

Теорема косинусов: связь сторон и углов в треугольнике

Теорема косинусов связывает три стороны треугольника и угол между двумя из них.



Почему эту теорему изучают в школе

В 7 классе ученики изучают треугольники, элементы, теорему Пифагора и свойства углов. Теорема косинусов расширяет эти знания на любые треугольники и помогает вычислять расстояния и углы без прямого угла.



Обозначения сторон и углов в треугольнике

Стороны треугольника обычно обозначают буквами a , b , c , а углы — A , B , C . Такая договорённость делает записи единообразными и удобными для решения задач по теме.

Важно помнить соответствие: сторона c лежит напротив угла C , сторона a — напротив угла A , сторона b — напротив угла B . Именно поэтому в формулах рядом стоит нужный угол.

Когда вы используете формулы, не перепутайте угол и сторону: угол в записи всегда относится к стороне, которую ищут или к которой относится вычисление. Тогда вычисления становятся надёжными.

90°

Если угол между сторонами равен 90°, косинус обнуляется, и выражение упрощается до известного правила.

Для стороны c : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$. Аналогично находятся a и b , а формула работает в любом треугольнике.

Учебный курс геометрии (школьная планиметрия): следствие из определения косинуса при 90° и структуры формулы.

Теорема косинусов и теорема Пифагора

Сравните случаи применения и увидите, как теорема Пифагора получается из теоремы косинусов.

Пифагор — частный случай: когда угол 90° , косинус равен нулю, и косинусная формула становится пифагоровой.

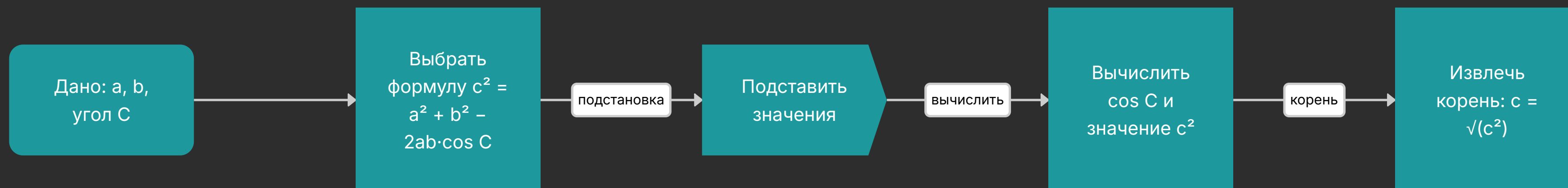
Случай	Формула	Когда применяется	Связь с другой теоремой
Теорема Пифагора	$a^2 + b^2 = c^2$	Только прямоугольный	Частный случай
Теорема косинусов	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$	Любой треугольник	При $C=90^\circ$ превращается в Пифагора

Сопоставление двух школьных теорем по условию $C=90^\circ$.

Алгоритм нахождения стороны по двум сторонам и

углу

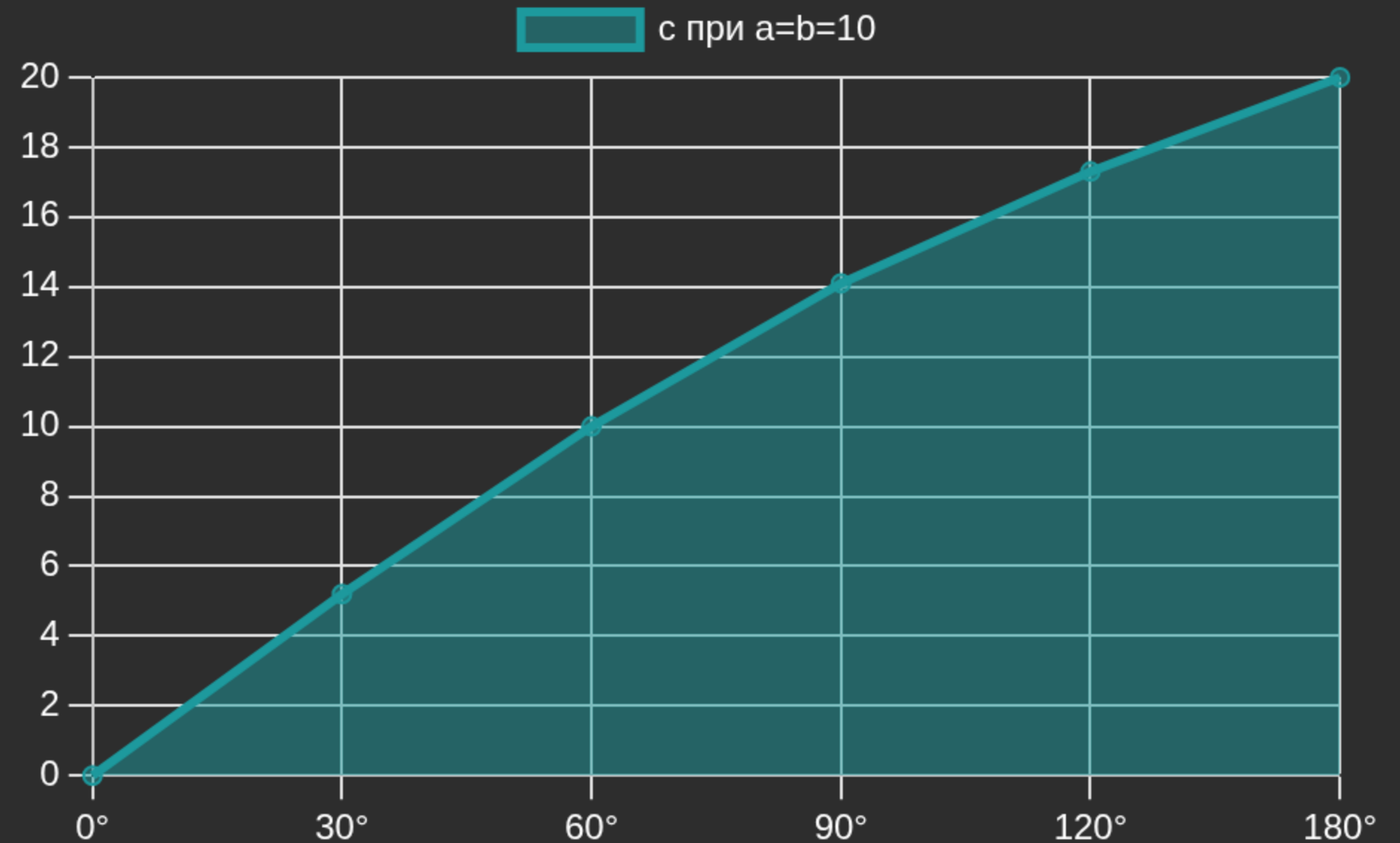
случай известны a , b и угол C ; применяется формула $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.



Как растёт противоположная сторона при увеличении угла

При тех же сторонах a и b увеличение угла делает треугольник «шире», поэтому расстояние между концами этих сторон становится больше.

Точки показывают монотонный рост: чем меньше косинус, тем сильнее меняется разность в формуле и тем больше c .



Расчёт по теореме косинусов при $a=10$, $b=10$ для углов 0° , 30° , 60° , 90° , 120° , 180° .

Геометрический смысл формулы

Связь стороны c с углом C

На рисунке стороны a и b образуют угол C , а сторона c соединяет их концы. Чем сильнее «раскрыт» угол, тем длиннее получается c : это видно по форме треугольника.

Почему появляется косинус

Косинус связан с проекцией одной стороны на другую. Когда угол меняется, меняется и эта проекция, а значит меняется вклад в формулу для c^2 .



Как найти угол, если известны три стороны

Если в треугольнике известны a , b и c , теорема косинусов даёт способ найти угол C через косинус. Формула имеет вид $\cos C = (a^2 + b^2 - c^2) / 2ab$.

Сначала вычисляют значение $\cos C$ по подстановке чисел в дробь. После этого выбирают угол, который соответствует полученному косинусу в нужном диапазоне.

Такой подход особенно удобен в задачах, где стороны измерены и нужно восстановить именно угол. Он опирается на точную связь «стороны $\leftrightarrow$ угол».

Значения косинуса для основных углов

В формуле теоремы косинусов косинус входит с минусом, поэтому при разных углах величина с меняется по-разному.

Из таблицы видно: при увеличении угла $\cos$ уменьшается от 1 до -1 , а значит меняется поправка к сумме квадратов.



Пошаговый пример вычисления стороны

Дано	Подстановка	Вычисление	Ответ
$a=7, b=9, C=60^\circ$	$c^2 = 7^2 + 9^2 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cos 60^\circ$	$c^2 = 49 + 81 - 63 = 67$	$c \approx 8,2$

Учебная демонстрация по теореме косинусов (школьный уровень)

Треугольник задан двумя сторонами и углом между ними. Сначала находим c^2 по теореме косинусов, затем извлекаем корень, чтобы получить саму длину c . В конце фиксируем смысл результата.

Поскольку угол 60° не прямой, сторона c получается «между» экстремальными случаями: она меньше суммы двух сторон ($7+9$), но больше их разности $|9-7|$.

Типичные ошибки при решении задач



Путают угол и сторону

В формуле нужно брать тот угол, который лежит между известными сторонами. Часто подставляют не тот угол или не ту сторону, из-за чего $\cos$ берётся для «чужого» участка треугольника.



Считают, что подходит только прямоугольный треугольник

Теорема косинусов работает для любого треугольника, включая острые и тупые углы. Если считать её только «для прямого угла», многие задачи останутся нерешёнными.



Забывают извлечь корень

После вычисления c^2 обязательно находят c , извлекая квадратный корень. Оставлять ответ в виде c^2 — ошибка, потому что длины сторон измеряются без квадратов.



Ошибаются в вычислениях выражения

Легко ошибиться в знаках или в умножении $2ab$ на $\cos C$. В результате получается неверное c^2 , а затем и неверный ответ — даже при правильном выборе формулы.

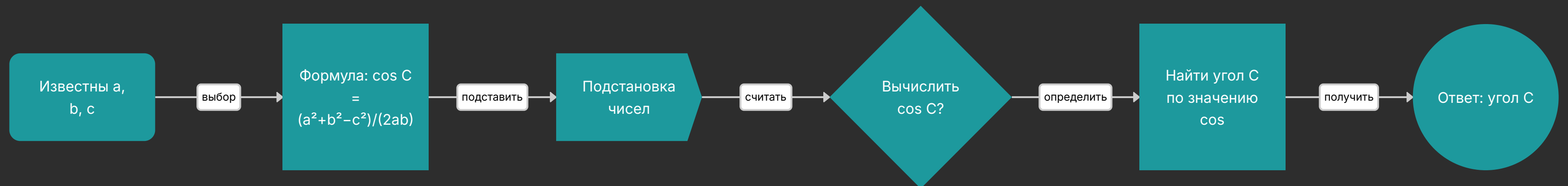


Неверно обращаются с косинусом

Косинус вычисляется для угла, указанного в градусах. Иногда путают записи, подставляют значение $\cos$ напрямую вместо $\cos C$ или используют другой угол, не соответствующий условию задачи.

Как найти угол по трём сторонам

Схема алгоритма для восстановления угла C по известным сторонам a, b и c через косинус



Примеры применения теоремы в жизни и технике

Дистанция «через преграду»

Нужно вычислить расстояние между точками, а напрямую измерить неудобно: мешает забор, обрыв или здание. Делают измерения двух сторон и угла между ними и по теореме косинусов находят искомую длину.



План местности в геодезии

На местности часто измеряют несколько участков и связи между ними, не подходя к каждой точке вплотную. Теорема косинусов помогает рассчитывать расстояния по данным измерений, когда прямой маршрут недоступен.



Проверка размеров при стройке

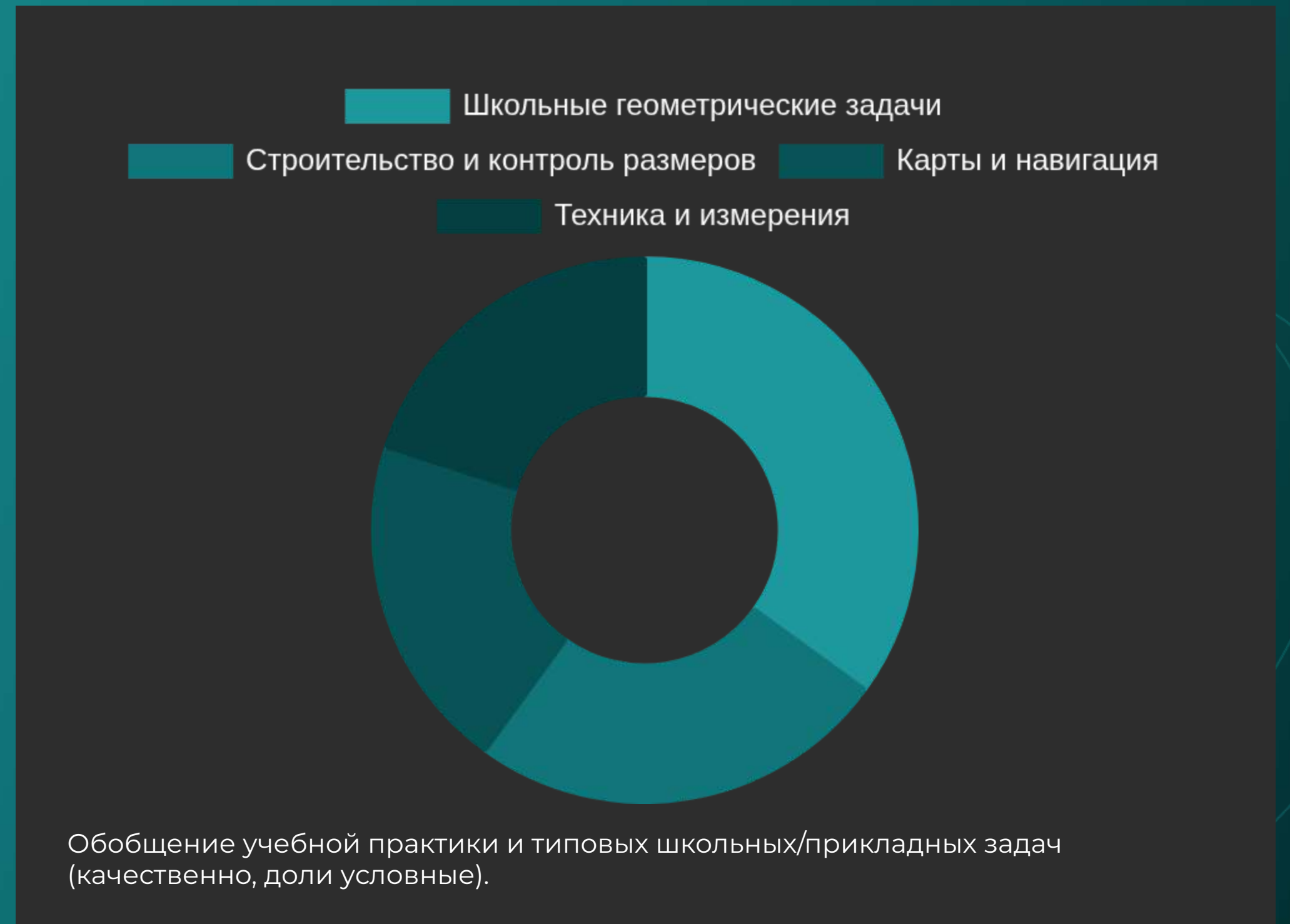
Строительный чертёж требует точности углов и длин. Если известны две стороны и угол между ними, можно быстро вычислить третью и проверить, сходятся ли размеры. Так уменьшается риск ошибок в разметке.



Где теорема косинусов применяется чаще всего

Теорема особенно выручает, когда прямое измерение или простой прямоугольный расчёт невозможны.

По диаграмме видно: чаще всего теорему используют для вычисления сторон и углов в задачах, где нет прямого угла, и приходится опираться на измеренные данные.



90°

При этом угол превращает косинус в ноль, и общая формула сокращается до знакомого правила Пифагора.

Когда угол C равен 90° , $\cos C = 0$. Тогда $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$ превращается в $c^2 = a^2 + b^2$, то есть в теорему Пифагора.

Свойство косинуса для прямого угла и вывод из теоремы косинусов.

Как запомнить смысл формулы

Теорема косинусов связывает три стороны и угол между двумя из них. Она не просто «даёт формулу», а показывает, как геометрия треугольника влияет на длину третьей стороны.

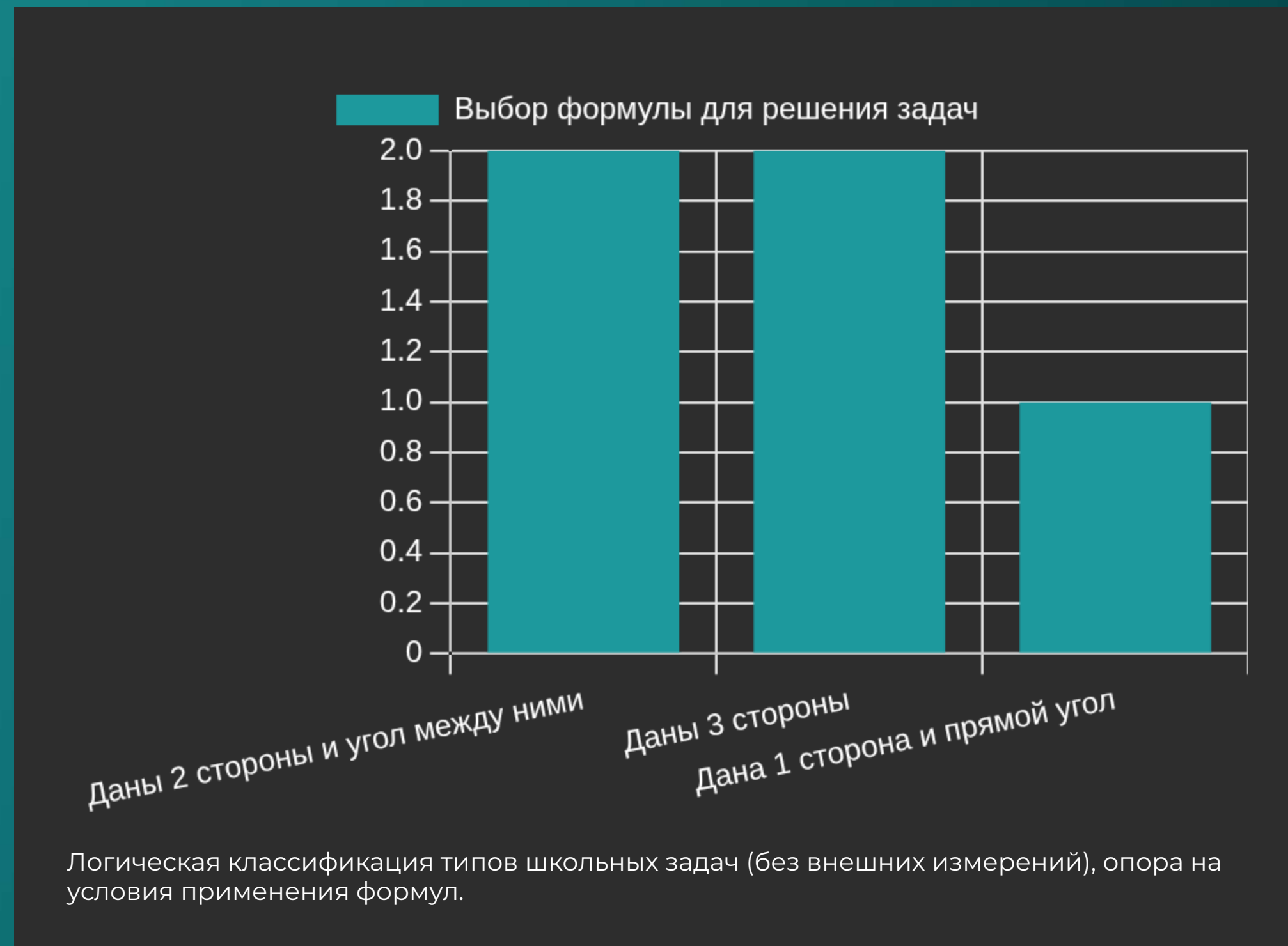
Квадрат искомой стороны получается из суммы квадратов двух других, но к этой сумме добавляется поправка с минусом. Эта поправка зависит от косинуса угла и поэтому меняется при повороте треугольника.

Чем больше угол между сторонами, тем меньше косинус и тем сильнее меняется результат вычисления. Поэтому важно понимать знак и роль $\cos$, а не только заучивать запись.

Когда применять теорему косинусов

Если угол не прямой, чаще всего удобнее искать нужную сторону или угол через косинусы.

Диаграмма помогает быстро определить подход: для двух данных ситуаций подходит теорема косинусов, а при прямом угле — Пифагор.



Главные формулы темы в одном месте

Основная формула: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$. Она используется, когда известны две стороны и угол между ними, а нужно найти третью сторону.

Для других сторон теорема записывается так: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ и $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$. Выбирайте ту букву, которая соответствует искомой стороне.

Обратная формула для угла: $\cos C = (a^2 + b^2 - c^2) / 2ab$. Она нужна, когда известны все три стороны и требуется найти величину угла.

Что даёт теорема косинусов в школьной геометрии

Теорема косинусов связывает стороны и углы любого треугольника и позволяет решать задачи без прямого угла. Она даёт способ находить сторону по двум сторонам и углу, а также угол по трём сторонам, причём теорема Пифагора — её частный случай.

