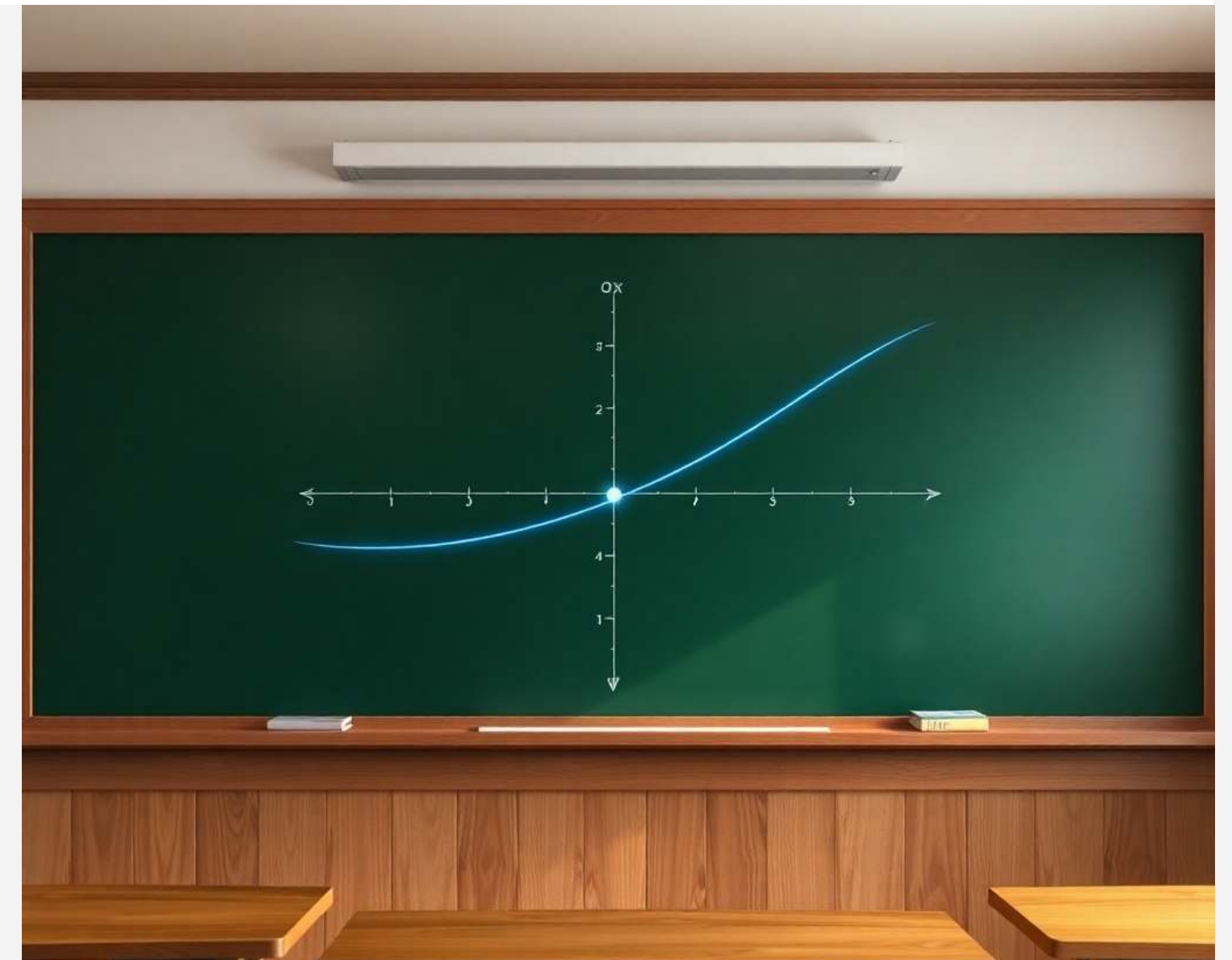
Если график идет вверх слева направо, функция возрастает. Если он опускается, функция убывает. Это видно сразу, без длинных вычислений.

Максимум и минимум

На рисунке можно увидеть самую высокую или самую низкую точку графика. Она подсказывает, есть ли у функции наибольшее или наименьшее значение.

Один рисунок — много сведений

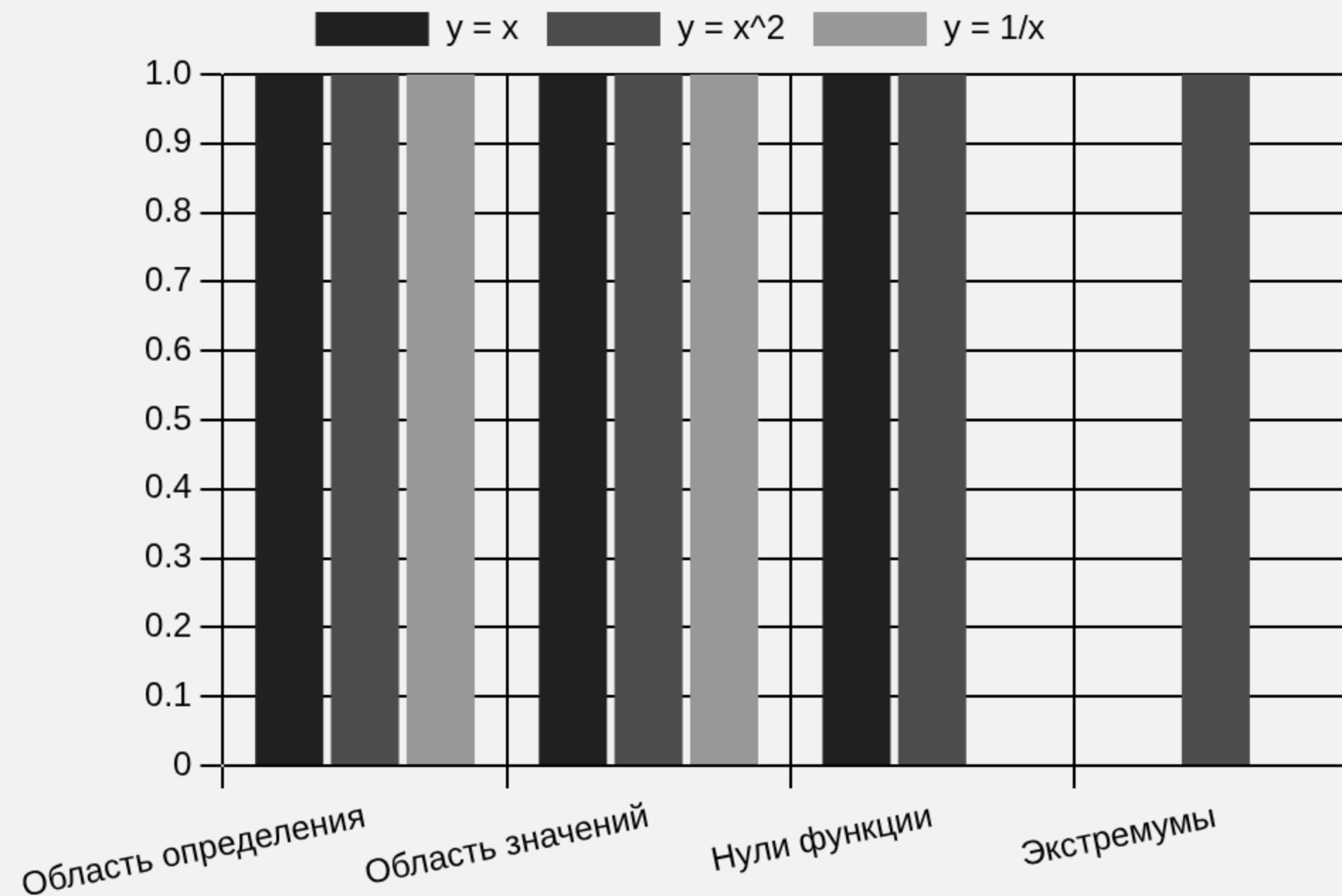
Хорошо построенный график показывает сразу несколько свойств: область значений, нули, промежутки изменения и общую форму зависимости. Поэтому он особенно удобен для анализа.



Сравнение свойств трех базовых функций

Диаграмма показывает, что даже простые функции заметно различаются по поведению. Это помогает запоминать свойства не отдельно, а в сравнении.

У каждой функции свой набор признаков: у $y = x$ и $y = x^2$ есть нули, а у $y = 1/x$ нет нулей и экстремумов.



Нули функции и знак функции

1

Что такое нули

Нули функции — это такие значения x , при которых $y = 0$. На графике они лежат точно на оси Ox и сразу заметны.

2

Положительные и отрицательные значения

Если график расположен выше оси Ox , функция положительна. Если ниже, значения функции отрицательны. Это и называют знаком функции на промежутке.

3

Сколько нулей бывает

У квадратичной функции нулей может быть 0, 1 или 2. Все зависит от того, как парабола расположена относительно оси Ox .

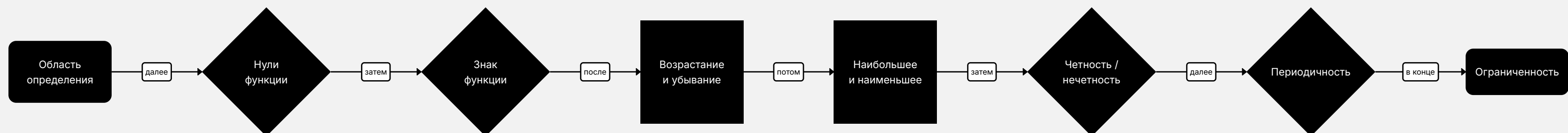
4

Линейная функция

У линейной функции с ненулевым коэффициентом обычно один нуль. График пересекает ось Ox в одной точке, если прямая не параллельна ей.

Порядок исследования функции

Последовательность шагов для анализа формулы и графика функции



Промежутки возрастания и убывания

1

Что значит возрастать
Функция возрастает, если при увеличении x значения y тоже увеличиваются. На графике такой участок идет снизу вверх слева направо.

2

Что значит убывать
Функция убывает, если при увеличении x значения y уменьшаются. Тогда график опускается сверху вниз слева направо.

3

Линейная функция
У функции $y = kx + b$ знак коэффициента k сразу показывает поведение графика. При $k > 0$ прямая возрастает, а при $k < 0$ убывает.

4

Квадратичная функция
У функции $y = x^2$ убывание сменяется возрастанием в вершине параболы. Поэтому одну часть графика изучают отдельно от другой.

Наибольшее и наименьшее значение функции

Не всегда существуют

У некоторых функций нет ни максимума, ни минимума. Это значит, что график не имеет самой высокой или самой низкой точки на всей области определения.

Когда удобно искать

Максимум и минимум легче всего находить по графику, если видна вершина, поворот линии или граница области определения. Тогда ответ можно получить быстро и точно.

Пример параболы

У функции $y = x^2$ наименьшее значение равно 0, потому что вершина параболы находится в точке $(0; 0)$. Наибольшего значения у нее нет.

Свойства основных функций 9 класса

Сравнение трех базовых функций помогает быстро увидеть, чем отличаются их графики и какие свойства можно определить сразу по виду зависимости.

У линейной функции нет ограничений и экстремумов, у параболы есть минимум, а у дробной функции исключена точка $x = 0$ и недостижимо значение $y = 0$.

Функция	$D(f)$	$E(f)$	Нули	Экстремум
$y = x$	все x	все y	1	нет
$y = x^2$	все x	$y \geq 0$	1	$\min 0$
$y = 1/x$	$x \neq 0$	$y \neq 0$	нет	нет

Четные и нечетные функции

1

Симметрия четной функции

Четная функция сохраняет значение при замене x на $-x$. Ее график симметричен относительно оси Oy , поэтому левая и правая части выглядят как зеркальное отражение.

2

Признак нечетной функции

Нечетная функция меняет знак при замене x на $-x$. Такой график сохраняет вид при повороте на 180° вокруг начала координат, а не при отражении относительно оси.

3

Примеры из школьного курса

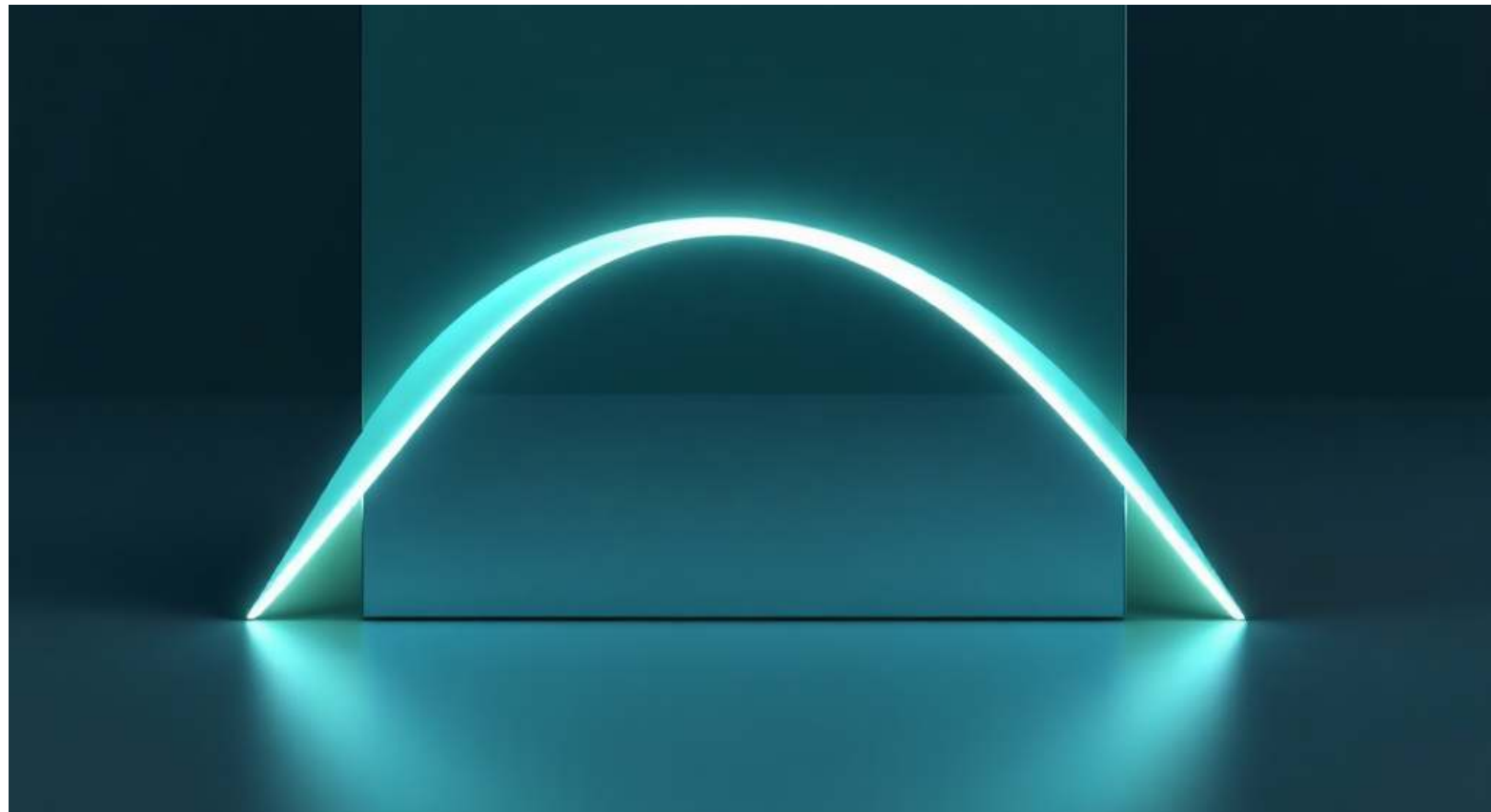
Функция $y = x^2$ является четной, потому что значения слева и справа от нуля совпадают. Функция $y = x^3$ — нечетная, так как ее график проходит через начало координат.

4

Не все функции симметричны

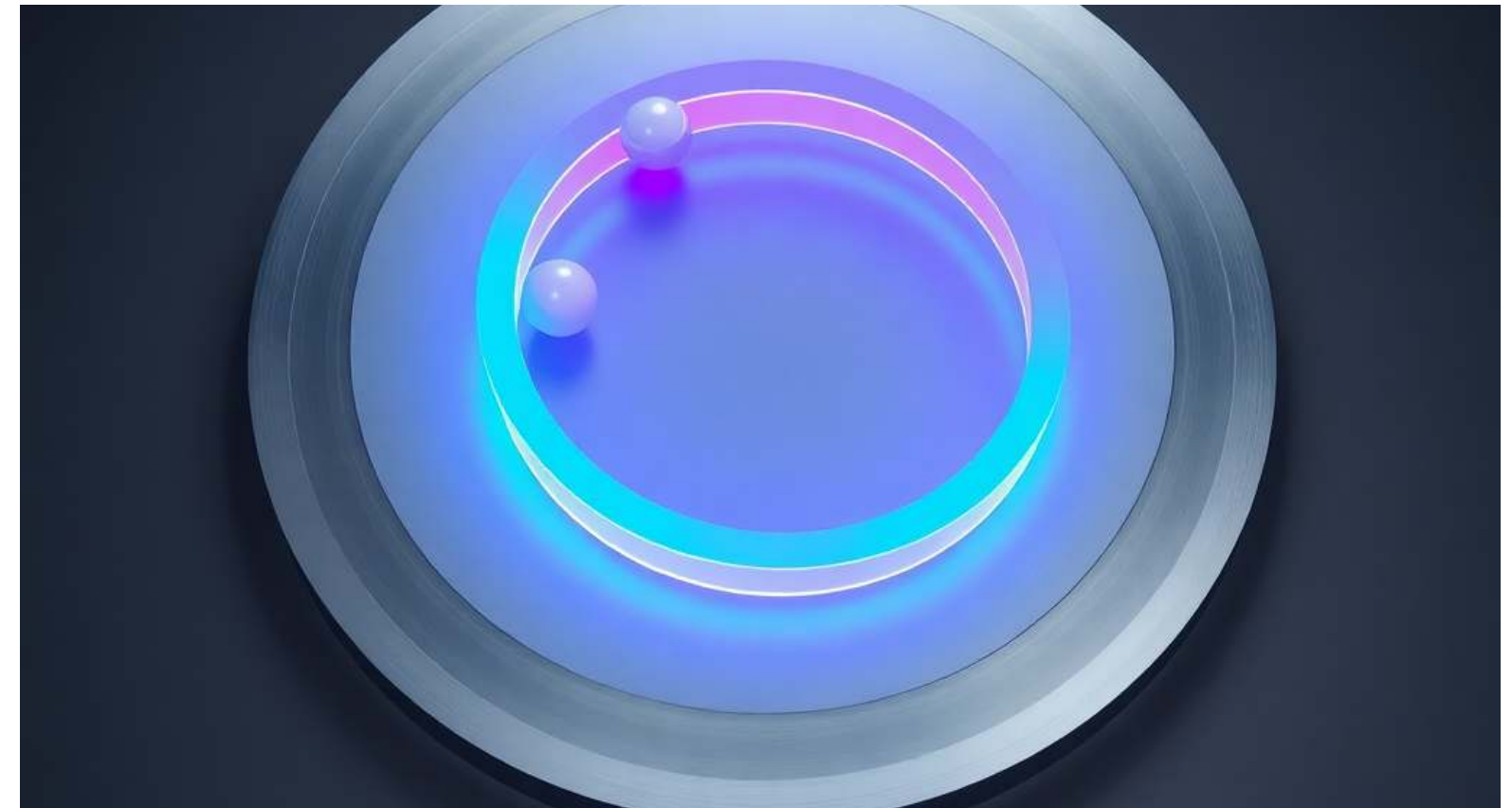
Многие функции не являются ни четными, ни нечетными. Это нормально: для проверки нужно подставить $-x$ и сравнить выражения, а не полагаться только на внешний вид графика.

Симметрия на графике: два способа увидеть ее



Зеркало относительно оси Oy

Если на графике есть точка $(a; b)$, то у четной функции обязательно найдется точка $(-a; b)$. Поэтому левая часть рисунка повторяет правую, как отражение в зеркале. Именно так выглядит график $y = x^2$.



Поворот вокруг начала координат

У нечетной функции каждой точке $(a; b)$ соответствует точка $(-a; -b)$. После поворота графика на 180° он совпадает сам с собой. Такое свойство удобно показать на примере $y = x^3$ с отмеченными парными точками.

Как понять периодичность функции

1. Повторение значения

Если функция через равные промежутки принимает те же значения, ее поведение повторяется. Это означает, что на графике виден устойчивый рисунок.

3. Примеры из природы

Периодичность описывает смену дня и ночи, колебания температуры и движение маятника. В математике такие свойства особенно хорошо видны у синуса и косинуса.

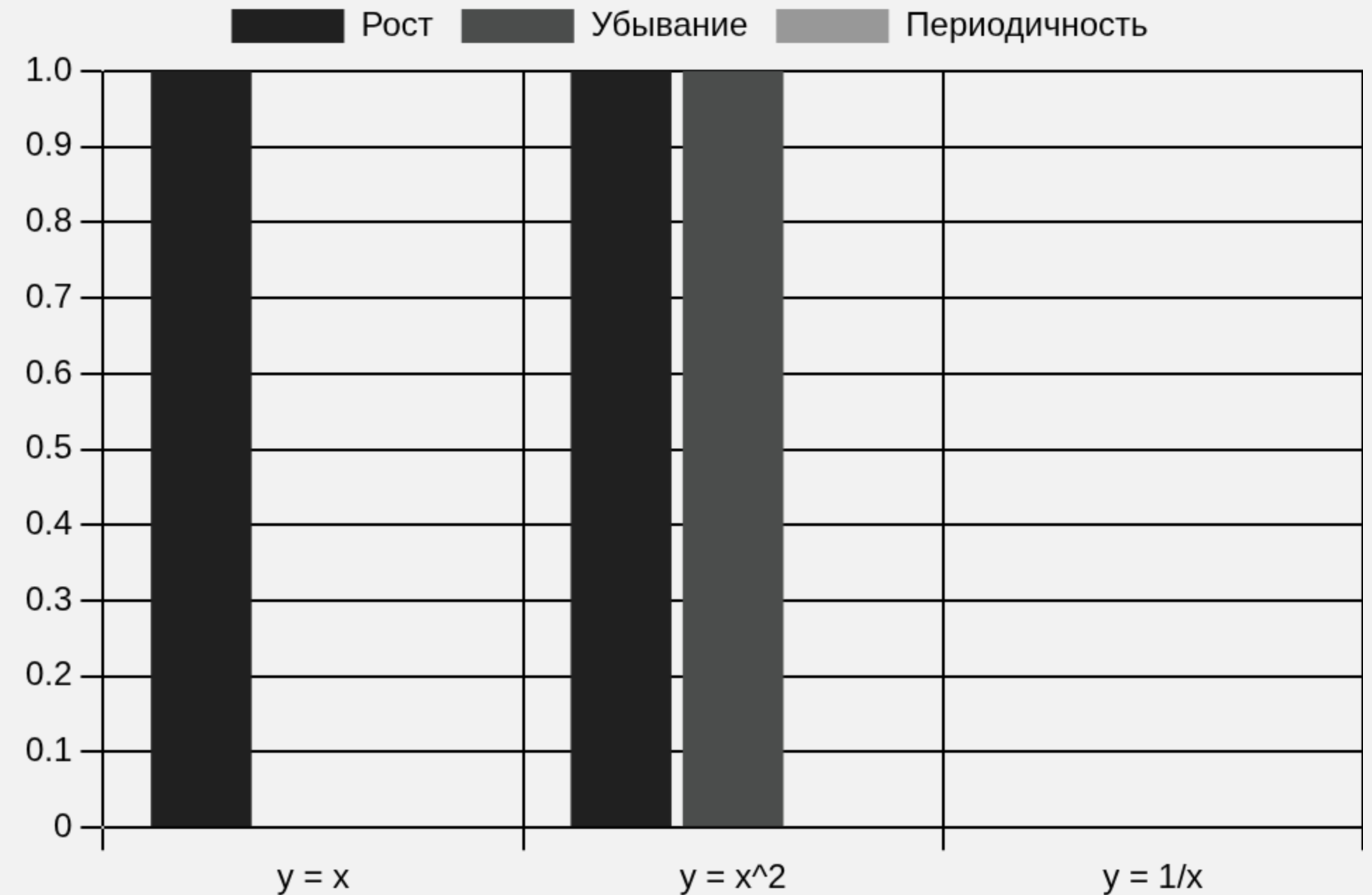
2. Период T

Число T называют периодом, если для всех подходящих x выполняется $f(x + T) = f(x)$. Один и тот же фрагмент графика затем повторяется снова.

Разные типы поведения графиков

Сравнение показывает, что одна и та же ось признаков по-разному описывает функции. Для школьного анализа важно сначала определить, какие свойства действительно есть у графика.

Линейная функция ведет себя одинаково на всей области, парабола меняет направление в вершине, а периодичность не характерна для этих трех примеров.



Ограниченные и неограниченные функции

1

Что значит ограниченность

Ограниченная функция не выходит за определенные границы. Эти границы могут быть сверху, снизу или сразу с обеих сторон, если значения остаются в узком диапазоне.

2

Пример с параболой

У функции $y = x^2$ значения не могут быть меньше нуля, значит, есть нижняя граница. Но при больших $|x|$ график уходит вверх, поэтому верхней границы нет.

3

Пример с дробной функцией

У функции $y = 1/x$ значения становятся очень большими по модулю при приближении x к нулю. Поэтому такую функцию нельзя назвать ограниченной ни сверху, ни снизу.

Как записывают свойства функции в математической форме

Свойство	Обозначение	Запись
Область определения	$D(f)$	$x \in D(f)$
Область значений	$E(f)$	$y \in E(f)$
Нули функции	—	$f(x)=0$
Четность	—	$f(-x)=f(x)$
Периодичность	T	$f(x+T)=f(x)$

Одни и те же свойства можно записать словами, символами и формулами. Такая запись делает ответ кратким, точным и удобным для проверки.

Стандартные обозначения помогают быстро читать условие, проверять решение и записывать свойства функции без лишних слов.

Типичные ошибки при изучении свойств функций

Путают $D(f)$ и $E(f)$

Область определения отвечает на вопрос, какие x допустимы, а область значений — какие y получаются. Если перепутать их, ответ будет формально неверным даже при правильном графике.

Спешат с выводом о симметрии

Похожая левая и правая части графика еще не доказывают четность. Сначала нужно проверить условие $f(-x)=f(x)$ или $f(-x)=-f(x)$, а затем делать вывод.

Неточно находят нули

Нули нужно определять по пересечению с осью Ox , а не «на глаз». На схеме могут быть неточности, поэтому важно проверить координаты точки и уравнение функции.

Не замечают особенности графика

Выколотые точки, разрывы и ограничения формулы меняют свойства функции. Поэтому полезно сверять график с записью и смотреть, при каких x выражение действительно имеет смысл.

Свойства функций вокруг нас



Температура за сутки

График температуры помогает увидеть, когда было самое теплое и самое холодное время дня. По нему легко заметить рост, спад и моменты, когда значение почти не меняется. Такая запись удобна для прогноза и сравнения разных дней.



Путь, цена и население

По графику пути можно определить остановки и равномерное движение, а по графику стоимости — как меняется цена поездки или покупки. В задачах о населении графики показывают общий рост, замедление или ускорение изменения.

Свойства функции — это язык графика

Когда известны область определения, значения, нули, промежутки роста, экстремумы и симметрия, график становится понятным без долгих вычислений. Это основа грамотного анализа функций в 9 классе.