

Гомотетичны е фигуры: масштаб и подобие

Фигура сохраняет форму, но меняет размер.



Зачем изучать гомотетию в 8 классе?

Гомотетия помогает понимать подобие, работать с пропорциями и находить неизвестные размеры. Эти знания нужны в геометрии, черчении, картах, моделях и изображениях на экране.



Определение гомотетии

Что такое преобразование

Гомотетия переводит каждую точку фигуры в новую точку на прямой, проходящей через центр O . При этом сохраняется общий вид фигуры и меняется только её размер.

Расстояние до центра

Для точки A и её образа A' выполняется $OA' = |k| \cdot OA$, где k — коэффициент гомотетии. Именно это равенство задаёт изменение масштаба.

Увеличение фигуры

Если k больше 1, образ фигуры получается больше исходного. Все соответствующие отрезки удлиняются, но углы остаются такими же, как у исходной фигуры.

Уменьшение фигуры

Когда $0 < k < 1$, фигура сжимается к центру гомотетии. Она остаётся похожей на исходную, но все её линейные размеры становятся меньше.

Отрицательный коэффициент

При $k < 0$ образ строится по другую сторону от центра O . Размер определяется модулем коэффициента, а знак показывает, что фигура меняет ориентацию.

Основные свойства гомотетичных фигур

Гомотетия сохраняет форму, но изменяет размеры и расположение точек относительно центра.

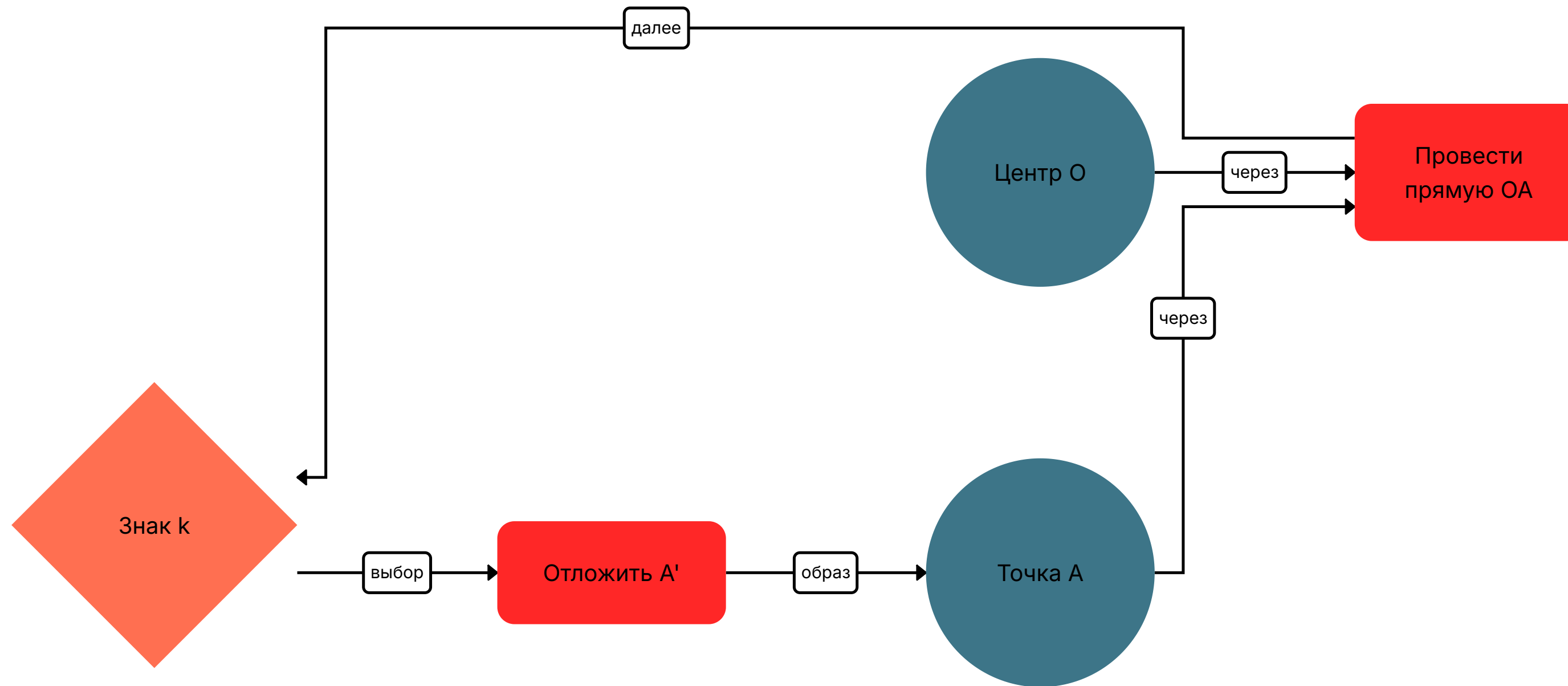
Углы сохраняются, а длины меняются пропорционально коэффициенту. Поэтому фигуры остаются одинаковыми по форме, но могут быть разными по размеру и ориентации.

Свойства гомотетии в школьной геометрии

Свойство	Что происходит
Углы	Равны
Стороны	Пропорциональны
Периметр	В $ k $ раз
Площадь	В k^2 раз
Точки	На одной прямой с О

Построение образа точки при гомотетии

Последовательность построения точки A' по центру O и коэффициенту k



Гомотетия на координатной плоскости

Простая формула

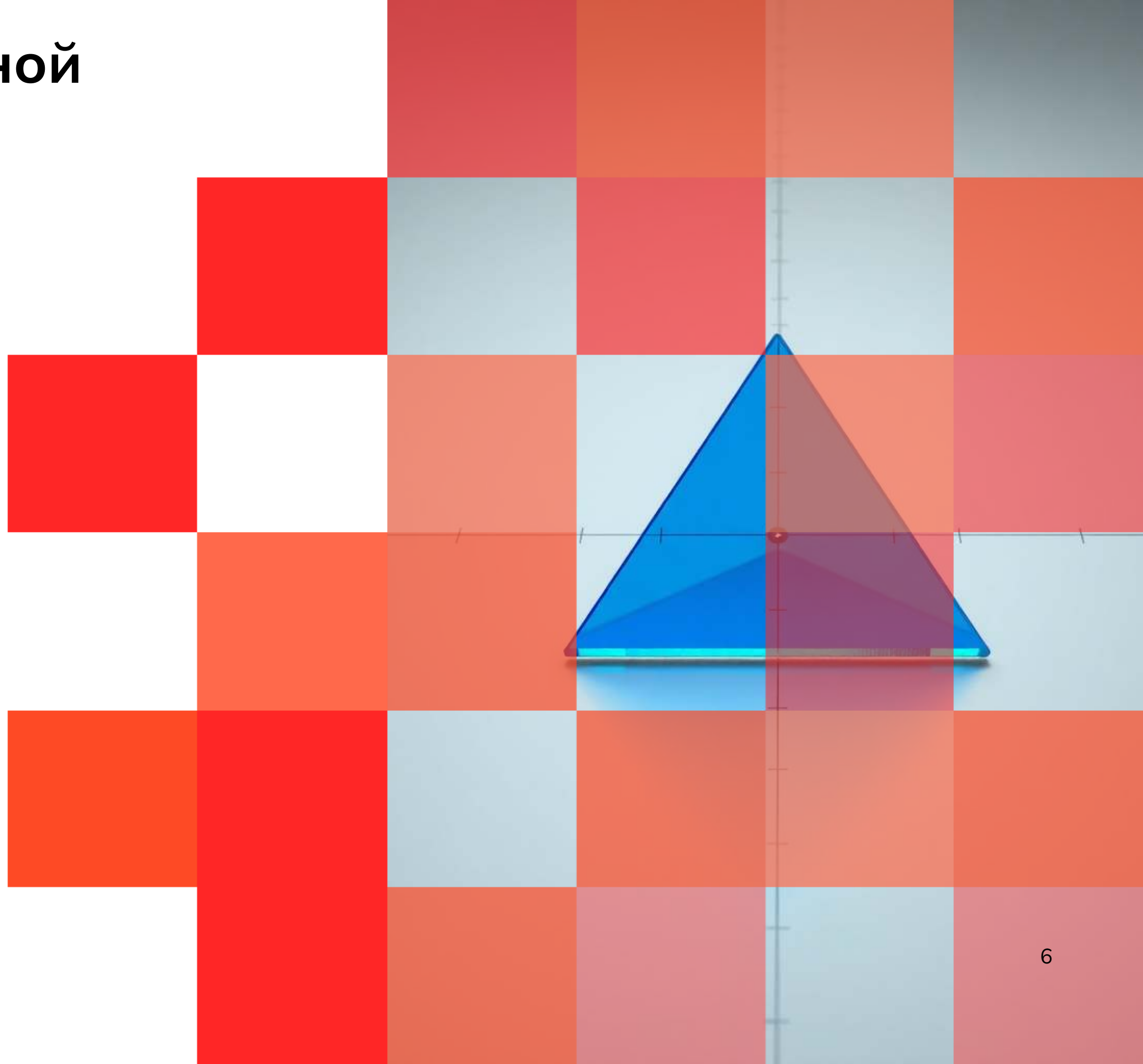
Если центр гомотетии совпадает с началом координат, то точка (x, y) переходит в (kx, ky) . Это позволяет быстро строить образ фигуры без отдельного измерения каждой стороны.

Удобство построения

На координатной плоскости легко отслеживать изменение размеров и проверять пропорции. Такой способ особенно полезен при решении задач и при изображении фигур в компьютерной графике.

Пример с треугольником

Если коэффициент равен 2, то каждый вершины исходного треугольника удаляются от начала координат вдвое сильнее. Углы сохраняются, а стороны увеличиваются в 2 раза.

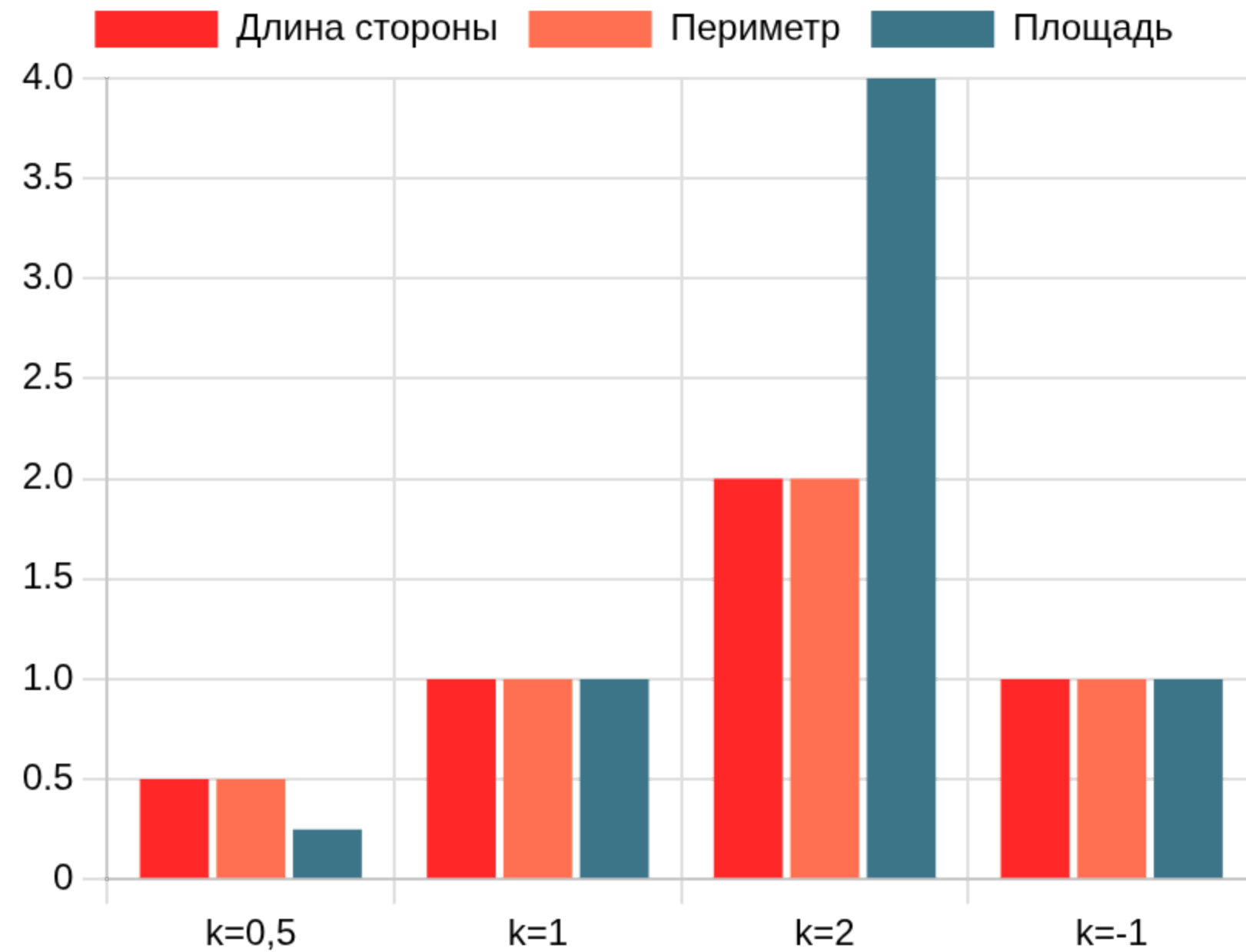


Как меняются размеры при разных коэффициентах

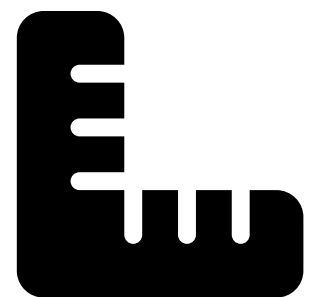
На диаграмме видно, что линейные размеры зависят от модуля коэффициента, а площадь меняется быстрее — по квадрату коэффициента.

Периметр и стороны меняются одинаково, а площадь реагирует сильнее. Отрицательный коэффициент не влияет на размер, но меняет ориентацию фигуры.

Правила гомотетии: $P' = |k|P$, $S' = k^2S$

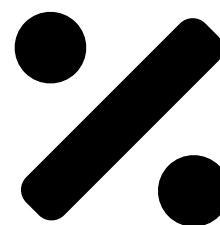


Связь гомотетии и подобия



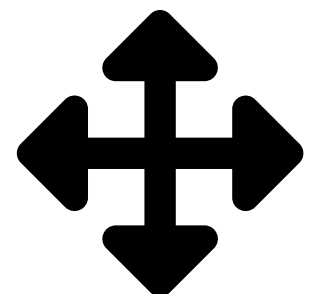
Одинаковая форма

Фигуры, связанные гомотетией, имеют одинаковые углы и одинаковый общий вид. Отличие между ними заключается только в размере и, при отрицательном коэффициенте, в ориентации.



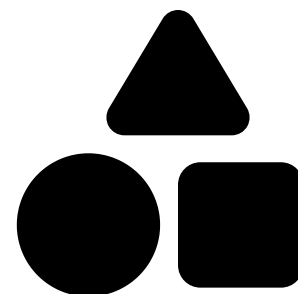
Пропорциональные стороны

Соответственные стороны подобных фигур относятся как одно и то же число. Гомотетия наглядно показывает, почему пропорции между длинами сохраняются при масштабировании.



Не только масштаб

Иногда для перехода между подобными фигурами нужны ещё перенос или поворот. Поэтому гомотетия объясняет не все случаи подобия, но остаётся его важнейшей моделью.



Школьная модель

В учебной геометрии гомотетия помогает увидеть, как из одной фигуры получается другая без изменения формы. Это делает понятие подобия более понятным и конкретным.

Гомотетичные фигуры в окружающем мире

Карты и планы

- 1 На картах и планах сохраняются очертания объектов, но уменьшаются реальные расстояния. Благодаря масштабу можно читать схему города или помещения, не теряя представления о форме.

Архитектурные макеты

- 2 Макет здания показывает пропорции будущего объекта в уменьшенном виде. Это помогает оценить внешний вид и соотношение частей ещё до начала строительства.

Техника и модели

- 3 Уменьшенные модели автомобилей, самолётов и других устройств используют тот же принцип. Формы остаются узнаваемыми, хотя размеры отличаются от настоящих.

Экраны и иконки

- 4 На телефонах и компьютерах изображения часто меняют размер без искажения. Значки остаются понятными, потому что сохраняют пропорции и общую форму.

Числовой пример гомотетии

Покажем, как при коэффициенте 2 меняются стороны, периметр и площадь треугольника.

Величина	До	После
Стороны	3,4,5	6,8,10
Периметр	12 см	24 см
Площадь	S	4S

Все линейные размеры увеличились в 2 раза, периметр тоже удвоился, а площадь выросла в 4 раза. Это подтверждает правило $S' = k^2S$.

Пример для коэффициента гомотетии $k=2$

Центр гомотетии и его роль

1

Неподвижная точка

Центр гомотетии O остаётся на месте при преобразовании. Именно от него отсчитывается положение каждой точки фигуры, поэтому без центра нельзя однозначно построить образ.

2

Одна прямая

Для любой точки A и её образа A' точки O , A и A' лежат на одной прямой. Это правило помогает быстро проверять правильность построения и поиска соответствий.

3

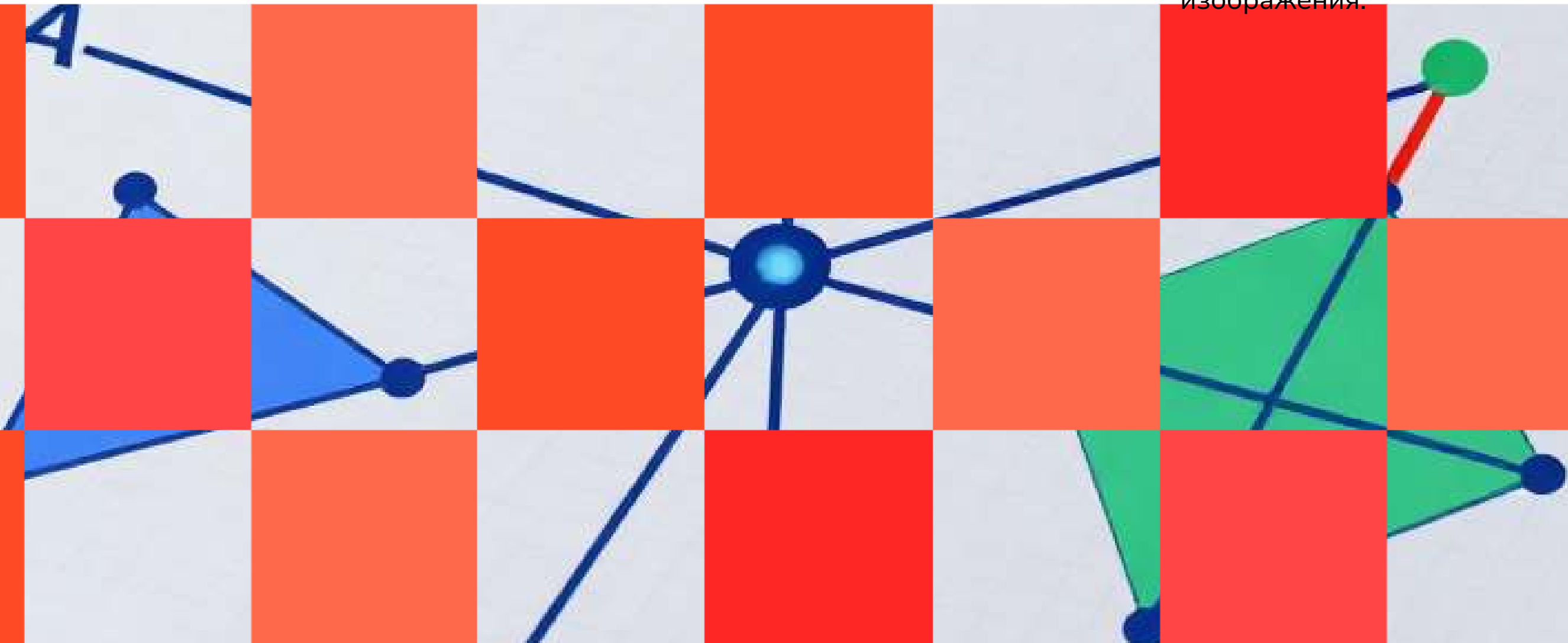
Направление и расстояние

Центр задаёт, в какую сторону смещается точка и насколько далеко она окажется от исходного положения. Знак коэффициента определяет, по какую сторону от O строится образ.

4

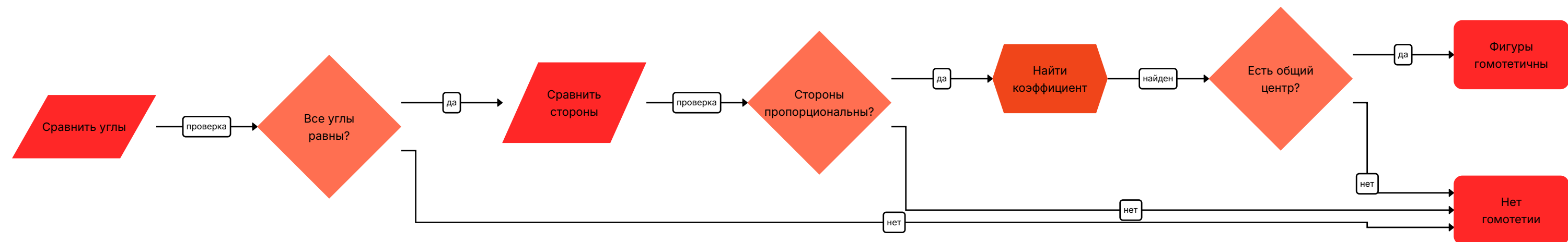
Роль для всей фигуры

Если известен центр, можно построить образ каждой вершины многоугольника и получить всю фигуру целиком. Поэтому центр гомотетии определяет не только размер, но и расположение изображения.

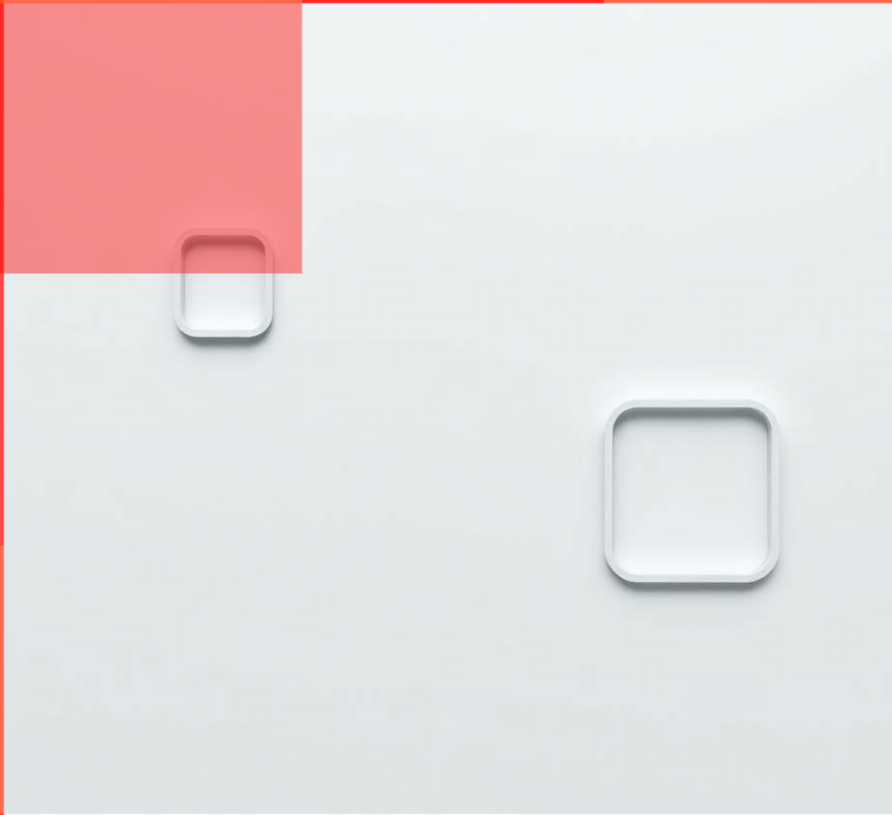


Проверка гомотетичности многоугольников

Последовательность признаков: углы, стороны, коэффициент и центр преобразования.



Гомотетия в черчении, дизайне и логотипах



Один знак — три размера

На листе или экране один и тот же символ может выглядеть по-разному: маленьким, средним и крупным. Форма остаётся узнаваемой, потому что все пропорции сохранены, а линии и углы изменяются одинаково.



Чертёж без потери смысла

В техническом рисунке деталь часто показывают в уменьшенном виде, чтобы поместить её на лист. При этом важны точные отношения длин, иначе чертёж перестанет соответствовать реальному объекту.



Логотип, который не теряет лица

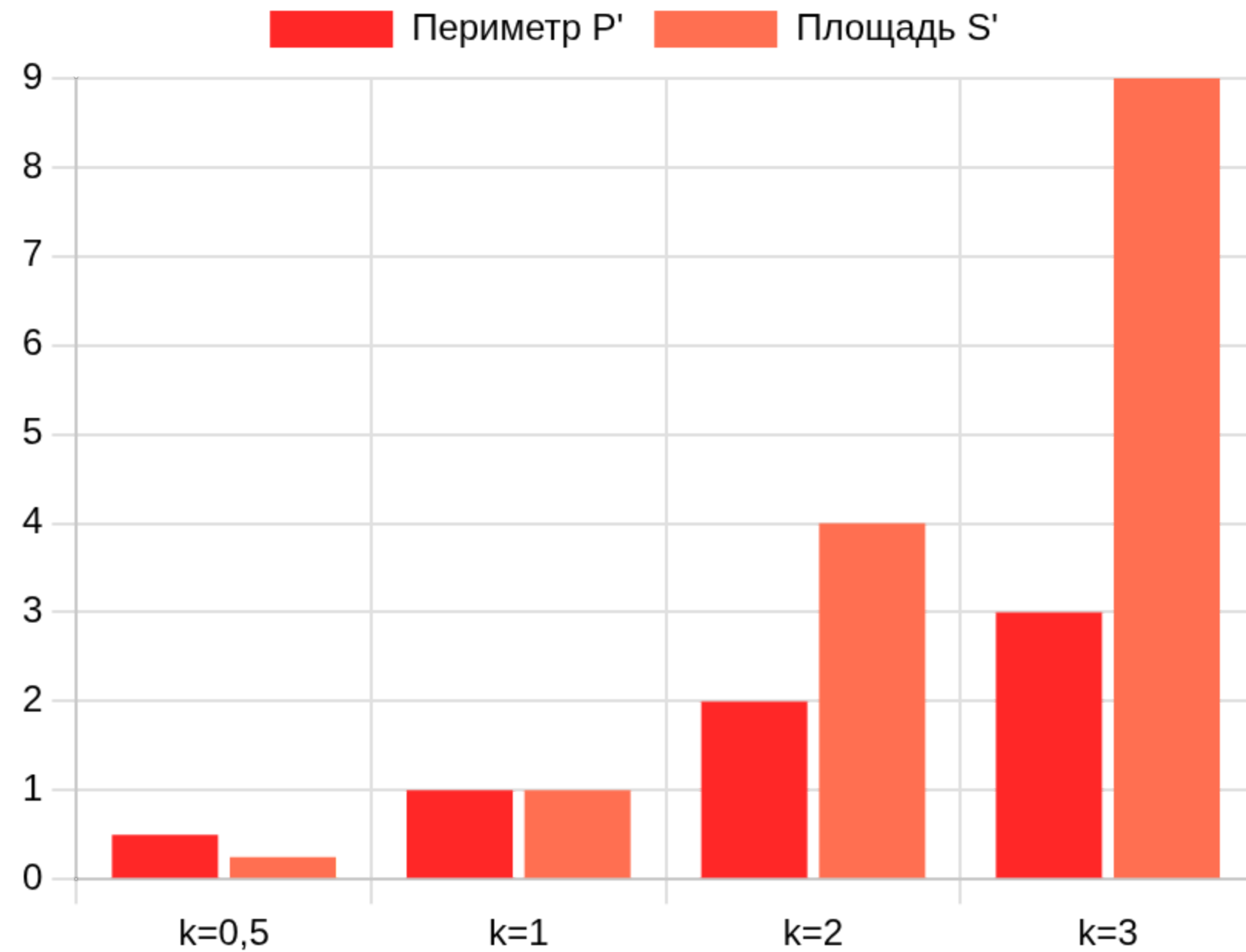
Эмблемы и пиктограммы должны хорошо выглядеть и на вывеске, и в маленьком значке приложения. Поэтому дизайнеры следят, чтобы при любом масштабе сохранялись основные очертания и пропорции.

Периметр и площадь при масштабировании

Линейные размеры меняются одинаково с коэффициентом, а площадь реагирует сильнее, потому что зависит от двух измерений фигуры.

Периметр растёт или уменьшается пропорционально $|k|$, а площадь — намного быстрее, по правилу k^2 .

Формулы гомотетии: $P' = |k|P$, $S' = k^2S$.





-2

**при таком коэффициенте
фигура становится вдвое
больше и меняет
ориентацию относительно
центра**

Знак коэффициента показывает, на какой стороне от центра появится образ. Модуль отвечает за размер, а отрицательный знак — за «переворот» фигуры.

Правило гомотетии: при $k < 0$ образ строится по другую сторону от центра.

Сравнение преобразований: перенос, поворот, гомотетия

Сравнение показывает, какие свойства сохраняет каждое преобразование и чем гомотетия отличается от других движений фигуры.

Гомотетия выделяется тем, что сохраняет подобие формы, но изменяет масштаб; другие преобразования размер не меняют.

Свойства геометрических преобразований

Преобразование	Сохраняется	Изменяется
Перенос	размер, форма	положение
Поворот	размер, форма	положение, направление
Гомотетия	форма, углы	размер; при $k < 0$ — ориентация

Типичные ошибки при изучении темы

Нет центра

Иногда гомотетию путают с простым увеличением рисунка. Но без центра преобразование не определено: именно от него строятся соответствующие точки и расстояния.

Неверная площадь

Часто считают, что площадь меняется так же, как сторона или периметр. На самом деле она зависит от квадрата коэффициента, поэтому изменение получается заметно сильнее.

Забывтый знак

Отрицательный коэффициент нельзя игнорировать. Он не только меняет размер, но и переносит образ на другую сторону от центра, из-за чего фигура выглядит перевёрнутой.

for a corn

change to corner

the length is fille-riaronigutom
campie notum the spelt, example.

As square to square frointing
has an gragle h alceg lan t
lone sicall sches.

Где применяется масштабирование

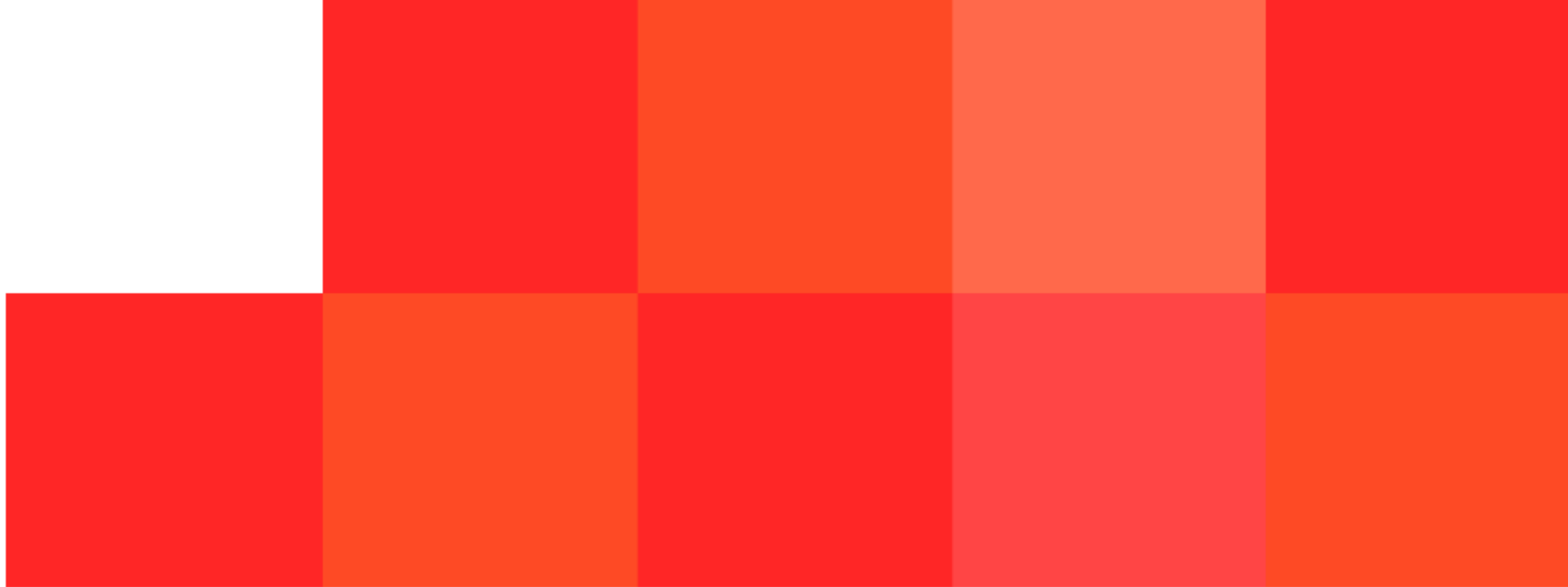
Во многих сферах масштабирование помогает показывать объект в удобном размере без потери формы и узнаваемости.

Наибольшая доля применения связана с картами, графикой и моделированием, где важны точные пропорции и наглядность.

Иллюстративное распределение областей применения масштабирования.



Алгоритм решения задач на гомотетию



1. Найти центр и коэффициент

Сначала определяют центр O и значение k . Без этих данных нельзя установить, как именно меняется положение и размер фигуры.

2. Сопоставить элементы

Далее находят соответствующие вершины, стороны и углы. Это помогает понять, какие части исходной фигуры переходят в образ.

3. Проверить формулы

После этого используют соотношения $P' = |k|P$ и $S' = k^2S$. Так удобно вычислять новые размеры без полного построения.

4. Сделать вывод

В конце учитывают знак коэффициента, проверяют пропорции и формулируют ответ: действительно ли перед нами гомотетия.



Что важно запомнить о ГОМОТЕТИИ

Гомотетия показывает, как одна и та же фигура может сохранять форму, но менять размер и положение. Она связывает геометрию с пропорциями и помогает решать реальные задачи о масштабе.